數學傳播 36卷4期, pp. 42-47

歐拉關於七橋問題的解

——從數學史與數學教育的角度看

程　釗

摘要: 大多數涉及七橋問題的圖論教科書, 數學史書籍和數學科普讀物都將歐拉解決七橋問題的方法描述成將其抽象爲一個一筆劃問題, 然而這卻與眞實的歷史不符。本文試圖就此所引申出的問題從數學史與數學教育以至兩方面結合的角度進行一些探討。

關鍵詞: 歐拉, 七橋問題, 數學史, 數學教育。

1. 衆所周知, 與物理學, 化學, 生物學等自然科學學科相比, 數學的科普工作要困難得多。這主要是由於這門學科的抽象性所決定的。在爲數不多的適合用作科普選題的數學材料中, 七橋問題可以說是深受歡迎的一個。數學中的拓撲學和圖論都以它作爲發端。將它抽象爲一個一筆劃問題的解決方法, 也常常被用作課堂上講授數學模型方法的範例。

2. 七橋問題是說[1]: 在普魯士的哥尼斯堡[1] 有一個稱爲"奈發夫"的島 A; 普雷格爾河的兩支從島的兩旁流過, 並且有七座橋 a, b, c, d, e, f, g 橫跨這兩條支流 (圖1)。問能否設計一次散步, 使得人們恰好走過每座橋一次。

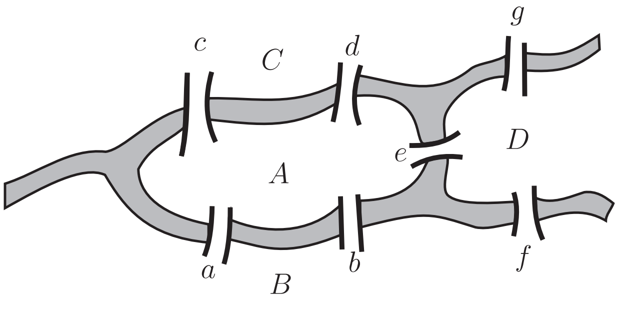


圖1

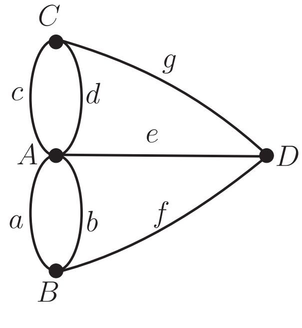


圖2

[1] 二次大戰後劃歸前蘇聯, 改稱加里寧格勒, 現屬俄羅斯。

3. 一種廣爲流傳的說法 (存在於涉及該問題的各種圖論教科書, 數學史書籍和數學科普讀物中) 是: 歐拉將每一塊陸地用一個點來代替, 將每一座橋用連接相應兩個點的一條線來代替, 從而得到了圖2。於是, 七橋問題就變成了能否一筆劃出這個圖的問題。這樣的描述看上去似乎非常合理, 而且在人們看來上述思考方式也是與歐拉的智慧相匹配的。然而這卻與眞實的歷史不符。事實是: 在歐拉 1736 年的論文中從來沒有出現過任何現代意義的 “圖”, 該問題與一筆劃之間的聯繫直到 19 世紀末才被人們提及。圖 2 只是在 1892 年才首次出現於英國數學家羅茲·鮑爾的《數學遊戲與古今問題》(Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times) 中, 兩者之間相差了 150 多年! [2]

4. 從數學史[2] 的角度來看, 這可以算得上是一個嚴重的錯誤。因爲正如羅素所說: “歷史學是有價值的, 首先因爲它是眞實的; 而這一點儘管不是它那價值的全部, 卻是它的其他價值的基礎和條件。”[3]2 如果一段有關數學史實的記述連起碼的眞實性都做不到, 那麼它也就喪失了作爲數學史內容而存在的價值。令人遺憾的是, 自從有學者指出這一錯誤到現在已經過去了 25 年, 但這種以訛傳訛仍在延續著。不過令人欣慰的是, 在上世紀 90 年代出版的卡茲 (V. J. Katz) 所著《數學史通論》一書中[4]635−636, 關於歐拉解決七橋問題的記述已經回歸了歷史的本來面目。相信隨著這部書的影響繼續擴大, 對於上述訛傳的糾正必將產生積極的作用。

5. 其實, 這裡還涉及到另一個在數學史研究中經常遇到的問題, 即根據後來出現的概念去解釋原始數學文本。就本文的論題來講即用圖 2 去解釋圖 1。圖 1 屬於歐拉的原始文本, 圖 2 則屬於現代圖論。關於這個問題可以區分出兩種截然相反的方法論主張, 持贊成態度的可以稱爲今釋主義 (presentism), 持反對態度的則可以稱爲尊古主義 (antiquarianism)。就筆者目前瞭解, 俄羅斯數學史家傑米多夫 (C. C. Демидов) 可能是第一位在科學編史學意義上使用這兩個詞的人 (參看 [5])。

6. 上述問題在古代數學史的研究方面表現的尤爲突出。我國著名數學家吳文俊提出的研究古代數學史的方法論原則 (轉引自 [6], 55) 就是持反對態度的一個代表: (1) 所有研究結論應該在倖存至今的原著的基礎上得出; (2) 所有結論應該利用古人當時的知識, 輔助工具和慣用的推理方法得出。然而, 所有的研究者在一定意義上講都是今釋主義者。因爲正如傑米多夫指出 (轉引自 [5]): “研究者事先就被當代文化所‘腐蝕’, 他所使用的概念工具和語言承載著當前文化的精神, 那是他無法根除的。” 而且不可否認, 許多數學概念的歷史在其得到標準的命名之前很久就已經開始了。或許最佳的選擇是兩者之間的調和, 採取 “溫和的今釋主義” 和 “溫和的尊古主義”[5], 但無論如何眞實性這個底線是不能突破的。

[2] “數學史”(history of mathematics) 這個詞目前有兩種含義, 一種含義是指客觀發生的數學歷史過程本身; 另一種含義是指對這一歷史過程的描述和闡釋。在本文中我們更經常在後一種意義上使用“數學史”一詞. 有時, 在此意義上也使用“數學編史學” (historiography of mathematics) 一詞, 但它更常用的含義是對上述工作的理論研究。

7. 我們現在來看看歐拉眞實的解法是什麼。

首先, 歐拉以他作爲數學家的頭腦作出反應, 自己要解決的應該是一個比七橋問題更一般的問題, 即: 給定任意一個河道圖與任意多座橋, 要判斷有沒有可能每座橋恰好被走過一次。接下來, 他考慮過將所有符合要求的路線都枚舉出來的方法, 但發現隨著橋數的增多, 其複雜程度會變得非常之大, 所以馬上放棄了這種方法。最後他選擇的是一種代數和計算方法。對於歐拉來說, 這兩方面都是他得心應手的。

8. 從數學教育的角度來看, 我們可以設想, 假定七橋問題還按原來認爲的那樣是歐拉通過將其抽象爲由點和線構成的圖而解決的, 那麼當學生們瞭解到這種解法之後作何感想呢? 至少拿筆者來說, 在知道歐拉這樣解決七橋問題後有一種距離感, 因爲一下子就看出可以將陸地抽象爲點, 將橋抽象爲連接相應兩個點的線, 從而把七橋問題轉化成能否一筆劃出這個圖的問題眞乃神來之筆, 非普通人所能企及。但是一旦回歸眞實的歷史, 我們卻驚訝地發現, 哦! 原來歐拉也曾想過將所有符合要求的路線都枚舉出來這種普通人都想得出的"笨"辦法呀。只是歐拉的過人之處在於他立即判斷出, (用今釋主義的表述就是) 這種解法的"計算複雜度"會隨著初始數據規模的增加而使得該解法變得無效。於是, 距離感消除了, 剩下來將是對於歐拉具體求解過程的期待。

9. 在歐拉所處的年代, 分析是數學家的寵兒, 因此在數學史上整個18世紀有時也被簡單地稱爲"分析時代"[7]176, 而作爲處理分析問題能手的歐拉則被稱爲"分析的化身"[8]151。事實上, "分析"一詞在 17 和 18 世紀具有和"代數"相同的含義[3], 這一點從"解析幾何"的名稱 (英文 analytic geometry 本義是"分析的幾何") 和方法也可以體會到。如此看來, 作爲分析大師的歐拉也是運用代數方法的高手。不過這次他用字母表示的不是數, 而是問題中的陸地。由字母構成的串則代表過橋的記錄。

10. 他寫道: "我的整個方法的根據是, 以適當的並且簡易的方式把過橋記錄下來: 我用大寫字母 A, B, C, D 表示被河分割開的各塊陸地。當一個人從 A 地過橋 a 或 b 到 B 地時, 我把這次過橋記作 AB, 第一個字母代表他來的地方, 第二個字母代表他過橋後所到的地方。如果步行者接著從 B 過橋 f 到 D, 這次過橋記作 BD; 這接連的兩次過橋 AB 與 BD 我就用三個字母 ABD 來記錄。" 不難看出, 按照歐拉的記法, 記錄過橋次數的字母串中的字母個數總比橋數多一。因此, 如果表示過七座橋則需要用八個字母。

11. 於是, 七橋問題可以重新表述成: 在用四個字母 A, B, C, D 排成的八個字母的串中, 有沒有可能使得 AB (或 BA) 組合出現兩次, AC (或 CA) 組合也出現兩次, 而 AD, BD, CD 這些組合各出現一次? 接下來, 歐拉想要尋找一個法則, 使得對於這個問題或所有類

[3] 有關於此的更深入的討論請參看[9], 16-17。

似的問題, 用該法則能簡易地判斷所要求的字母排法是不是行得通。在此, 歸納法繼續發揮著作用。歐拉注意到, 如果某塊陸地比如說 A (圖3) 通一座橋 a, 則不論步行者過橋前在 A 還是過橋後到 A, 字母 A 一定出現一次。如果 A 通三座橋 a, b, c, 那麼不管他是不是從 A 出發, 字母 A 都將出現兩次。依此類推, 如果通 A 的橋的個數 k 是奇數, 則字母 A 出現的次數爲 $(k+1)/2$。

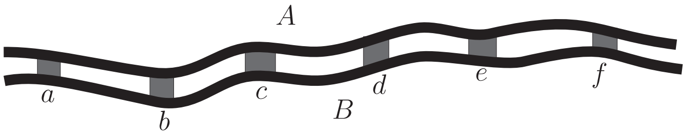


圖3

12. 本來到此爲止, 七橋問題已經獲得了解決, 因爲通 A 的有 5 座橋, 所以字母 A 應出現 3 次, 通 B, C, D 的各有 3 座橋, 因此它們各出現 2 次, 這樣總的字母個數$=3+2+2+2=9$。但在八個字母的串中這是不可能的, 從而七橋問題無解。然而我們不要忘記, 歐拉尋找的是針對類似的一般問題的一個求解法則。因此他必須要找到如果橋的個數 k 是偶數時, 字母 A 出現的規律。他發現如果步行者從某塊通 k (k 爲偶數) 座橋的陸地出發, 則相應的字母出現 $k/2+1$ 次; 如果從別的陸地出發, 則該字母出現 $k/2$ 次。

13. 現在, 歐拉可以給出他的法則了:

(1) 設各塊陸地用 A, B, C 等等代表。

(2) 取橋的總數 Λ, 將 $\Lambda+1$ 寫在下面要作的表的上方。

(3) 表的第一列列出字母 A, B, C 等等; 第二列寫下通往各該地區的橋數。

(4) 在對著偶數的字母上打星號。

(5) 如果橋數 k 爲偶數, 則取 $k/2$ 對應記入第三列; 否則, 取 $(k+1)/2$ 對應記入第三列。

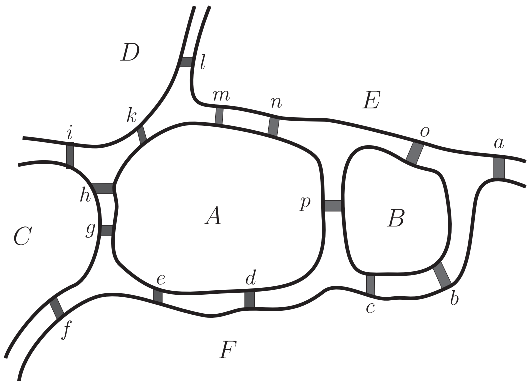
(6) 將第三列各數加起來, 如果這和數$=\Lambda$, 則所要求的路線可以作出, 但必須要從帶星號的地區出發; 如果這和數$=\Lambda+1$, 則所要求的路線也可以作出, 但必須要從不帶星號的地區出發。

14. 作爲上述法則的應用, 歐拉舉了一個 4 條河, 2 個島和 15 座橋的例子 (圖4), 右邊給出的是它的解答。

第三列的數加起來, 得到和數 16, 與頂上的數 16 相同, 所以這路線是能實現的, 但按照法則要從不帶星號的地區 D 或 E 開始。歐拉確實給出了這樣的一條路線:

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD,$$

其中夾在大寫字母之間的小寫字母指出了過的是哪些橋。



		16
A^*,	8	4
B^*,	4	2
C^*,	4	2
D,	3	2
E,	5	3
F^*	6	3
		16

圖4

15. 這裡, 我們再一次感受到了一位數學大師的思想魅力。歐拉並沒有滿足於給出了一個一般的解答。他想到還有沒有可能用更簡單的方法來判斷呢? 歐拉以他特有的對於數字的洞察力看出, 表中第二列的各數加起來一定是實際橋數的二倍 (這一結論現今在圖論中稱爲“圖論第一定理”或“握手引理”, 有時也被冠以“圖論基本定理”的名稱)。因此, 如果這些數裡有奇數的話, 奇數的個數一定是偶數。據此, 歐拉通過對表的分析得到了下列更簡便的法則:

(1) 如果通奇數座橋的地方不止兩個, 則滿足要求的路線是找不到的。

(2) 如果只有兩個地方通奇數座橋, 則可以從這兩個地方之一出發, 找出所要求的路線。

(3) 如果沒有一個地方是通奇數座橋的, 則無論從哪裡出發, 所要求的路線總能實現。

這最後一條就是圖論中現在所稱的“歐拉定理”的最初形態。至此, 歐拉最初爲自己提出的有關任意一個河道圖與任意多座橋的一般問題就獲得了完全的解答。且慢, 作爲純粹數學家的歐拉已經解決了解的存在性問題, 而作爲應用數學家的歐拉還要告訴我們如何把一個解構造出來。就在歐拉的這篇論文的最後一段, 對於已經確定存在所要求的路線 (現在稱爲歐拉路) 的問題, 他給出了一種具體求出這樣一條路線的方法。

16. 據說, 法國數學家拉普拉斯曾向他的學生們呼籲: “讀讀歐拉, 讀讀歐拉, 他是我們所有人的老師。”[4] 當我們沿著歐拉解決七橋問題的思想路線作了這樣一次散步之後, 對於拉普拉斯的這句話是不是有了更深的理解呢? 如果學生們瞭解到像歐拉這樣的大數學家, 在數學研究中也曾有過疏忽甚至失誤時, 他們是否會覺得數學不再是聰明頭腦的專利, 而獲得一些學習數學的自信心呢? 事實上, 歐拉在這裡給出的一些結論, 如“歐拉定理”都是歸納得到的, 並沒有給以嚴格的證明。這種缺乏精確性的做法在18世紀的數學家中相當普遍, 甚至連歐拉也曾作過

[4] 這句著名的話的出處已無從可考, 據[10], 448, 最接近的來源是義大利數學史家利波里 (G. Libri) 在1846年所寫的一篇書評。

$1-1+1-1+1-\cdots=1/2$ 這樣的錯誤斷言。歷史告訴我們, 數學中的嚴格性並不是一蹴而就的。反映在教科書中的那些定義和定理的近乎完美的形式有的可能要經歷幾代人的努力才最終達到。假如學生們在學習數學的過程中瞭解了這一點, 是不是會增加一些對於數學的親近感呢? 在這方面, 數學史將可以提供一種有益的補充。

參考文獻

1. Euler, L., Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1736, 8:128-140. 英譯文見 [11], 3-8. 中譯文見 [12], 617-624.
2. Wilson, R. J. An Eulerian trail through Königsberg, *Journal of Graph Theory*, 1986, 10:265-275.
3. 羅素, 論歷史, 何兆武等, 譯. 北京: 三聯書店, 1991.
4. Katz, V. J., *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1998. 中譯本: 數學史通論. 李文林等, 譯. 北京: 高等教育出版社, 2004.
5. Barabashev, A. G., In support of significant modernization of original mathematical texts (in defense of presentism), *Philosophia Mathematica* (3), 1997, 5: 21-41.
6. 李文林, 古爲今用的典範–吳文俊教授的數學史研究, 收入: 林東岱, 李文林, 高小山, 數學與數學機械化, 濟南: 山東教育出版社, 2001: 49-60。
7. 李文林, 數學史概論, 第二版, 北京: 高等教育出版社, 2002。
8. Bell, E. T., *Men of Mathematics*, 2vols. Melbourne-London-Baltimore: Penguin Books, 1953。中譯本: 數學大師–從芝諾到龐加萊, 徐源, 譯. 上海: 上海科技教育出版社, 2004。
9. 程釗, 邏輯代數的產生, 博士論文, 北京: 中國科學院數學與系統科學研究院, 2001。
10. Grattan-Guinness I., *On the recognition of Euler among the French*, 1790-1830, 收入: Bradley, R. E, Sandifer, C. E. and Leonhard Euler, *Life, Work and Legacy*, Amsterdam: Elsevier, 2007: 441-458.
11. Biggs, N. L., et al., *Graph Theory*, 1736-1936, Oxford: Clarendon Press, 1986.
12. 李文林 (主編), 數學珍寶, 北京: 科學出版社, 1998。

—本文作者任教北京化工大學理學院—