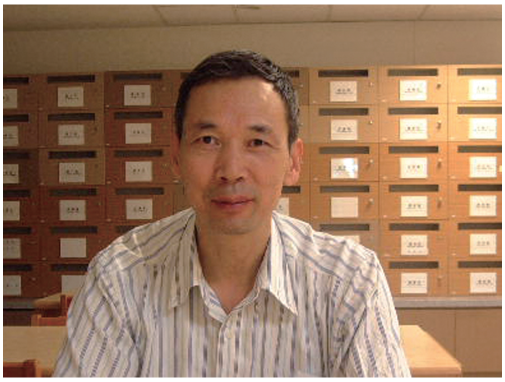
數學傳播 36卷4期, pp. 15-38

表示，隨處可見



演講者：席南華教授
時　間：民國 101 年 10 月 1 日
地　點：天文數學館 202室
整　理：陳麗伍

介紹 (中央研究院數學研究所許健明研究員):「醉月湖講座」是中央研究院數學研究所與臺灣大學數學系合辦的講座, 今天是第一場, 之將會有一系列的演講。這第一場由席南華教授主講, 他是中國科學院數學與系統科學研究院的院士, 演講題目是「表示, 隨處可見」。讓我們歡迎席教授。

頁

謝謝, 很榮幸能夠在中研院數學所和台大數學系聯合舉辦的醉月湖講座給一個報告。這是我第一次看到數學講座有這麼美的一個名稱, 爲了體會這一點, 這些天我很仔細的欣賞了醉月湖, 它的美, 它的韻味和它的意味深長的含意等, 都讓人印象非常深。我想這個報告有一個這麼美麗的題目, 可能會在傳播數學上有出奇不意的效果。

感謝席南華教授同意本刊刊載他於醉月湖講座的講稿。本文下方註解爲本刊所加, 非原稿所有, 希望能方便讀者閱讀。
建議讀者參看本刊第 36 卷第 1 期有朋自遠方來 David Vogan 教授專訪。

今天要講的是「表示, 隨處可見」。這個術語在台灣是「表現」, 我還是習慣用表示。「表示」應該說我們都聽過, 但也許不大瞭解它, 其實它在國際上是非常熱門的一個研究方向。不過, 不管是在大陸, 還是在台灣, 它的聲音都比較微弱。有時候, 可能是不識廬山眞面目, 有時候可能更糟糕, 不但不識眞面目, 連廬山在哪裡都不知道。實際上, 表示在數學裡是隨處可見的, 比方說, 我們熟悉的多項式環, 在分析裡面的平方可積函數空間, 包括在幾何或者拓樸裡面的同調群、K-群等等裡面都有非常豐富的表示論的結構。

讓我們看一下 I. M. Gelfand[1]是怎麼說的, Gelfand 說「所有的數學就是某類表示論。(All of Mathematics is some kind of representation theory.)」Gelfand 是非常了不起的數學家, 在上個世紀後半葉能和他相提並論的人很少, 他的研究領域非常廣泛, 也非常的深刻, 可以從他三大卷的論文選[2] 裡面看得到。他的論文集的第二卷就是專門談表示論的。我想從亞馬遜網站買這一本書的時候, 發現已經售罄, 側面說明了表示論在國際上非常熱門。對於他在表示論中的地位和貢獻, 他的學生 A. Kirillov[3]毫不含糊地在第二卷的序言中寫道: 表示論是如此地幸運, 吸引能力高強如 E. Cartan[4], H. Weyl[5], Harish-Chandra[6], A. Weil[7], R. Langlands[8]和 P. Deligne[9]等數學家, 但即便在這樣的情況下, 就研究方法的廣度、深度及結果的漂亮而言, 他們沒有一個人可以和 Gelfand 相提並論。不知是有意還是無意, Kirillov 沒有提到另一個表示論專家 G. Lusztig[10]。

這樣一位偉大的數學家說出這樣一句話, 是非常耐人尋味的一件事情, 我們怎麼理解這句話?

我們先來解讀一下術語。在中文裡面是“表示”, 在日語和包括在台灣這邊用的是“表現”, 英語就是 “representation”。我們看一下英語的詞根是 “presentation”, 有呈現的意思, 前面的“re”有再現的意思。那看一下中文裡, 我們的習慣用法是什麼? “你應該有所表示。” “他這個人的表現眞不好。” 仔細體會一下就會發現, 實際上這個“表現”的翻譯, 就是台灣和日語所用的, 是更貼近英文原來的意思。這樣理解後我們就會發現表示其實就是把一個對象的某種性質或是結構再現於另一個對象上。這有點類似於佛教裡面的一個觀點, 萬物都由表相構成, 不過這個觀

[1]Izrail Moiseevich Gelfand (1913∼2009), 猶太裔數學家, 對許多數學領域都有重要貢獻, 包含群論, 表示理論, 泛函分析等。

[2]Gelfand, Izrail M.; Gindkin, S. G.; Guillemin, V. W.; Kirillov, A. A.; et. al., eds., *Collection Papers.* Vol I, II, III, 由 Springer-Verlag 出版。

[3]Alexandre Aleksandrovich Kirillov (1936∼), 蘇維埃與俄羅斯數學家, 以表現理論, 拓樸群和李群的工作爲名。

[4]Élie Joseph Cartan (1869∼1951), 法國數學家, 奠定了李群理論及其幾何應用方面的基礎, 對數學物理, 微分幾何, 群論做出重大貢獻。

[5]Hermann Klaus Hugo Weyl (1885∼1955), 德國數學家與理論物理學家, 研究工作在理論物理和純數學領域都有同樣傑出的貢獻, 是二十世紀最有影響力的數學家之一。

[6]Harish-Chandra Mehrotra (1923∼1983), 印度數學家, 爲表現理論奠下基礎, 特別是半單李群的調和分析。

[7] André Weil (1906∼1998), 法國數學家, 在數學許多領域都做出實質的貢獻, 是二十世紀最有影響力的數學家之一。

[8]Robert Phelan Langlands (1936∼), 加拿大數學家, 以 Langlands program 最廣爲人知。

[9]Pierre Deligne (1944∼), 比利時數學家, 1978年獲菲爾茲獎, 以在 Weil 猜想的研究工作最廣爲人知。

[10]George Lusztig (1946∼), 羅馬尼亞裔美籍數學家, 2008年以在表現理論的貢獻獲頒 Leroy P. Steele Prize 的數學終身成就獎。

點當然是太廣泛了。在數學上來說, 理解起來要簡單一點。比方說, 實數上的一個函數, 可以把它看成是實數的一個表示。但在數學來講, 還有一個更明確的涵義, 也就是 *把一個對象的代數結構再現於一個由線性變換或矩陣構成的具體對象上。* 表示論關注的代數結構有什麼呢? 有群、代數、李代數包括李超代數等等, 這是表示論最主要關注的代數結構。

有了這些之後, 我們就可以給表示論一個非常明確的涵義, 因爲代數結構是由運算確定的。兩個數學對象一般是通過映射建立它們的聯繫, 保持運算的映射反映結構之間的聯繫, 這就成了一個同態 (homomorphism)。「表示」就是一個同態, 是一類非常特殊的同態, 它的目標對象由線性變換組成。

1. 表示論的大致劃分

表示論大致分成三部分: 群的表示理論, 代數的表示理論和李代數的表示理論。對一個線性空間的可逆性變換來講, 在映射的合成下你知道它成爲一個群。所以群表示很簡單, 就是從一個群到線性空間的可逆線性變換的全體構成的群的群同態:

$$\text{群} \xrightarrow{\text{群同態}} \{\text{線性空間的可逆線性變換}\}$$

一個線性空間變換的全體有加法、乘法, 以及它和基域的乘法, 成爲一個代數。代數的表示就是從一個代數到這個線性空間的線性變換構成的代數的代數同態:

$$\text{代數} \xrightarrow{\text{代數同態}} \{\text{線性空間的線性變換}\}$$

通過這個線性變換可以又導出一個李代數結構, 所以這個李代數的表示就是從一個李代數到這個線性空間的線性變換構成的一個李代數的同態:

$$\text{李代數} \xrightarrow{\text{李代數同態}} \{\text{線性空間的線性變換}\}$$

這就是表示論很重要的三部分, 這三部分互相有聯繫, 不過具體研究時的方法差別很大。

如果用線性空間的維數來劃分, 分成兩類。一類是有限維, 還有一類是無限維。如果線性空間的維數有限, 相應的表示稱爲有限維表示。有限維的線性變換可以通過矩陣表達。所以, 對有限維來講, 表示的另一個形式就是:

群表示:

$$\text{群} \xrightarrow{\text{群同態}} \{\text{某個域上的 } n \text{ 個可逆方陣}\}$$

代數表示:

$$\text{代數} \xrightarrow{\text{代數同態}} \{\text{某個域上的 } n \text{ 階方陣}\}$$

李代數表示:

$$\text{李代數} \xrightarrow{\text{李代數同態}} \{\text{某個域上的 } n \text{ 階方陣}\}$$

對同一個東西, 代數表示和李代數表示好像是一樣的, 但是運算的結構是不一樣的。代數表示是用矩陣的乘法, 李代數表示用李方括號。如果 X, Y 是某個域上的 n 階方陣, 李方括號運算定義為 $[X, Y] = XY - YX$。不同的運算導出的結構很不一樣。

2. 表示的例子

2.1. 一維的情形

讓我們看一些例子, 通過例子可以讓我們對表示有更深刻的理解。

最簡單的情形當然是一維的表示, 也就是線性空間是一維。這時候的群同態非常的簡單, 就是群到這個域的非零元全體一個同態而已。這樣一個表示也稱為群的特徵 (character)。

$$\text{群} \xrightarrow{\text{群同態}} \{\text{某個域的非零元}\}$$

舉例來說, 在線性代數中非常熟悉的一個情況就是行列式, 它實際上就是一個特徵。想想看, 對一個矩陣來講, 取它的行列式, 如果兩個矩陣相乘, 那麼它的行列式就等於兩個矩陣的行列式相乘, 所以是保持乘法, 而且會把單位矩陣映到 1, 所以它是一個群同態, 這個行列式就是一個特徵。

$$GL_n(F) \to F^*, \qquad A \to \det A.$$

其中 F 是域, $F^* = F - \{0\}$ 是 F 中的非零元全體, $GL_n(F) = \{F\text{上的 } n \text{ 階可逆方陣}\}$。這些在學習高等代數的時候就知道了。

其它很多一維的例子來自數論。比方說, 數論中的二次互反律, 它中間出現的 Legendre 符號 $(\frac{x}{p})$ 就是階為 $(p-1)$ 的循環群的一個特徵。二次互反律在數論中非常的重要, 是數論中的一顆珍珠, 高斯[11]在 21 歲的時候就證明了, 寫在他的很有名的《算數研究[12]》中, 這本書在 1801 年發表, 那時候他 24 歲, 第一個證明就出現在這裡面。

還有一個就是數論中的高斯和。高斯和的數學表達是

$$G(\chi, \sigma) = \sum \chi(x)\sigma(x), \qquad x \in \mathbb{F}_p^*$$

χ 和 σ 分別是加法群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ 和乘法群 $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F} - \{0\}$ 的特徵。

高斯和在數論中也是很有用的, 它對於解多項式同餘方程、證明高次互反律等等都非常重要。

我們看一個分析的例子。

實數上的週期函數本質上是單位圓周 $S = \{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ 上的函數。單位圓周就是模長為 1 的複數, 所以它有乘法群結構, 這也是個緊李群。S 上的平方可積函數全體 H 是希爾伯特

[11]Carl Friedrich Gauss (1777～1855), 德國數學家和物理科學家, 被認為是歷史上最重要的數學家之一, 有「數學王子」的美譽。

[12]Disquistiones Arithmeticae, 1801年出版, 全書由拉丁文寫成。

空間。S 的特徵全體是 $e^{ix} \to e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ 這樣的指數函數。它們構成 H 的標準正交基, 這實際上就是傅立葉分析的全部, 圓周上的每個平方可積函數可以通過標準正交基展開, 這就是傅立葉級數的展開。注意到指數函數 e^{ix} 是微分運算元 $\frac{d}{dx}$ 的特徵函數。所以在這裡可以想到, 群表示和微分方程有很密切的聯繫, 實際上也確實如此。

2.2. 模 (module) 的語言

在繼續往下走之前, 先介紹高維的情況下使用的另一種語言, 模的語言。我們再看一下表示的三個部分, 它有一個代數結構 A, 另外非常重要的一點是同態, 還有一個是線性空間 V 上的一些線性變換。在這種情況下我們稱 V 爲一個 A 模, 也稱爲 A 的表示。當然這樣是簡單化了, 因爲在這邊最重要的是同態, 它說明這個代數結構 A 裡面的元素是線性地作用在這個線性空間 V 上, 所以最關鍵的是定義於其上的線性作用, 因爲同樣的線性空間, 如果給不同的作用, 會有不同的表示。

利用模的語言來談高維的情形就比較容易。

2.3. 高維的情形

例: V 是 $GL(V)$ (V的可逆線性變換全體) 的模

在一個線性空間 V 上, 它的可逆線性變換全體叫做 $GL(V)$, 這是一個群。恆等映射 $GL(V) \to GL(V)$ 當然是 $GL(V)$ 的一個表示。用模的語言來說, 因爲 $GL(V)$ 自然地線性作用在 V 上, 這時候 V 就成爲這個群的一個模。用模的語言可以很容易地看到 $V \otimes V$ 也是 $GL(V)$ 的模, 做更多張量積 $V^{\otimes n}$ 也會得到一個模的結構。所以模是非常方便的語言, 你可以通過模的語言構造很多新的模, 構造很多新的表示, 這些表示常常是非常有趣的。這本身可以很簡單, 但經過張量積後, 就像分析裡面疊代之後會產生非常複雜的現象, 也就是做張量積之後, 這個模的表示可以是非常複雜的。通過一個李群, 經過微分之後, 會得到李代數的表示。李群的表示和李代數的表示的關係非常密切, 如果維數有限且 V 是複數域的線性空間。

例: 多項式環 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 是 $GL_n(F)$的模

我們在開始的時候提到, 在多項式環中有著非常豐富的表示結構。以多項式環爲例, 可逆 n 階方程的全體, 構成一個群。它可以作用在這個多項式環上, 怎麼作用? 假設線性空間維度是 n 維, 如果這個群可以作用在線性空間上, 就可以作用在多項式函數上, 所以就可以作用在多項式環。當然也可以直接了當地把它看成是這個線性空間的一組基, 作用在這個上面, 再延拓到整個多項式環上。所以能得到很多不同方式的作用。

例: 多項式環 $F[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{n,n-1}, x_{nn}]$ 是 $GL_n(F)$ 的模

對 n 平方個不定元來講也同樣能夠在這上面定義群的作用。該怎麼定義呢? 先把這些不

定元 x_{ij} 組合成一個矩陣, 把群的元素和這個矩陣相乘, 就會得到這些 x_{ij} 的線性變化, 再把它延拓到整個多項式環, 也可以把這些看成 n 階方陣全體的線性空間的坐標函數, 這樣一來可以通過它作用在多項式環上面, 所以有好幾種方式可以作用, 都是些很自然的表示。

現在對這些表示的研究已經有很多年了, 包括很有名的 Schur-Weyl Duality 定理, 以及 Hermann Weyl 有名的《古典群[13]》裡面的內容等等。雖然研究了很多年, 但是對這些表示我們有很多問題並不清楚。如果把這些問題弄清楚, 有很多重要的問題就可以解決了, 可是現在做不到這一點。

接下來看的是幾何的例子。

例: 李群在單位元的切空間 (tangent space) 是該李群的表示, 稱爲李群的伴隨表示。

如果挑出李群一個最重要的表示, 毫無疑問的首選就是這個伴隨表示。就像一條曲線, 它的切線對理解這個曲線非常重要, 或者對流形 (manifold) 來說, 切叢 (tangent bundle) 對理解流形非常重要。所以這個切空間對理解李群來說, 也是極其重要, 它可以引進根系 (root system) 等等, 而根系對研究李群的結構和表示的重要性怎麼強調都不爲過。

下一個例子來自拓樸。

例: 上同調群 $H^i(X,\mathcal{L})$ 是 $GL_n(\mathbb{C})$ 模。

X: 旗流形 (flag manifold)

其元素是 $\mathbb{C}^n$ 的子空間鍊

$$V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_n=\mathbb{C}^n,\quad \dim V_i=i$$

$\mathcal{L}$: X 上的全純線叢 (holomorphic line bundle)

n 維複空間所有的子空間鍊的全體有一個很好的流形的結構, 稱爲旗流形。這個流形在代數幾何和李群的研究上非常重要。在這上面如果考慮將一個全純線叢換成全純向量叢 (vector bundle), 用在同調群上, 會有剛才一般線性群的作用在上面, 也就是說它成立一個表示, 它成爲一個模, 這是一個非常有意思的模。這個上同調群什麼時候爲零, 什麼時候不爲零, 不爲零的時候它的模結構如何, 都是非常有意思的問題。這種情況下, 有名的 Borel-Weyl 定理告訴你什麼時候爲零, 不爲零的時候它是怎樣的結構等等。

接著看一下無窮維的例子。不舉複雜的例子, 就舉個很簡單的例子, 2×2 的複矩陣並且要求行列式爲 1, 然後我們再看 $L^2(G/\Gamma)$ 是它的平方可積函數空間, 這個空間是無限維的, 在這上面我們可以定義很多表示的結構。通過這個平方可積函數空間, 可以構造多個表示。比方說對李群來說, 考慮它的一個離散子群, 並要求商空間 G/Γ 的體積是有限的, 這時候可以考慮上面的平方可積函數。G 通過右乘作用作在商空間 G/Γ 上, 從而線性作用在其平方可積空間

[13]H. Weyl, The Classical Groups, 1939年由 Princeton University Press 出版。

$L^2(G/\Gamma)$。所以 $L^2(G/\Gamma)$ 是 G 的表示。這個表示在數論跟表示論中非常重要。這裡有一個著名的 Selberg 跡公式 (trace formula), 它不僅用在數論和表示論中, 還用在物理上。

說到物理, 就舉一個物理的例子。在單粒子模型中, 單電子的軌道波函數生成正交群 $SO(3)$ 的表示, 它的自旋波函數生成酉群 $SU(2)$ 的表示。物理學家用 $SO(3)$ 的十維表示, 他們當時找到了九個粒子, 認爲如果有 10 個粒子就構成了十維的表示。於是, 他們預言 Ω-粒子的存在, 這件事情在 1964 年被實驗證實。

目前爲止有群的表示和李代數的表示, 但是還沒談到代數的表示。我們舉個例子來談代數的表示。但是路徑代數有點複雜, 用箭頭表示會簡單一點。我們有下面這個圖, 有 n 個頂點, 相鄰的兩點間有一個方向, 這樣的圖就成爲一個箭圖, 英文也是 Quiver。

箭圖 Γ

$$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & n-1 & & n \end{array}$$

Γ 的表示就是一組向量空間和映射: 對每一個頂點給一個線性空間 V_i, 每一個方向 (箭頭) 給一個線性變換 $f_j : V_j \to V_{j+1}$, 這一組集合就成爲箭圖的表示。V_i 實際上是路徑代數 (path algebra) $F[\Gamma]$ 的表示。路徑代數是代數中非常重要的一類, 採用箭圖表示這個形式, 因爲用這個形式研究起來更爲方便。這是形式爲內容服務的一個很好的例子。這個表示跟量子學的發展有意想不到的聯繫, 我們後面還會談到這一點, 它對量子學的發展有非常大的啓示。

3. 表示論的基本思想及基本問題

我們對術語有了精細的解讀, 也看了一些基本例子。由這些我們可以看出表示論的基本思想有兩點: 一個是對稱, 一個是線性化。

代數結構反映了對稱性, 這要怎麼理解。用正方形和圓來講, 正方形很對稱, 圓比它更對稱。這從代數結構的角度會比較容易理解, 以群來說, 保持圓不變的群要比保持正方形不變的群大得多。把圓和正方形放到二維實空間上, 中心與原點重合, 過原點的反射和旋轉都能保持這個圓不變, 是可逆性變換, 它們全體在映射合成下封閉, 於是成爲一個群。但是, 想保持正方形不變的例子就很少, 正方形不變的反射只有兩個, 旋轉只有四個, 比圓要少得多, 從代數結構上可以看出圓的對稱性比正方形要好得多。所以代數結構的表示, 給出了代數結構的線性化, 也反映了相關線性空間的某種對稱性。這是互惠互利的, 通過表示在線性空間得到一種對稱, 反過來說, 在線性空間對稱的, 對研究代數結構也非常有幫助。

3.1. 表示論的基本問題

既然在數學中這麼廣泛的存在些表示, 而且非常的有意思, 把它們彙集起來作爲一個數學

理論來研究, 會產生一些很自然的問題:

- 什麼樣的表示是最基本的,
- 一般的表示如何從最基本的表示構建,
- 如何構造最基本的表示,
- 最基本的表示的性質, 如分類、維數、特徵標等,
- 一些自然得到的表示的性質, 等等

大致說來表示論就是要研究這些問題。

3.2. 最基本的表示

因爲時間的限制, 只針對第一個問題做探討。我們需要一個概念“子表示”。

假設現在有一個代數結構 A (如群、李代數等), 還有一個線性空間 V。如果 V 有一個子空間在 A 所產生的線性變化之下都是不變的, 這樣的子空間就是 V 的子表示。

舉一個很簡單的例子:
$V=\mathbb{C}^n$ 是對稱群 S_n 的表示, $\{(a,a,\ldots,a)\mid a\in\mathbb{C}\}$ 是 V 的子表示:

$\mathbb{C}^n$ 中的點經過 S_n 作用後, 也就是掉換順序之後還是 $\mathbb{C}^n$ 的元素。$\mathbb{C}^n$ 的坐標裡面是有順序的, 這些順序是可以調換的, 因爲不管如何調換都還是這個線性空間中的元素。而每個坐標都一樣, 不管怎麼換怎麼排都是同樣的元素, 毫無疑問地這樣的元素所組成的空間就是對稱群的子表示, 因爲它在對稱群的作用下是不變的。

最基本的表示是什麼? 最基本的表示就是不可約 (irreducible) 的表示, 也稱爲單表示 (simple representation)。如果一個表示除了零空間和自身以外, 沒有其它的子表示, 這樣的表示就稱爲不可約表示, 當然也是我們認爲最基本也是最簡單的, 就像自然界中的原子一般。

最簡單的不可約表示是一維的表示。一維表示除了零空間和自身外不可能有其它的不變子空間, 所以是不可約表示。

表示可以很簡單, 也可以很不簡單。

另外一個例子是我們剛才提到的線性空間 V, 它是 $GL(V)$ 的不可約表示。怎麼證明呢? 通過可逆線性變換可以把 V 中的一個非零元變到任何一個非零元, 所以作爲 $GL(V)$ 的表示, V 除了零空間和自身以外不可能有其它不變的子空間, 所以 V 是個不可約表示。對李代數來說, 也是一樣。V 是李代數 $gl(V)$ (V的線性變換全體) 的不可約表示。

前面提到多項式環 $F[x_1,\ldots,x_n]$ 是一般線性群 $GL_n(F)$ 的表示。假設 F 是複數域 $\mathbb{C}$, 把次數爲 i 的 n 元齊次多項式拿出來就得到一個線性空間, 也就是這個群的不可約表示。這是一件很有意思的事情。如果把它限制到行列式爲 1, $n=2$ 的時候, 可以得到所有的不可約表示。這是歷史上, 研究李群、李代數時所得到的第一個不可約表示。

跡 (trace) 爲零的複 n 階方陣全體記作 $sl_n(\mathbb{C})$。在矩陣中, 共軛 (conjugate) $A \to gAg^{-1}$ 是常用的運算。把跡爲零的矩陣全體成爲一個李代數, 通過共軛作用, 跡不變, $GL_n(\mathbb{C})$ 作用在 $sl_n(\mathbb{C})$ 上, 這時候就得到一個表示 $sl_n(\mathbb{C})$, 這個表示是不可約的。再擴充一些, 仍然通過共軛, $GL_n(\mathbb{C})$ 作用在所有矩陣 $gl_n(\mathbb{C})$ ($n \times n$ 複矩陣全體) 上, 這兩個差別只有一維, 但 $gl_n(\mathbb{C})$ 就不是 $GL_n(\mathbb{C})$ 的不可約表示。這是因爲純量矩陣全體是一維的子表示。同樣的, 只要 V 不是一維的, 張量積 $V \otimes V$ 不是 $GL(V)$ 的不可約表示。

對無限維的空間, 我們的群很小, 空間很大, $L^2(\mathbb{C})$ 卻是 $\mathrm{S}L_2(\mathbb{C})$ 的不可約表示, 實際上有無窮多個不可數的 $\mathrm{S}L_2(\mathbb{C})$ 的不可約表示結構。這個後面會提到。

要研究表示之間的聯繫, 就像研究代數結構一樣, 也是通過同態和同構 (isomorphism) 這樣的概念。兩個 A 的表示 U, V, 它們之間的一個線性映射 $\psi : U \to V$, 如果這一個線性變換能夠保持代數結構中 $\phi(au) = a\phi(u)$, $u \in U$, $a \in A$, 這種線性變換就稱爲同態。如果這個同態有逆, 並且這個逆也保持代數結構的作用, 這兩個表示就被稱爲同構 (isomorphic) 。這是很自然的概念。同構的表示看起來就像同一個模子中倒出來的東西, 是一樣的。

針對不可約表示, 有一個很漂亮的引理:

Schur**引理**: 不可約表示之間的非零同態是同構。

這個引理看起來很簡單, 證明也很簡單, 但在表示論中非常重要。比如說在緊李群的情況下, 兩個不可約表示, 它們之間隨便給一個映射, 因爲兩個線性空間總是能給映射的。給了映射後, 它當然不一定是表示的同態, 因爲不一定能保持群的作用。但是, 因爲是緊的, 所以可以通過積分來做平均, 平均之後得到兩個表示之間的同態。這個同態根據 Schur 引理, 只能是零或同構。是零的話, 可以得到很多資訊; 是同構的話, 同樣也能得到很多資訊。從這個引理, 如果是不同構的話, 很容易得到表示之間的正交關係。做數學能夠得到這麼漂亮的引理, 一生做一個就夠了。

3.3. 不可約表示的分類

接著看不可約表示的分類。分類的問題可以非常簡單, 也可以非常複雜, 而且分類常常取決於表示的基域是什麼。當我們考慮有限群並且基域是複數域, 有以下這個很漂亮的定理。這個定理是一百多年前證明的, 現在還是表示論的基石定理。

定理: 對有限群, 如果表示空間是複線性空間, 則:

1. 不可約表示的個數等於有限群的共軛類的個數;
2. 每一個表示都是不可約表示的直和;
3. 不可約表示的維數的平方和等於該有限群的階。

儘管如此, 特徵標的資訊等等, 對分類來說資訊還是非常模糊。隨便給一個群要判斷它的不可約維數其實是很困難的。但對一些比較特別的群, 例如一般人很熟悉的正交群, 可以得到的資訊要清楚得多, 下面舉對稱群爲例。

例: 對稱群

- 對稱群 S_n 的複不可約表示的個數是 n 的劃分數 (partition number) $P^{(n)}$。
- 不可約表示的維數可以計算。
- 如果表示空間的基域 F 的特徵 $p \leq n$, 不可約表示的分類已知。
- 但其它的性質所知甚少, 如維數等, 更不用談特徵標, 到現在這還是一個非常重要的問題。讓大家想不到的是, 這個非常單純的代數的表示論的問題, 與無限維李代數和幾何空間的起點, 都有很深刻的聯繫。

接著看一下之前的單位圓周的不可約表示的分類。因爲這是一個拓樸群, 所以一般只考慮酉表示 (unitary representation), 也就是說, 要求表示空間是希爾伯特空間, 群通過有界的酉運算元 (unitary operator) 作用在表示空間上。

定理: 單位圓周 S

$$\begin{aligned}\{S \text{ 的不可約酉表示}\} &\xleftrightarrow{1-1} \mathbb{Z}\\ e^{inx} &\xleftrightarrow{1-1} n\\ \{\mathbb{Z} \text{ 的不可約酉表示}\} &\xleftrightarrow{1-1} S\end{aligned}$$

這樣的性質下, 圓周的不可約酉表示是和整數 $\mathbb{Z}$ 一一對應的。這個對應很簡單, 我們剛才提到的特徵 $\mathbb{Z}$ 就對應到 n。但反過來, 是很有意思的。將 $\mathbb{Z}$ 視爲一個離散群, 它的不可約酉表示和 S 是一樣的。對每個圓周上的數來說, 給 e^{inx} 就夠了。所以這就有一個對偶, 更通俗的說就是龐德列亞金對偶 (Pontryagin duality)。對局部緊的連通交換拓樸群, 它的不可約酉表示是離散交換拓樸群, 離散交換拓樸群的酉表示全體就是原來的交換拓樸群。這就是交換拓樸群中非常有名的龐德列亞金對偶。龐德列亞金[14]也是位很讓人敬佩的數學家, 他 14 歲失明, 憑著頑強的毅力在數學裡面做出了很多很重要的工作。他有一本書《連續群》, 這書有中譯本。另外在微分拓樸中, 龐德列並金示性類 (characteristic class) 也是非常重要的一類。

Hermann Weyl 對李群表示的工作影響非常深遠, 他和他的學生 F. Peter 的 Peter-Weyl 定理更是個經典。

[14]Lev Semenovich Pontryagin (1908∼1988), 俄國數學家, 在很多數學領域作出了巨大的貢獻, 包括拓撲學更爲幾何的部分。

Peter-Weyl**定理**: 對緊李群 G:

1. 有限維酉表示的矩陣係數 (matrix coefficient) 張成的子空間在 $L^2(G)$ 中稠密。
2. 每個複不可約表示都是酉表示, 且維數有限。
3. 每個酉表示都是完全可約的。
4. 每個不可約酉表示在 $L^2(G)$ 中出現的重數等於該表示的維數。

所以 $L^2(G)$ 這個空間就有點類似於之前提到的有限群的群代數空間。在那個群代數中也是同樣的情形, 每個不可約表示出現的重數都是該表示的維數。

Hermann Weyl 還有另一個非常了不起的 Weyl 定理, 是有關緊連通半單 (compact connected semi-simple) 李群的不可約表示的特徵標公式。這個特徵標公式對後來數學的影響非常大。

我們繼續往下看表示的分類。之前提過的一般線性群, $GL_n(\mathbb{C})$ 的表示內容非常豐富。剛剛提到過在多項式環中有很多問題還沒弄清楚, 對一般線性群, 它的不可約表示有很好的分類結果。我們不看無限維表示, 只看有限維不可約表示。複數域上的一般線性群, 它的有限維不可約表示的同構類和 n 重整數組是一一對應的, 在這些數組中, 前一個分量不小於後面的分量。

定理:

$$\{GL_n(\mathbb{C}) \text{ 的有限維不可約表示}\}$$
$$\updownarrow 1-1$$
$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z} \mid a_i \geq a_{i+1}\}$$

它的不可約表示特徵標包括維數, 也是由 Weyl 特徵標公式得到。Weyl 特徵標公式是針對緊李群的, 在這邊也可以被運用, 這就是有名的酉技巧 (unitary trick)。換句話說, 一般線性群 $GL_n(\mathbb{C})$ 的不可約表示限制在酉群上也是不可約的。因爲這個技巧, 建立起表示論研究與緊李群和半單代數的聯繫。

當我們用李群 $GL_n(\mathbb{C})$ 對單位元做切空間就得到李代數 $gl_n(\mathbb{C})$。自然地, 由一個李群的表示就可以得到一個李代數的表示。所以, 一般線性群 $GL_n(\mathbb{C})$ 的有限維表示通過微分給出李代數 $gl_n(\mathbb{C})$ 的有限維不可約表示的分類。我們有下面的定理:

定理:

$$\{gl_n(\mathbb{C}) \text{ 的有限維不可約表示}\}$$
$$\updownarrow 1-1$$
$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n\}$$

由於它跟李群之間的關係, 所以可以知道它不可約表示的特徵標包括維數都是由 Weyl 的特徵標公式給出。

一個線性空間 V 上的線性變換全體記作 $\mathrm{End}(V)$, 這是一個代數, 也有相應的李代數結構。如果不考慮李方括號, 僅考慮一般的矩陣乘法, 會得到一個矩陣代數 $M_n(F)$(F上的 $n\times n$ 全體), 也作用在 $\mathrm{End}(V)$ 上。毫無疑問 V 是它的不可約表示, 這裡出奇簡單, 因爲對這個代數而言, 只有這麼一個不可約表示 V。在有限維情形可以用矩陣的語言來形容, 也就是對矩陣代數而言, 不可約表示只有一個, 是 n 維的。這個情況下它是單代數, 因爲只有一個不可約表示。$\mathrm{End}(V)$ 是一個單代數, 同樣, $M_n(F)$ 的不可約表示只有 n 維線性空間 F^n。

這裡可以看到如果一個集合賦予李代數的運算結構, 也就是乘法是方括號運算, 而不是一般的矩陣運算, 即便是有限維表示, 內容也豐富的多, 所以運算對代數結構有很大的影響, 同時也可以看到和代數相比, 李群和李代數的表示理論內容更爲豐富和複雜, 與其它數學分支的聯繫也更深刻。儘管如此, 近幾年來發現代數表示也和其它很多東西有聯繫, 所以還是很活躍。

接著再看一般線性群的不可約表示。現在考慮的基域是 $\mathbb{F}_p$, 其中 p 是一個素數, 它是有限域 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的代數閉包。也就是考慮係數在 $\mathbb{F}_p$ 中的一元多項式, 把所有這些多項式的根放在一起, 就得到 $\mathbb{F}_p$ 的代數閉包 $\bar{\mathbb{F}}_p$, 這是比較簡單的域。$GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的有限維不可約表示的分類與 $GL_n(\mathbb{C})$ 的有限維不可約表示的分類是一樣的, 都對應到一些 n 重數組。

定理:

$$\{GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)\ \text{的有限維不可約表示}\}$$
$$\updownarrow 1-1$$
$$\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n \mid a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_{n-1}\geq a_n\}$$

但它的不可約表示特徵標非常複雜, 到現在爲止都沒有一個完整的答案。這是表示論過去幾十年研究的中心問題; 費了很大的勁把這些和量子群、簇的量子群和仿射李代數等等聯繫起來。有名的 Lusztig 猜想斷言當 p 不太小時, $GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的有限維不可約表示與仿射 Schubert 簇的奇點有關, 目前這個猜想在 p 非常大時已被證明。但是當 p 小於 n 的時候, 對它的不可約表示特徵標到現在連一個猜想都沒有, 裡面的問題還是非常複雜。實際上, 這些問題我也做了很多年, 我自己的一部分工作對這些不可約表示給了很清楚的實現, 在小特徵的時候似乎也能算一些, 能夠做一些別的方法做不到的事情, 但是怎麼樣繼續發展, 一直是件讓我費心的事情, 到現在還沒什麼頭緒。

接下來看一般線性李代數, 剛才我們說它的表示很簡單, 是零, 是完全可約的。但在域 $\bar{\mathbb{F}}_p$ 的情形, 這個完全可約性就沒有了。換句話說, 一個表示不一定是不可約表示的直和。這與特徵零的情形不一樣, 特徵零的時候可以有無限維的表示。但對 $gl_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的情形, 它的不可約表示都是有限維的, 不過分類非常複雜, 與 Springer 纖維有密切的關係, 維數一般情況不清楚。

定理: $gl_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的不可約表示都是有限維的。

這些不可約表示的一部分和之前提到的 $GL_n(\bar{\mathbb{F}}_p)$ 的表示有重合的部分, 重合的這一部分尤其困難。

前面提到的代數的表示用的是箭圖來表示。對這個路徑代數的表示來講, 它的不可約表示分類非常簡單。但是它的不可分解表示卻非常有意思。不可分解表示是代數表示論中非常重要的內容。考慮箭圖 Γ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \circ & \longrightarrow & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 & & & & n-1 & & n \end{array}$$

Γ 在域 F 上有 n 個 (同構意義下) 的不可約表示, 與圖 Γ 的頂點一一對應。對應到第 i 個頂點的不可約表示記作 E_i。如果 $i=j$, 表示 E_i 是 F 自身; 如果 $i \neq j$, 表示 E_i 中對應到頂點 j 的線性空間是 0。E_i 中對應到箭頭的線性映射全是0。可以寫成

$$E_i = (0, \ldots, 0, \underset{i-\mathrm{th}}{F}, 0, \ldots, 0) \quad (1 \leq i \leq n)$$

Γ 在域 F上的不可分解表示有 $n(n+1)/2$ 個, 它和 $n+1$ 階方陣構成的一般線性群 $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ 的正根是一一對應的。

$$\{\Gamma \text{ 的不可分解表示}\} \xrightarrow{\text{1-1}} \{GL_{n+1}(\mathbb{C}) \text{ 的正根}\}$$

這些不可分解表示與正根的聯繫很有意思。當 F 是有限域, 可以構造相應的 Hall 代數。在上個世紀八十年代末, Ringel[15]發現 Hall 代數與量子群有聯繫。這個聯繫導致 Lusztig 發現量子群的典範基 (canonical base)。量子群的典範基, 在表示論中有非常漂亮的應用, 和代數幾何有很密切的聯繫, 當然和數學物理也有很深的關係。因爲量子群是李代數的普遍包絡 (universal covering) 代數的形變, 參數取 1 的時候得到李代數的普遍包絡代數, 所以量子群的典範基也給出了李代數的普遍包絡代數的典範基。很有意思的是, 在李代數的情形下, 到目前爲止還不能通過量子群以外的方法發現典範基, 所以在這裡量子群有非常特別的作用。

我們看看李群無限維的不可約表示的分類。舉一個很簡單的例子, 如 2×2 行列式爲 1 的複矩陣全體 $SL_2(\mathbb{C})$ 這是很小的一個群。

定理: $SL_2(\mathbb{C})$ 的不可約酉表示分類如下:

(a) 平凡表示

(b) 酉主列 $(k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R})$

$$P^{k,iy}$$

[15]Claus Michael Ringel(1937∼), 德國數學家, 研究領域包含代數表現理論, 發現 Hall 代數與量子群有聯繫。

(c) 補充列 C^x, 此處 $0<x<2$

其中僅有的同構關係是

$$P^{k,iy}\cong P^{-k,-iy}$$

群 $SL_2(\mathbb{C})$ 有很多不可約的有限維表示, 除了平凡表示外, 它們都不是酉表示。群 $SL_2(\mathbb{C})$ 的表示主要由酉主列和補充列構成。酉主列中的表示有兩個指標, 一個是整數 k, 另一個是實數 y。

定理: $SL_2(\mathbb{R})$ 的不可約酉表示分類如下:

(a) 平凡表示;
(b) 離散列 $D_n^{\pm}$, $n\geq 2$, 和離散列的極限 $D_1^{\pm}$;
(c) 酉主列: $P^{+,iy}$ 和 $P^{-,iz}$, 其中 y 是實數, z 是非零實數;
(d) 補充列 C^x, 此處 $0<x<1$。

其中僅有的同構關係是

$$P^{+,iy}\cong P^{-,-iy}, P^{-,iy}\cong P^{-,-iy}$$

從這個定理可以看出實李群 $SL_2(\mathbb{R})$ 的酉表示分類與複李群 $SL_2(\mathbb{C})$ 類似, 但複雜些, 多了一個離散列。不論是實李群還是複李群, 不可約酉表示的分類問題還未完全解決, 雖然對有些群已經清楚了。

對不可約表示的分類就說到這裡。

4. 研究方法

下面說一些表示論中的研究方法。前面已經看到, 表示出現在數學中各種不同的方向如代數、分析、幾何, 不可約表示的分類形態各異, 所以研究表示的方法五花八門, 什麼都有。我們來看看這些方法是怎麼用的。

4.1. 代數方法

代數方法是表示理論方法中非常重要的方法之一, 畢竟我們是考慮代數結構之間的線性化。它可以用在哪些地方。用在有限群的表示理論, 李 (超) 代數和李群的表示理論, 代數群的表示理論, 量子群的表示理論, 代數的表示理論等等。下面簡略說明代數方法是如何用的。

對於有限群 G, 域 F, 考慮群代數 $F[G]$, 也就是直接把這個群裡面的元素當成一組基, 乘法是自然的, 加法就是直接了當的加就可以, 這樣得到的就是一個群代數。接著考慮 G 的子群 H, 會考慮哪些問題? 會研究這個群代數的性質, 如半單性, 如何分解成其它更小的模的直和與

誘導表示的性質。也就是通過一個小群的表示, 作張量積 $\mathrm{Ind}_H^G V = F[G]\otimes_{F[H]} V$ 之後, 得到大群的表示。這個大群的表示的性質如何? 是不是不可約? 如果不是, 會有多少不可約的分支等等。這都是非常重要的問題。

另外一個重要的工具就是研究特徵標。表示作線性變換會有跡, 把跡拿出來。對一個線性變換而言, 跡是非常重要的不變量, 是非常重要的一個特徵。這樣得到的函數就稱爲群表示的特徵標。它是非常重要的研究對象。

對李超代數和李群的表示理論也是一樣。李群在單位元處的切空間是李代數, 所以李群的表示自然是其李代數的表示。李代數本身的方括號運算沒有結合性, 這不大方便。爲了彌補這一個缺陷, 構造了一個結合代數, 稱爲李代數的普遍包絡代數 $U(\mathfrak{g})$。研究李群的表示和研究 $U(\mathfrak{g})$ 的表示是一樣的。如果 G 是李群, $\mathfrak{g}$ 是李代數, $\mathfrak{h}$ 是子李代數, 研究普遍包絡代數 $U(\mathfrak{g})$。如同有限群的情形, 我們可以考慮它的誘導表示 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} V = U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{g})} V$ 和特徵標等等, 這些都是可以起很大作用的代數方法, 能夠爲不可約表示帶來很深入的理解。

對代數群和量子群的表示理論, 我們考慮它的坐標環。這裡的坐標環是 Hopf 代數。如果 G 是代數閉域 k 上的代數群, $k[G]$ 是坐標代數。所以如果要得到代數群 G 的有理表示, 要考慮 $k[G]$ 的餘模。一般人剛開始接觸這餘模的結構時都不太喜歡。不過對研究的人來講就不同了, Mumford[16]就覺得餘模是更方便的語言。

如果你對餘模不習慣, 可以考慮 $k[G]$ 的超代數 U_G, 這是一個結合代數。一個有限維空間 V 上的有理 G 模結構等價於 V 上的 U_G 模結構。所以代數方法在這裡同樣非常重要。

量子群是李代數的普遍包絡代數的形變, 所以量子群的表示在很多方面和李代數表示及代數群表示理論部分平行, 從思想到技巧上來講都得到很多借鑑。當然, 代數方法還是代數表示論的主要研究方法。

4.2. 分析方法

分析的方法, 主要用於拓樸群和李群的表式理論。著重在局部緊群。

假設 G 是局部緊的拓樸群, X 是局部緊 Hausdorff 空間, G 連續作用在其上, 且 X 有 G 不變的正測度。拓樸群表示論的一個中心問題是如何分解 $L^2(X)$ 到不可約表示。$L^2(X)$ 是希爾伯特空間, 所以泛函分析在這裡是主要工具。這也可以用在 p 進域 (p-adic 域) 上的代數群的表示理論。假設 G 是 p 進域, 如 $GL_n(\mathbb{Q}_P)$, F 是域, 常用的是複數域。考慮空間

$$C^\infty(G,F)=\{\text{局部常值函數 } G\to F\}$$

它自然是 G 的表示。這也是一個非常重要的表示, 很多研究工作都集中在這個表示上面。

---

[16]David Bryant Mumford (1937∼), 美國數學家, 1974年獲頒菲爾茲獎, 2008年獲頒沃爾夫獎, 研究領域包含代數幾何。

4.3. 微分幾何方法

在表示論中微分幾何方法主要是用於李群的表示理論, 因爲李群是微分流形。假設 G 是李群, H 是其閉子群, 那麼齊性空間 G/H 上的幾何與李群的表示理論關係密切。在歷史上有幾篇很有名的論文, 包括 Borel[17]和 Weil 等人關於示性類和齊性空間上的幾何等等。

4.4. 代數幾何方法

過去幾十年, 代數幾何分法爲表示理論帶來非常大的進展, 在很多方向如代數群的表示理論, 有限群的表示理論, 李代數的表示理論都有突破性的進展。所以也形成了現在非常活躍的幾何表示論。

由於代數群自身是代數簇, 所以代數幾何在代數群的表示論中起重要作用是很自然的事情。我們主要考慮線性代數群。很多我們熟悉的群如一般線性群 $GL_n(F)$, 特殊線性群 $SL_n(F)$, 辛群 $Sp_{2n}(F)$, 特殊正交群 $SO_n(F)$ 等等, 都是線性代數群。這裡 F 是代數閉域, 如複數域 $\mathbb{C}$, 有限域 $\mathbb{F}_P$ 的代數閉域包 $\bar{\mathbb{F}}_P$。把這些經典的群都弄明白了, 就掌握了代數群。

舉個例子, 如果 X 是有 G 作用的代數簇, $\mathcal{L}$ 是 X 上的 G 等變向量叢 (G equivariant vector bundle), 那麼上同調群 $H^i(X,\mathcal{L})$ 是有理 G 模。一個問題是這個 $H^i(X,\mathcal{L})$ 什麼時候不爲零, 它的模結構是怎樣的。這個哪怕是對旗流形來講, 我們都沒有完全解決這個問題。

代數幾何在有限李型群的表示理論中起突出作用。有限李型群是有限域上的一些線性群, 如 $GL_n(\mathbb{F}_q)$, $SL_n(\mathbb{F}_q)$, $Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$, $SO_n(\mathbb{F}_q)$ 等等。有限李型群可以視爲代數群的特殊子群, 它中間有個 Frobenius 映射的不動點。有限李型群的重要還有另外一個原因: 有限單群除了交錯群, 有限交換的素數階群, 二十六個散在單群 (sporadic group) 之外, 其餘都是有限李型群。不過當你把它當成代數群的子群之後, 它的研究方法就很不同。這時候就可以用非常強有力的代數幾何方法。利用 l 進制上同調就可以構造有限李型群的表示, 這是 1976 年 Deligne 和 Lusztig 的理論。隨後 Lusztig 建立了有限李型群的特徵標理論, 這個理論大致可以說是有限群表示理論中目前最深入的理論, 也啓發了很多以後的工作。

代數幾何方法在李代數的表示理論中的應用也很精彩。複半單李代數是複半單李群在單位元處的切空間。之前已經提過, 對複半單李代數而言, 它的有限維表示是很淸楚的, 都是最高權模。不過對複半單李代數的無限維不可約最高權模而言, 這個不可約特徵標是很不容易的一件事情, 甚至像 Gelfand 這樣偉大的數學家都沒能提出一個猜想。突破性的進展是 1979 年 Kazhdan[18]和 Lusztig 作出的。他們給出了如下的猜想:

$$chL_w=\sum_{y\le w}(-1)^{\ell(w)-\ell(y)}P_{y,w}(1)chM_y,$$

[17] Armand Borel (1923∼2003), 瑞士數學家, 爲現代線性幾何群的奠基者之一。

[18] David Kazhdan (1946-), 俄羅斯和以色列數學家, 以表現理論的工作最廣爲人知。

這個公式中比較容易明白的部分是, M_y 是一些 Verma 模, y, w 是 Weyl 群中的元素, L_w 是某些不可約最高權模, 一般是無限維的, chL_w 和 chM_y 分別是 L_w 和 M_y 的特徵標。以前爲什麼沒有發現這點, 是因爲 $P_{y,w}(1)$ 是 Kazhdan-Lusztig 多項式 $P_{y,w}$ 在 1 處的值。這個多項式爲什麼有點特別, 它實際上計算了 Schubert 簇的相交上同調, 反映了 Schubert 簇的奇點的性質。當時這個猜想出來後轟動一時, 人們怎麼樣也想不到這麼複雜的代數問題會和幾何的奇點有聯繫, 而且還是通過相交上同調的聯繫。

Kazhdan-Lusztig 猜想很快被 Bernstien[19]-Beilinson[20]和 Kashiwara[21]-Brylinski[22] 證明。他們的證明方法也非常有意思, 他們並不直接證明這個猜想, 而是把這個猜想的表達先從李代數表示的範疇轉換到 D 模範疇的語言, 再通過 Riemann-Hilbert 對應轉換到反常層範疇的語言, 在反常層範疇 Kazhdan-Lusztig 多項式就有了恰當的解釋, 猜想變得容易明白了, 而得證。這個模式以後在表示論中一再被重覆應用。

4.5. 拓樸方法

拓樸方法在表示論中主要用於李群和代數群的表示, 其中纖維叢 (fiber bundle)、示性類、上同調、K理論等等都是工具。

作爲例子, 我們還是看一下之前非常熟悉的線性群的例子。假設 G 是複數域上的一般線性群 $GL_n(\mathbb{C})$。令 X 是 G 的旗流形。令 $\mathcal{N}$ 爲 $\mathbb{C}^n$ 上的冪零 (nilpotent) 線性變換全體。定義

$$Z = \{(\xi, x_1, x_2) \mid \xi x_i = x_i\} \subset \mathcal{N} \times X \times X$$

這個簇 Z, 第一個分支就是冪零的線性變換, 第二個分支就是旗流形, 第三部分也是。冪零的線性變換可以作用在旗流形上。我要求它保持不變, 就是在旗流形上每個子空間的鍊是不變的, 這是一個代數簇, 稱爲 Steinberg 三重簇 (Steinberg triples)。很自然地群 $G\times\mathbb{C}^*$ 作用在簇 Z 上面, 於是 Z 上的 $G\times\mathbb{C}^*$ 等變連貫層範疇的 Grothendieck 群就是等變 K 群 $K^{G\times\mathbb{C}^*}(Z)$。在這個 K 群可以通過卷積 (convolution) 定義一個乘法。讓人想不到的是這個 K 群的結合環結構和一個完全通過代數方法定義的仿射 A 型 Hecke 代數是同構的。

仿射 Hercke 代數爲什麼有意思。Borel在1976年的一個工作說明了仿射 Hecke 代數的表示和 p 進群的表示有極大的關係, 實際上 p 進群一部分非常有意思的表示的研究可以歸結爲仿射 Hecke 代數的表示的研究。Langlands 和 Deligne 關於 p 進群這部分表示的一個猜想就可以用仿射 Hecke 代數的語言表述。正是利用這一個聯繫, Kazhdan 和 Lusztig 在 1987 年證明了修正後的 Deligne-Langlands 猜想。他們給出了 Hecke 代數中的參數 q, 當 q 是單

---

[19] Joseph Bernstein (1945-), 以色列數學家, 工作包含代數幾何, 表現理論與數論。

[20] Alexander A. Beilinson (1957-), 數學家, 研究工作包含表現理論, 代數幾何與數學物理。

[21] 柏原 正樹 Masaki Kashiwara (1947∼), 日本數學家, 佐藤幹夫的學生, 與佐藤一起合作代數分析和 D-module 理論。

[22] Jean-Luc Brylinski (1951∼), 法裔美籍數學家, 以他與柏原正樹對 Kazhdan-Lusztig 猜想的證明最廣爲人知。

位根的時候, 他們給出了這個不可約表示的分類。這個工作對以後的工作影響也非常大, 在方法上跟分類上都給了很多的啓示。

線性空間 $\mathbb{C}^n$ 上的冪零線性變換全體 $\mathcal{N}$ 也是一個很有意思的簇。它是一般線性李代數 $gl_n(\mathbb{C})$ 的冪零元全體。對複數域上的任何簡約李代數都有類似的冪零元簇。這些簇有奇點。例如零矩陣就是一個奇點, 因爲你求導數是全部爲零的。這個奇點非常有意思, 在代數幾何中, 對於有奇點的空間考慮它的解消 (resolution), 對這些奇點, 有著名的 Springer 解消。Springer 解消其實就是旗簇的餘切叢。有這個解消, 就有 Springer 纖維, 因爲餘切空間可以投影到簇上, 對每個命令元有相應的纖維, 這個纖維就是 Springer 纖維。1976年 Springer[23]建立了這個纖維和 Weyl 群表示的聯繫, 他這個工作影響了很多以後的工作, 這也是幾何表示論的一個源頭, 現在被稱爲 Springer's correspondence。這個纖維本身在表示論中非常有用, 之前的仿射 Hecke 代數和它也有很大的關係。1988 年 Kazhdan 和 Lusztig 引進了仿射 Springer 纖維, 是證明基本引理的一個關鍵。Ngo Bao Chau[24]因爲證明了基本引理於2010年獲得菲爾茲獎 (Fields Medal)。在這裡 Springer 纖維是簡單的一個東西, 但後來應用在一些很複雜、高深的數學中。

5. 歷史

我們對表示的概念, 例子, 方法, 理論的基本特點都有一定的瞭解之後。再回頭來看一下歷史, 對歷史會有更深的體會。從歷史上來講, 表示有幾個源頭。剛開始的起源應該是數論中的特徵, 後來產生了有限交換群的表示, 有限群的表示, 在有限群表示的同時有了李群和李代數的有限維表示, 後來有代數的表示, 李群和李代數的無限維表示, 當然以後還有李超代數, 量子群等等。這裡主要側重於群表示的歷史, 也會涉及一些相關的李代數表示的歷史。這樣做是因爲表示理論中群的表示理論是最龐大也最深刻, 影響最爲廣泛的一個部份。其次應該就是李代數和李超代數。

5.1. 數論中的特徵

數論中的特徵出現得很早, 在前面提到的例子 — 高斯和, 可以看得到兩個交換群的特徵。《數論研究》於1798年完成, 高斯當時才21歲, 24歲的時候發表, 此書對以後的影響非常大。要是做數論研究, 你會對他的天才非常佩服。Dirichlet[25]是高斯的學生, 他仔細研究了老師的書。

[23]Tonny Albert Springer (1926∼2011), 數學家, 研究領域包含線性代數群, Hecke 代數等。

[24]Ngo Bao Chau (1972∼), 越南裔法籍數學家, 2010年獲頒菲爾茲獎, 因證明 Robert Langlands 和 Diana Shelstad 的 fundamental lemma for automorphic forms 而知名。

[25]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805∼1859), 德國數學家, 創立的現代函數的正式定義, 對數論等數學領域有深遠的貢獻。

當初群的特徵在數論中很有用, 1837 年 Dirichlet 利用群的特徵定義了一種函數叫 L 函數:

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^{-s}}$$

他利用這個 L 函數證明了一個很強的結論: 很多算術數列裡面有無限多的素數。如果兩個正整數 a 和 m 互素, 那麼算術數列 $a+m, a+2m, \ldots, a+km, \ldots$ 裡有無窮多個素數。Dirichlet 這個 L 函數的定義影響深遠。後來 Artin[26]針對數域的有限擴張域的 Galois 群的表示, 也定義了一類 L 函數並解析延拓得到一個, 現在稱爲 Artin L 的函數。利用這些 L 函數, 他證明交換類域論裡面很有名的 Artin 互反律。這是有限群的情形。Langlands 想把 Artin 的工作延伸到非交換的類域論。Langlands 和 Jacquet[27]對 p 進域上的簡約代數群的不可約表示和整體域上簡約代數群的自守表示也定義了 L 函數。Langlands 給出了一系列的猜想, 建立了數論與代數群表示的深刻聯繫。這就是現在非常熱鬧的 Langlands 綱領 (Langlands Program)。看得出來, Langlands 的想法和上面提到的 Dirichlet 工作是有關係的。這說明群表示論和數論的聯繫源遠流長, 而且繼續發揮著非常大的作用。

從前面的工作已經可以看到群特徵對數論是這麼的重要, Dedekind[28]是高斯最後的學生, 他也定義了某些有限交換群的特徵, 眞正在一般抽象的有限交換群給出特徵的是 Weber[29], 他寫了一本書叫做《 Lehrhuch der Algebra》[30], 在書中對交換群的特徵作了全面的闡述。我們知道有限特徵標是一維的表示, 所以這裡還比較簡單。

有限群表示的起點來自於 Dedekind 的工作, 他當時考慮的問題非常簡單, 假設 G 是有限群, 元素是 $g_1, g_2, \ldots, g_n$。對每一個群元素 g_i, 給一個不定元 x_{g_i}。考慮一個 $n \times n$ 矩陣, 其第 i 行第 j 列處的元素是 $x_{g_i g_j^{-1}}$。寫出來就是 $(x_{g_i g_j^{-1}})_{1\leq i,j\leq n}$。群 G 的行列式就是這個矩陣的行列式 $D = |x_{g_i g_j^{-1}}|$。這個行列式當然是個多項式, Dedekind 想分解這個行列式, 發現如果是個交換群, 這個行列式可以分解成一次多項式的乘積, 其係數正好是交換群的特徵標, 也就是群 G 的特徵完全由這個行列式來決定。他也試了非交換的情形, 發現對三階的對稱群會出現二次的不可約。他沒能解決這個問題, 就把這些情形寫信告訴 Frobenius[31]。Frobenius 看到這封信的時候, 抓住這個問題, 爆發了罕見的才能和熱情, 在 Dedekind 給他信的那一年寫了三篇研究有限群特徵標的論文, 奠定了有限群的特徵標理論。

這三篇論文得到的許多結果已成爲這個領域的標準結果。其中一個就是特徵標之間的正交關係。他發現 G 的群行列式不可約因子與 G 的不可約特徵標一一對應, 不可約因子的次數及

[26]Emil Artin (1898～1962), 數學家, 是具有領導地位的代數數學家, 對代數數論有卓越貢獻, 特別是 class field theory 與 a new construction of L-functions。

[27]Hervé Jacquet (1939-), 法裔美籍數學家, 是 Theory of Automorphic Representations 的奠基人之一。

[28]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831～1916), 德國數學家, 對抽象代數特別是環論, 有重要的貢獻。

[29]Heinrich Martin Weber (1842- 1913), 德國數學家, 主要研究工作包含代數, 數論和分析。

[30]《Lehrbuch der Algebra》, 1896年由 Braunschweig F. Vieweg 出版。

[31]Ferdinand Georg Frobenius (1849～1917), 德國數學家, 主要貢獻在在微分方程理論和群論。

出現的重數都等於相應的不可約特徵標的次數。於是 G 的階等於所有不可約特徵標的次數的平方和。

交換群的特徵是從群到非零複數乘法群的同態。而非交換群的特徵標一般只是緊致群到複數域的函數。Frobenius 注意到這一點, 在1897年, 給出表示的定義: 群到一般線性群的同態。他發現群的特徵標其實就是表示給出的跡函數。這樣一來就把有限交換群的表示理論和有限群的表示理論統一起來。

另外, 他還引進了誘導表示。他研究小群表示與大群表示之間的關係, 建立了非常有名的 Frobenius 互反律。他不僅建立了有限群的表示理論, 還計算了很多群的特徵標, 如對稱標, 交錯群, 二階射影群等。在 1896 年到 1901 年間, 寫了 20 篇關於表示論的論文, 做了非常多的工作。整個有限群的特徵標理論可以說是他一手打造出來。Lusztig 看到這段歷史的時候很羨慕, 他說 Frobenius 眞幸運, 當時有這麼好的一個問題讓他做。我聽了他的話想了想後說: 你也很幸運, 你做的問題也沒被人做掉。所以有時候是時勢造英雄, 沒有那個時勢, 即便是英雄也出不來。

接下來是另外一個人, W. Burnside[32]。他對有限群的結構理論更感興趣。 他一直看著 Frobenius 的工作, 有好幾年的時間, 無論 Frobenius 做出什麼結果, Burnside 很快能夠用另一個方式給出不同的證明。這讓 Frobenius 有點緊張、不安, 覺得後面有個人盯著自己, 隨時可能冒出一些更漂亮的結果。還好 Burnside 更關心的是有限群的結構理論和表示論在有限群結構理論中的應用。

1904年他用有限群的特徵標理論證明了一個非常讓人吃驚的事情, 假如 p, q 是兩個素數, 則階爲 $p^a q^b$ 的有限群 G 是可解的 (solvable)。這個結論直到上世紀的70年代才有一個不用特徵理論證明的方法。但是目前爲止最簡單的證明還是用特徵標。特徵標理論對研究群結構而言非常重要。他對單群的分類特別感興趣, 一直很努力找單群。他有本書《有限階群[33]》在1911年出了第二版, 在其中他提出一個非常有名的猜想, 奇數階有限群可解。這個猜想是有限群中非常重要的一個猜想, 到了1957年的時候, Suzuki[34]才有了突破。他的論文用到許多有限群的特徵標的理論。1963年, Feit[35]和 Thompson[36]完全解決了這個猜想, 他們的論文是大約有兩百五十頁的長篇大論, 占了太平洋數學雜誌[37]整整一期。在他們的證明中, 特徵標理論起了很大的作用。他們的工作也標誌著有限單群的分類一個突破性的進展, 他們因爲這項以及後來的幾項工作獲得了菲爾茲獎。所以 Burnside 在歷史上對有限群的理論有很重要的貢獻。

---

[32]William Burnside (1852∼1927), 英國數學家, 以有限群理論的工作而爲人所知。

[33]Theory of Groups of Finite Order, 1897年由 The University Press 出版。

[34]Michio Suzuki 鈴木 通夫 (1926-1998), 日本數學家, 主要研究領域爲群論。

[35]Walter Feit (1930∼2004), 奧地利裔美籍數學家, 主要研究工作在群論和表示理論。

[36]John Griggs Thompson (1932∼), 美國數學家, 1970年獲頒菲爾茲獎, 以有限群的研究聞名。

[37]Pacific Journal of Mathematics, 1951年開始發行, 由加州柏克萊大學出版, ISSN 0030-8730。

接著是 Schur[38], 之前提到的 Schur 引理就是他做出來的。這個引理, 改寫了整個有限群的表示理論。利用 Schur 引理, Frobenius 理論中的很多結論有很簡單的證明, 帶來一個新的視角。他還引進了射影表示 (1907):

$$G \to GL_n(\mathbb{C})/\{\text{純量矩陣}\},$$

這也是個很重要的概念。他還研究了表示的算數性質, 有 Schur 指標等等。據說 Schur 講課非常受歡迎, 有時候一堂課在階梯教室中有 400 人聽講, 後面的人看不清楚, 要帶著望遠鏡才行。

有限群表示的現代理論是從 Noether[39] 開始。她用了非常方便的語言: 引進了群代數 $F[G]$, 然後採用模的語言。這樣一來, Frobenius 的結果處理起來變得非常方便自然且容易明白。

接下來有限群表示理論的另一個發展高潮是由 Brauer[40]引導。Frobenius, Schur 等人只考慮複數域上的表示, Brauer 認爲應該考慮所有域上的表示。當域的特徵不整除群的階時, 有限群在這個域上的表示理論與複數域上的表示沒什差別的。當域的特徵整除群的階時, 有限群在這個域上的表示理論與複數域上的表示理論差別很大。這時的群表示理論稱爲有限群的模表示理論。Brauer 得到了不可約模表示的分類, 也建立了模表示理論與有限群在複數域上的表示理論的聯繫, 並得到分解矩陣和 Cartan 矩陣的一個非常漂亮的關係, 就是這樣一個等式: $C = D'D$。他引進了 p 塊 (p-block) 理論和虧群 (defect group) 的概念, 到現在爲止都還是模表示理論的基本概念。

在有限群表示理論中, 早期的人除了 Burnside 是英國人, 其他都是德國人。所以, 有限群表示理論的最初幾十年有很強烈的德國烙印。Brauer 對中國的群表示研究也有一定的影響, 因爲他有兩個中國學生, 一位是段學復[41], 一位是曹錫華[42]。曹錫華先生就是我的導師。這兩位在中國都培養了很多在表示理論方面的人才, 對中國表示論有很大的影響。

5.2. 李群和李代數的有限維表示

在有限群表示理論發展的同時, 李群和李代數的表示也在進行著。李群是 Sophus Lie[43]在研究微分方程時引進的。他當時很自然的考慮到特殊線性群 $SL_2(\mathbb{C})$ 和特殊線性李代數 $sl_2(\mathbb{C})$ 的表示。$SL_2(\mathbb{C})$ 就是行列式爲1的 2×2 複矩陣群體, 而 $sl_2(\mathbb{C})$ 是 $SL_2(\mathbb{C})$ 在單位矩陣處的切空間, 由跡爲零的 2×2 複矩陣全體構成。1893 年 Lie 確定了它們的不可約表示。他提到多項式環表示, 複數域上的二元多項式環的齊次部分就給出這個群及其李代數的所有的有限維

[38]Issai Schur (1875～1941), 數學家, 在代數與群表示理論中作出重大貢獻。

[39]Amalie Emmy Noether (1882～1935), 德國數學家, 是 20 世紀初一位才華洋溢的數學家, 對數學和理論物理有非常重要的貢獻。

[40]Richard Dagobert Brauer (1901～1977), 德裔美籍數學家, 主要工作在抽象幾何, 對數論做出重要貢獻。

[41]段學復 (1914～2005), 中國數學家, 數學教育家, 主要研究代數學, 中國科學院院士。

[42]曹錫華 (1920～2005), 中國數學家, 數學家, 教育家, 主要研究有限群論與代數群等。

[43]Marius Sophus Lie (1842～1899), 挪威數學家, 李群和李代數的創始人。

不可約表示。所以, $SL_2(\mathbb{C})$ 和 $sl_2(\mathbb{C})$ 的有限維不可約表示與自然數的集合有個一一對應。

後來 E. Cartan 進來了。他證明這個群和李代數的有限維表示的完全可約性, 每一個有限維表示都是不可約表示之和。Fano[44]是代數幾何學家, 他從代數幾何的角度也證明了這些有限維表示的完全可約性。這個群和李代數都很簡單, 但是例子卻錯綜複雜, 讀 Borel 的書[45]會發現這裡面有很多人, 有時候 A 做出來的結果, B 並不知道又重複做一次, 關於這個完全可約性就有不少的證明。

1897 年 Hurwitz[46]從不變量的角度考慮問題, 該怎麼構造一些不變量的多項式, 發現了有名的酉技巧。舉個例子來看酉技巧。

隨便給群 $G = SL_2(\mathbb{C})$ 一個表示 $\sigma : G \to GL_n(\mathbb{C})$。於是群 G 通過 σ 線性作用在向量空間 $\mathbb{C}^n$上。對任一個多項式函數 $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, Hurwitz 想得到一個 G 不變的多項式函數。標準的做法是求平均。但 $SL_2(\mathbb{C})$ 不是緊的, 所以平均只能在 G 的緊子群上做。考慮 $G_u = SU(2) = S^3$ 上的積分,

$$\hat{P}(x) = \frac{1}{8\pi}\int_{G_u} P(g^{-1}\cdot x)dv \in \mathbb{C}[\mathbb{C}]^G$$

這裡用的是 S^3 的測度。$\hat{P}(x)$ 是 G 不變的多項式, 也就是 $\hat{P}(g\cdot x) = \hat{P}(x)$ 對應一切的 $g \in G$。就這樣, Hurwitz 確定了這些 G 不變的多項式構成的代數是有限生成的。在不變量理論裡面, 不變的多項式是否有限生成是非常重要的問題。這對交換代數和代數幾何都非常重要。

他這個酉技巧還可以用於研究群的表示。繼續看群 $G = SL_2(\mathbb{C})$。給出 G 的表示 $\sigma : G \to GL_n(\mathbb{C})$, 我們就有 G 在線性空間 $\mathbb{C}^n$ 上的作用。對 $\mathbb{C}^n$ 上任意的正定非退化厄密型 (Hermitian Form) $H(\ ,\ )$, 通過平均

$$\hat{H}(x,y) = \int_{G_u} H(g^{-1}\cdot x, g^{-1}\cdot y)dv, (x,y) \in \mathbb{C}^n,$$

Hurwitz得到一個 G_u 不變的非退化厄密形 $\hat{H}(\ ,\ )$。如果 $\mathbb{C}^n$ 的子空間是 G_u 不變的, 那麼通過厄密形 $\hat{H}(\ ,\ )$ 得到的正交補空間也是 G_u 不變的。但子空間是 G_u 不變的當且僅當它是 G 不變的。所以, G 的有限維表示都是完全可約的。這個技巧非常有用。實際上, Hurwitz 在 1897 年利用這個酉技巧還證明了特殊線性群 $SL_n(\mathbb{C})$ 和特殊正交群 $SO_n(\mathbb{C})$ 的有限維表示的完全可約性。但是像他這麼有名的數學家做這麼重要的工作, 當時也沒被人注意。他的工作沉寂了 25 年後, 才被重新發現。

物理學家 Casimir[47]研究群表示在量子力學的應用, 他針對 $sl_2(\mathbb{C})$ 發現了 Casimir 算子, 並用它證明了 $sl_2(\mathbb{C})$ 的有限維表示的完全可約性。物理學家喜歡用 Casimir 算子, 因

---

[44]Gino Fano (1871∼1952), 義大利數學家, 主要研究領域在仿射幾何。

[45]Armand Borel, Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, 2001年由美國數學協會 (AMS) 出版。

[46]Adolf Hurwitz (1859∼1919), 德國數學家, 在黎曼幾何和數論都作出了許多重要工作。

[47]Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909∼2000), 荷蘭物理學家, 以超導現象的二流體模型工作最爲人所知。

爲 Casimir 算子的特徵值公式有物理意義。1931 年 Casimir 對任意的複半單李代數引進 Casimir 算子。利用這個算子, 1935 年 van der Waerden[48] 對複半單李代數的有限維表示的完全可約性給出第一個代數證明。Brauer 在 1936 年給了另一個代數證明。說起來很有意思, Brauer 也是很有名的數學家, 但是他這個證明也沒被人注意到。在上世紀五十年代時, Bourbaki[52]學派要重新表述數學, 他們對 van der Waerden 的證明不滿意, 重新寫了一個代數證明, 他們的書在1961年發表後, 才發現他們的證明和 Brauer 的證明一樣。所以有時候一個很好的工作卻不被人知, 在數學裡面也是經常發生的。

1913年 E. Cartan 構造了複單李代數的所有不可約表示。1922 年 Schur 發現了 Hurwitz 那篇 1897 年的論文, 用其中的方法把有限群的複表示的特徵標理論拓展到特殊酉群 SU_n 和特殊正交群 SO_n 的表示, 得到了酉群和正交群的特徵標。

把所有這一切綜合起來並有新的創造的是 Hermann Weyl。他利用酉技巧針對複半單李代數, 複半單李群, 緊連通半單李群證明了有限維表示的完全可約性, 並給出了表示的特徵標。Weyl 的這些工作是系統地研究李群整體理論的開始, 對 E. Cartan 有非常重要的影響。Cartan 後來就從李群的整體性質考慮問題, 包括他在對稱空間上的工作等。

1927 年 Weyl 和他的學生 Peter 考慮緊李群的分析。他們的工作, Peter-Weyl 定理是緊拓樸群上的調和分析奠基之作, 也是群上調和分析的開端。到現在, 群上調和分析是表示論中非常龐大的一個分支。

Weyl 對群表示在量子力學中的應用非常感興趣。1928 年 Weyl 發表了一本非常有名的書《Gruppentheorie und Quantenmechanik[49]》(群論和量子力學)。最早把群表示理論用到量子力學的, 應該是 Weyl 和另外一位物理學家 Wigner[50]。

對局部緊的交換拓樸群的表示, 有前面提到的 Pontryagin 對偶定理, 在十九世紀三十年代中期也是很重要的工作。Pontryagin和 van Kampen[51]建立了 Pontryagin 對偶, 把局部緊的交換拓樸群 G 的酉不可約表示完全解決了。

5.3. 李群和李代數的無限維表示

之前提到 Weyl 把群論應用到量子力學時, 還提到另外一個人 Wigner。Wigner 是很有名的物理學家, 1963年得到諾貝爾獎。相對論裡面有幾個很重要的群, 如 Lorentz 群, 齊性和非齊性的 Poincaré 群等等。Wigner在1939年研究了 Poincaré 群的不可約 (射影) 酉

[48]Bartel Leendert L. van der Waerden (1903∼1996), 荷蘭數學家, 受 Emmy Noether 影響甚多, 以抽象代數的研究工作最爲人知。

[52]Bourbaki, 爲20世紀一群法國數學家發表一系列著作時共同使用之筆名。他們以建立完全奠基於集合論上的數學爲標的, 且重視數學證明的嚴格性, 對後世數學有相當影響。

[49]*Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928年在德國出版。

[50]Eugene Paul "E. P." Wigner (1902∼1995), 匈牙利籍美裔理論物理學與數學家, 於1963年獲頒諾貝爾物理獎。

[51]Egbert Rudolf van Kampen (1908∼1942), 數學家, 對拓樸學與基本群有重要貢獻。

表示, Dirac[53]馬上注意到這個工作的意義, 他認爲這是一個很有意思的領域, 要他的一位學生 Harish-Chandra 去研究 Lorentz 群的不可約表示。Harish-Chandra 把這個工作完成, 拿到了博士學位。後來 Harish-Chandra 發現他的證明不太嚴格, 也不太好, 有點苦惱, 對 Dirac 說了這事 。Dirac說: 我並不關心證明的好與壞, 我只關心大自然在做什麼。Harish-Chandra 自覺缺乏作爲物理學家的第六感, 只能當數學家, 於是轉行作群表示論。這個轉折改寫了李群的表示理論。他龐大的工作就不在這裡說明。

V. Bargmann[54]也是一位很有名的物理學家和數學家, 得過 Max Planck 獎和 Wigner 獎。1947年他研究了 Lorentz 群的不可約酉表示, 開始的動機來自物理學。

這個時候蘇聯學派興起。1947 年 I. M. Gelfand 和 M. A. Naimark 給出了 $SL_2(\mathbb{C})$ 的不可約酉表示的分類。這個分類之前已經提過。再以後就是一個群星燦爛, 蓬勃發展的時期。1950 年以後表示理論的發展更爲迅速, 在這個領域裡面出現了非常多的大家的名字, I. M. Gelfand, M. A. Naimark, Harish-Chandra, Selberg , A. Weil, Grothendieck , Borel, Langlands, Deligne, Kazhdan, Drinfeld , Lafforgue , Bernstein, Beilinson, V. Kac , Kashiwara, Lusztig$\cdots$等等。

我想通過這個報告可以看到, 表示論在數學中是到處都有, 隨處可見, 而且多姿多彩。它一直產生一流的數學家, 也吸引最好的數學家。不過在這個名單裡面看不到中國人的名字, 也許各位有興趣加入這個行列。謝謝大家。

—本文演講者席南華教授任職中國科學院數學與系統科學研究院, 整理者陳麗伍爲中央研究院數學研究所助理—

[53]Paul Adrien Maurice Dirac (1902∼1984), 英國物理學家, 1933年獲頒諾貝爾物理獎, 量子力學的奠基者之一, 對量子電動力學的早期發展作出重要貢獻。

[54]Valentine Bargmann (1908∼1989), 德裔美籍物理學家和數學家, 1978年獲頒 Wigner 獎, 1988年獲頒 Max Planck 獎, 以 Lorentz 群和不可約表示理論的工作最爲人所知。