

## 有朋自遠方來——專訪

Stefano Bianchini 教授、鄔似珏教授與尤釋賢教授



(照片中由左至右為尤教授、Bianchini 教授與鄔教授)

策 劃：劉太平

地 點：中央研究院數學研究所

訪 問：劉太平

整 理：甘濟維、陳麗伍

時 間：民國 101 年 11 月 2 日

Stefano Bianchini, 畢業於 Politecnico di Milano, 1995 B.S., M.S., SISSA, 2000 Ph.D. 先後受聘於 Max Planck (Leibzig), 中研院數學所 2000-2001, CNR-Rome 2001-2004, 自 2004 年為 SISSA 教授。Bianchini 教授的研究領域為守恆律及測度論。

Sijue Wu (鄔似珏), 畢業於北京大學, 1983 B.S., 1986 M.S., Yale University 1990 Ph.D. 先後受聘於 NYU, IAS, Northwestern University, University of Iowa, University of Maryland, 自 2003 年為 University of Michigan 教授。鄔教授的研究領域為調和分析及水波運動。

Shih-Hsien Yu (尤釋賢), 畢業於台灣大學, 1986 B.S., 1989 M.S., Stanford University 1994 Ph.D. 先後受聘於 IMA, UCLA, Osaka University, City Uni-

versity of Hong Kong, 自 2007 年為 National University of Singapore 教授。尤教授的研究領域為守恆律, 空氣動力學及偏微分方程之邊界關係。

三位教授正當盛年, 皆以獨步的創見、深入的分析, 分別在其研究領域作出重要的貢獻。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 這星期的研討會<sup>1</sup>, 演講的人照姓氏字母排序。Stefano 不想按照這個順序發言, 他說這樣不太公平, 那我們就倒過來, 從字母在後面的開始。釋賢, 你是熟悉這種訪談的。

尤釋賢 (以下簡稱「尤」): 是的, 我以前跟你一起訪問過很多人。

劉: 我們常常從這個問題開始: 你為什麼及如何走上數學這條路?

尤: 如何走上數學這條路? 我感覺命運很奇妙, 其實我那時也沒什麼選擇。考大學的時候, 一開始想要念物理, 那時認識了一個台北人, 讓我覺得台北很有意思, 就把志願的順序改了。不知道是幸還是不幸, 我進了數學系; 分數不到, 進不了物理系, 卻以高分進了數學系。我試過轉物理系, 成績太差, 轉不成, 只好留在數學系。最後才意識到我的心是在數學上的, 這是上天決定的。當時如果選了其他科系, 日子會很難過。

鄔似玗 (以下簡稱「鄔」): 所以不是因為你喜歡數學。

尤: 我真心喜歡數學, 不過那時候, 湊巧上天給了我更多機會去尋找我真正的興趣。

鄔: 用刪去法?

尤: 現在我對科學有更多要抱怨的。早期物理學家和數學家是同一群人, 當初我想要念物理, 是因為同時也可以悠遊於數學, 所以當時比較想成為物理學家, 不過現在情況不同了。

劉: 你認為念數學和念物理沒什麼差別, 都是數理科學。這是你的想法?

尤: 沒錯。從 18、19 世紀的例子看來, 他們本質上是相同的。只不過物理學家有更多自由想像的空間。

Stefano Bianchini (以下簡稱「B」): 我這麼說可能有點怪異: 從集合論當中我們可以找到某些跟現實相關的東西, 而只要深入去研究, 這是探尋普世視野的關鍵。我真的相信我們的思考方式, 也就是說 集合論的法則, 是從天地萬物學來的, 這應該是宇宙間知識的本質。

鄔: 我不大明白你所說的集合論是什麼。你可以闡釋一下嗎?

B: 我們所用的, 從假設演繹出定理的推論, 是一種真實的東西。為什麼我們會學到這個法則, 這是因為數千年的經驗讓人腦了解這些簡單的推斷法則, 並且對現實進行演繹。我們演繹的方式不是創造出來的, 是歸納出來的, 它根源於自然的選擇。

<sup>1</sup>2012 非線性分析, 發展偏微分方程和空氣動力學, 國際研討會, 10 月 29 日至 11 月 2 日在中央研究院數學研究所舉行。

鄔: 這是普世的真理。

尤: 我們處理很多可知的資訊, 不需要無中生有。在這之上, 我們可以做更多的事。舉例來說, 我們使用語言, 但不創造語言。

B: 即便是不同的語言, 都有共通的規則, 這一點是真的。

劉: 你一直想念數學, 是這樣嗎?

鄔: 不, 不完全是。我一直認為數學並不是我想做的。

劉: 問錯問題了。你是怎麼進入數學的?

鄔: 我成長的時候, 在中國不大有學習的機會, 然後在文化大革命之後, 政府大力提倡科學, 有許多科學競賽, 其中最受矚目的是數學競賽。高中時, 因為跳級的關係, 我物理和化學學得不多, 基礎較弱。其實我的文科很好, 這是我真心喜歡的, 一直到現在還是。但是因為參加了數學競賽, 而且脫穎而出, 從市級, 到省級, 最後到全國性的比賽。在過程中, 為了參加下一個階段的比賽必須缺課受訓。一開始跳級, 就讓我處在弱勢, 再加上為了晉級比賽, 又缺更多課, 最後, 我沒太多選擇了。同時, 我們分為文科和理科, 理科被認為比文科好。因為我是好學生, 自然而然地我應該讀理科。而因為參加了數學競賽, 數學就成了唯一的選擇。後來我沒有贏得全國性的比賽, 必須參加大學入學考試。我考得不錯, 那時候, 數學是競爭最激烈的科系之一, 北京大學又是最難考的, 而我以第一志願進入北大數學系。不過當時我並不知道念數學是為了什麼, 我以後想從事什麼樣的職業, 我可以用數學來做什麼, 一點概念都沒有。可是其他理科科目我懂得不多, 我沒有信心選擇其它科系。

劉: 釋賢說他找到了真愛。你呢?

鄔: 這不是我唯一的愛, 但這是我的真愛之一。

尤: 事實上, 我覺得台灣的環境很好。我在台大的大學生活很棒, 我們有自由。我在宿舍交了很多朋友, 宿舍裡有很多不同科系的人; 在系上, 也可以結識很多朋友, 有厲害的學生, 也有比較弱的學生, 可以看到各式各樣的人, 有機會去找尋真正的興趣所在。

鄔: 但是不論有沒有跟人互動, 你都應能認識到自己心裡真正要的是什麼, 不是嗎?

尤: 嗯, 有時候是需要跟人互動的。

鄔: 我是直到最近才發覺數學是我真正喜歡的。

劉: 這讓我想起陳省身<sup>2</sup>先生的話: 有些人談到對數學的興趣; 但是一個人有能力做, 自然會有興趣。我想你是有能力做數學的人。

鄔: 在潛意識裡, 我一直覺得我更喜歡別的東西。

---

<sup>2</sup>Shiing-Shen Chern 陳省身 (1911-2004), 華裔美籍數學家, 詳第1卷第2期, (學算四十年); 第11卷第2期, (陳省身院士演講—我的若干數學生涯); 第35卷第2期, (陳省身與漢堡大學), 與其它卷期的相關文章。

劉：這是健康的態度。

鄔：雖然我從沒做過其它事情；也許別的事我可以做得更好，我總認為我還有其它選擇。這麼想讓人自我感覺良好。

劉：那叫做「希望」。

鄔：是啊，我做其它事會做得更好。

劉：或是「願望」。

鄔：「願望」。那是真的。直到最近我才發現數學是我的真愛。當你知道為什麼做數學，這點很重要，數學才會變得有趣。

劉：似玃，你早上剛給演講時，我看得出來你樂在其中。

鄔：雖然我過去不知道我喜不喜歡數學，但是剛開始教書的時候，學生們總是說，「顯然你很喜歡你的科目。」

尤：所以你喜愛它吧？

鄔：是啊，甚至不自覺地，也沒有試著去承認我喜歡它。

B：我高中畢業時，想要念物理，不過我父母說，「不，不，不，這樣子你找不到工作，學工程吧。」事實上，我學的是工程。但是在學習過程中，我改變了方向，因為我發現數學不需要知道很多概念就能了解，只需要知道初始的定義，或是只需要知道定理的敘述，然後自己建構證明或定理所需要的許多步驟。只要有一個明確的陳述，循此你可以自己判定是不是走錯了方向，有點像是一個遊戲，讀了證明，就可以看出對或錯，所以我決定申請攻讀數學博士。然後遇到許多偉大的數學家，這對我很重要，我因此了解到不同的可能會引向不同的路。為什麼喜歡數學？數學不只是規則或競賽，數學是一種思考和詮釋生命的方式，它是唯一一種我們可以確切陳述的知識；我們無從了解宇宙，這是每個哲學家都知道的假設。在這個情況下，數學不是如古典力學、量子力學、或是更複雜的理論中得到的描述；數學是方法，是我們從假設得到定理的方法，是事實的關鍵，是真理。如果時光倒流，再選擇一次，嗯……由於我認可這種思考方式的重要性，當然不願意因為改變學科而失去這樣的思考方式，我需要這種對生命的了解，所以我會再選擇數學。在已知的宇宙中，只有人類能夠做數學問題，沒有電腦或動物有這個能耐。不過未來或許不是如此，就像下棋，現在電腦比人腦厲害，所以我想很久以後，可能一個要緊的事是，人類發展出比我們自己還會思考的機器和演算法。

尤：你對伽利略<sup>3</sup>說的「數學是上帝的語言」有什麼想法？

B：那正是我的想法，不過我說的還要更深一層。數學不僅是「現實 (reality)」的模型，雖然你可能永遠不會了解或證明這是不是個正確的模型，但是數學語言代表的是我們對萬物真正

---

<sup>3</sup>Galileo Galilei (1564-1642)，義大利物理學家、數學家、天文學家和哲學家，被尊為現代科學之父。

的知識。

尤：那是造物者的語言。這是所有領域共通的。

劉：真好。你訪問過中研院數學所幾個月，我記得你爬山和打太極拳，同時，你做了中心流形座標 (center manifold coordinates)。可以談談嗎？

B：這含有兩個部份。第一，中心流形座標的想法是來台灣前才想到的。我不知道該怎麼說，有些地方讓你一下飛機或一下車，就有回家的感覺，對我來說台北就是這樣的一個地方。你們讓我可以安靜的做自己的事，感覺有點不像是真的，因為在那之前我在德國的時候，一群人有意義的專題討論要參加，這對有些人來說可能是好的，可是對我卻是分心。在這裡我認認真真的做了三個月，我喜歡這個地方，可以爬山或打太極拳，這一切的一切構成了適合我工作的環境。

劉：你如何想到中心流形座標的？

B：如果你有一個非線性方程，在座都知道的標準工具，主要就是找出能做估計 (estimates) 的部份，估計它，其餘的項，在某種意義上來說，不會破壞這個估計，也就是說維持了這個估計。在這個情形下，如果它是行進波 (traveling waves)，就不會隨時間改變，一個正確的座標中必須把它當作常數，而不能視為源項 (source term)，因此我們必須找出方法，把這個看似源項的移到能做估計的部份。中心流形座標做的正是這個，只要是這些不變解 (invariant solutions)，凡是在不變流形 (invariant manifold) 上的，源項一定要是零，這是關鍵。

鄔：所以在不變流形上源項是零。如果做法正確，不應該有任何源項。

劉：但是以前沒有人想到。

鄔：可能有人想過，可是他們不知道怎麼去做出來。

尤：我不覺得是這樣子，Stefano 是第一個想到。

B：我的碩士論文做的是動力系統，所以我有常微分方程的背景，不然我就需要去學不變流形的概念。

尤：所以這是基因混合。

鄔：我覺得我的話應該以更廣義的方式來理解。不變流形是 Stefano 的選擇。一般來說，如果所考慮的情形是沒有源頭的，那麼做法正確的話，就不應該有源項。

B：這是一種思考的觀點。如果是動力系統，我立刻就可以看出裡面的端倪，我有背景讓我知道什麼是正確的部份。

劉：似玗，妳研究水波 (water waves)。妳今天早上的演講真好。原本妳是做調和分析的，對吧？

鄔：我同意 Stefano 說的，這也是我在想的。理論上，我也覺得我的方程應該是沒有任何源項的，

問題是如何把方程式放在正確的架構上, 得出乾淨俐落的結果。Stefano 有不變流形, 至於我, 我還不知道該用什麼工具。您問我為什麼研究水波嗎?

劉: 我聽人說過調和分析是個核心科目, 做調和分析的人可以轉入偏微分方程, 比方說像 Bourgain<sup>4</sup> 那些人, 以直接的方式把調和分析應用到偏微分方程上。不過你的情形, 從調和分析到偏微分方程的銜接方式在我看來不是很直接明顯, 是這樣嗎?

鄔: 您是問我怎麼開始的? 我在聽完 Thomas Beale<sup>5</sup> 在 ICM<sup>6</sup> 的演講之後開始做水波。我覺得這個主題很有趣, 他的分析中有邊界積分 (boundary integrals) 出現, 而我有了解邊界積分的工具。這是我真正喜歡調和分析這種基礎科目的地方, 就像 Calderón<sup>7</sup>, Coifman<sup>8</sup>-McIntosh<sup>9</sup>-Meyer<sup>10</sup> 的工作, 他們證明何時定義在曲線上的柯西積分 (Cauchy integral) 或是希爾伯特轉換 (Hilbert transform) 是從  $L^2$  到  $L^2$  的有界算子, 這是個很基本的問題, 做的時候不見得會瞭解它都有些什麼應用。有趣的是, 如果你能夠證明這麼基本的東西, 自然會有很多應用。我聽到水波問題的時候, 意識到我有分析它的一些工具, 所以決定踏進去, 仔細看看。不過, 在做的過程中, 注意力是集中在問題本身、在想了解的事情上, 不是因為有了工具就一定要應用, 而是看著想要解決的問題, 思考其中最關鍵的是什麼? 那個時候, 我只是覺得, 我可能多少佔些優勢, 因為我是 Coifman 的學生, 我了解一些調和分析的工具, 知道很多研究偏微分方程的人可能不知道的定理。不過, 具體要解決哪個問題, 用什麼方法解決, 那又是另一回事。

劉: 你說當有了問題, 不應該一直想著如何應用你的工具, 而是要試著去了解問題本身, 對嗎?

鄔: 對。當你弄懂了問題, 你就有了起點。你不會去做一個完全沒有感覺的問題, 必須要有一些感覺的。

劉: 這是真的, 是個真理, 可以寫在我們的大門上。

B: 可是有時候我會做我一開始不知道的問題。

鄔: 最開始的時候我也不懂。我開始做水波是因為已經思考了一陣子 vortex sheet 的問題。拿到博士學位之後, 我意識到調和分析發展得算是成熟了。調和分析的發展, 是因為有偏微分方程作它的源頭之一。所以 必須到源頭去找問題。我一個人到處看, 想找問題, 卻找不到問題, 這時候我遇到看來簡單的 Euler 方程, 我開始考慮其中的 vortex sheet 問題。可是到底要解決什麼, 人們關心什麼, 我那時一點想法都沒有, 我不知道我該做什麼, 就卡在那裡。

<sup>4</sup>Jean Bourgain (1954~), 比利時數學家, 1994年以在調和分析的深入研究而獲頒菲爾茲獎。

<sup>5</sup>James Thomas Beale, 現任教杜克大學 (Duke University), 研究興趣包括偏微分方程和流體力學。

<sup>6</sup>The International Congress of Mathematicians (國際數學家大會, 簡稱 ICM), 每四年舉行一次, 由國際數學聯盟主辦。

<sup>7</sup>Alberto Calderón (1920~1998), 阿根廷數學家, 於偏微分方程和奇異積分算子的研究有重要貢獻。

<sup>8</sup>Ronald Raphael Coifman, 數學家, 現任教耶魯大學 (Yale University), 研究興趣包括基波理論和奇異積分。

<sup>9</sup>Alan McIntosh, 數學家, 研究興趣包括調和分析 and 偏微分方程。

<sup>10</sup>Yves F. Meyer (1939~), 法國數學家, 基波理論之父之一。

然後我聽到這個水波問題，看起來有相似的地方，我就想，何不試試這個呢？當然，在過程中，我瞭解了泰勒符號條件 (Taylor sign condition) 很重要，在 Thomas Beale、Tom Hou<sup>11</sup> 和 Lowengrub<sup>12</sup> 的論文中假設了這個條件。那時候我在西北大學，在那裏很容易看到波浪，因為學校就在密西根湖邊。我看著波浪，發現就算它翻過來，也沒有破碎，它不應該破碎，這個條件無論如何都應該是對的，然後我證明了它。

劉：很多人希望自己也可以說「這應該是對的，然後我證明了它。」

鄔：在我看來它是對的，但是實際上剛證明出來的時候許多人都還不相信。他們說浪一旦翻過來，就應該破碎了，它是不穩定的。但是在我看來，雖然翻過來了，仍然是好的，因為觀察的時候，必須把風以及其它東西造成的效應區隔出來。來這裡之前，我在香港訪問。那裡有人問我：「你做實驗嗎？」我說：「我不做，但是我觀察波浪。」「可是你很難區隔出風的效應……」確實，不過我認為如果觀察夠用心、夠仔細，你會知道到底是怎麼一回事。既然你提起調和分析，我可以說調和分析提供一種語言，應該說是一種工具。

尤：是一種載體。

鄔：對，是一種載體，但這不是全部。關鍵是如果你懂調和分析，那麼當你面對一個奇異積分時，你不會害怕；調和分析的知識讓你有一個基本的感覺，知道它什麼時候有界，為什麼有界。不過要解決問題，你必須了解方程式的本質，而這不僅只是調和分析。

劉：因為每個情況都不同。

鄔：對，這是最重要的部份。一旦把水波問題化約成一個邊界上的問題，就會得到奇異積分，就必須處理這個奇異積分。比方說你知道什麼時候  $u \times v$  是有界的：你知道當  $u$  是有界的， $v$  是有界的，那麼  $u \times v$  就會有界。可是現在我們有一個積分的形式 (integral form)，也想知道它什麼時候有界，而調和分析讓你對於它是否有界、什麼時候應該有界，有些基本的概念。一般來說，如果是一個直接了當的方程式， $u_t - \Delta u = u^2$ ，你直接去解它就是了。但如果方程中包含著某些積分的形式，你不免擔心，這個積分是什麼意思。如果你熟知調和分析，你會說，OK，這是我可以處理的，我不需要擔心。

劉：所以你不會把注意力放在不必要的地方。

鄔：沒錯。只需要專注在需要了解的地方，也就是方程本身，而不是顧慮這個積分是否有界或是在什麼意義下有界。

尤：那給了你信心。

鄔：正是。不會為一些基礎的東西而分心。

---

<sup>11</sup>Thomas Yizhao Hou, 數學家, 研究興趣包括渦流動力學和計算。

<sup>12</sup>John S. Lowengrub (1964~), 美國數學家, 研究興趣包括渦流動力學和多相流。

劉：這跟你從動力系統得到的幫助有點不同，對吧？

B：對，有一點不一樣。

鄔：可能一樣。

B：我想你要強調的是，在你的情況，調和分析讓你能夠專注在需要研究的部份，但這不是標準的調和分析；而我換了很多主題，也寫了一些測度論和線性傳遞 (linear transport) 的論文。我剛開始做數學的時候，碩士論文寫的是動力系統，然後做了一些測度論，接著改做雙曲方程 (hyperbolic equation)。我完全從零開始，之前動力系統並沒有任何對雙曲方程直接或是甚至接近的應用。事實上，中心流形只是其中的一小部份，因為動力系統是個很廣、涵蓋很多部份的科目，不變流形只是其中的一小塊。說起來我只是運氣好。

鄔：我覺得沒有幸運這種事。可能直覺上你覺得這個行得通。

劉：在比較表面的層次上，可以說是運氣好；做出這樣深度的研究，那就不可能是運氣好。你會碰到某個東西，那是運氣。

鄔：你得往那個方向走才會遇到，是吧？那不是幸運，因為你有那麼多方向可以走。

劉：釋賢，我不大清楚你怎麼最後會去研究邊界關係 (boundary relation)。在偏微分方程裡有初始值問題、邊界值問題，可是你做的是不一樣的東西。

尤：大家覺得我會試著走相反的方向。我相信如果問題經過那麼久還在那兒，一定有什麼地方出錯了，沒做對，因此做不出結果，所以要回歸最基本的地方。我決定從頭開始重新思考這個問題。舉例來說，當大家都用一個方法做問題，我總會試試別的方法，看看會發生什麼事。當我檢視這、檢視那，發現有很多東西含混在一起，所以我有機會思考什麼才是真正應該探究的東西。我捨棄了很多別人已經建立的東西，從零開始。如此，去掉了知識的包袱，可以自由地、無拘束地看東西，最後所有的事都變得很簡單。

劉：我想每個年輕人都要自由，不過這樣常常讓他們變成遊民。所以這種想要自由的渴望絕對不是能夠成就的充分理由。

尤：那是情感。

鄔：既有的成規也許有其意義，你不能把它都摧毀掉。

尤：我覺得應該要摧毀。成規不代表一定得遵從。例如，亞里斯多德的學說風行了兩千年，可是化學出現後，就需要做更深入的探究。

B：那是人們對於亞里斯多德<sup>13</sup>的詮釋。我認為亞里斯多德對於新的概念是很開放的，人們誤解了他。

尤：成規是可以的，但是不要把它變成宗教。

<sup>13</sup>Aristotle (384 BC~322 BC), 希臘哲學家，和柏拉圖、蘇格拉底一起被譽為西方哲學的奠基者。



B: 人們喜歡有人可以告訴他們該做什麼。

鄔: 對, 那很不幸。其實我很年輕的時候, 總是覺得應該要跟隨什麼。或者說, 至少我不知道要做什麼; 那是一段很黯淡的日子, 然後, 我做水波, 用自己的方式做, 從此感覺脫胎換骨, 對於做研究才真正樂在其中。

尤: 回到太平間的問題。我從頭開始, 檢視所有的東西, 發現每個步驟都有困難的地方, 有些東西破壞了所有的程序。我也試過以逆變換 (inverse transformation) 的方式去做, 等等, 可是初始數據 (initial data) 在那裡, 我發現哪裡也去不了, 卡住了很久。那麼, 何不拿掉初始數據! 拿掉初始數據之後, 所有事情都不一樣了。我們的教育是這樣的, 在偏微分方程課, 分離變數, 把邊界值拿掉, 考慮初始值問題, 全部都是齊次項。我們的知識是這樣來的, 回頭去看才發現初始數據是問題的癥結。

劉: 你求邊界關係, 初始和邊界數據給你困難, 於是你兩者皆拋。

尤: 對。國中、高中的時候, 我們學習如何控制參數。做物理實驗的時候, 不會把複雜的東西都放在一起。我想數學可以跟做實驗一樣, 要簡化問題, 嘗試找出困難的主要原因。

劉: 我聽了你們三位敘述為何做目前的題目、如何進行、又如何得出結果, 可是基本上我覺得這其中仍有神祕不可言說的地方。

鄔: 像釋賢說的, 你必須真正給自己自由。

B: 你選擇做一個問題, 不只因為你喜歡它, 也因為知道解決那個問題時會學到新東西。

劉: 你有那個想望。

B: 不然就算問題解決了, 什麼也沒學到。

鄔: 你能夠發掘出一些未知的東西。

尤: 你不必創造新東西, 只是做出一些東西。

鄔: 其實是想要了解一些不曾了解的東西。

劉: Stefano, 我知道你在做測度論, Pisa 學派或是義大利學派的東西。一直以來你都主張測度論是真實的、重要的。

B: 我覺得測度論對於許多如多維雙曲方程尚未解決的問題, 將會有根本上的影響, 這就是為什麼我從完全不相關的問題開始。我有一點背景, 因為博士班的前兩年做測度論, 後來才換了。我喜歡測度論, 一方面因為它是完全理論的, 你可以用測度論重新有系統的表述數學邏輯, 產生關於矛盾的問題。一旦空間變得很弱, 或一旦假設變寬, 可以出現失序的狀況; 可是另一方面, 因此可以把很多方程式解釋為測度的傳遞 (transport), 這樣一來, 解就不再是古典解, 甚至不是弱解, 甚至不是可以計算的。測度的非線性 (nonlinearity) 沒有意義, 因為它不是函數, 你一無所有; 但是這個障礙 (obstruction) 讓你專注在重要的東西上, 例如消散

(dissipation), 因為消散是定義在測度上的。有些情形, 例如可壓縮 Euler 方程的消散, 已經可以做出來了, 不過這只是我的詮釋。我們應該可以把方程式重寫成測度或空間的運動, 這些測度和空間描述局部狀態。因此, 測度是一個更為複雜的東西, 實際上已經不再是局部了, 其意義需要加以詮釋, 我覺得這是一件很好的事。數學裡很重要的一部份是給先驗上本無意義的事情賦予意義。而數學內在的核心在於: 你在一些事實之間。我現在想要思考的是, 即便只有公式, 是現實裡不存在的東西, 如果理論正確, 仍然可以正確詮釋, 通過正確的詮釋, 對於現實將有新的體悟。許多問題互相關聯, 現在沒有人能夠賦予這些問題意義。十到十五年來, 有許多被規避掉、尚未解決的問題, 它們本身很有趣, 這些問題引領我們汲取知識, 取得工具, 提示未來的方向。

劉: 關於可壓縮流, 你的觀點很受歡迎, 因為現在有個危機, 就是解應該在什麼函數空間裡, 你提出了不一樣的說法。

B: 即使方程不正確, 也可以的。我們需要的是有正確性質的時間軌跡, 為什麼必須是方程呢? 測度論是個廣泛的科目, 我並不了解它的所有面向, 但我可以用它做為基本的工具。有些偏微分方程問題和幾何測度論相關, 我真的很喜歡, 因為測度論很簡潔。另一方面, 它跟數學邏輯很相近, 讓它非常乾淨俐落。它有下面令人驚嘆的事實: 一個函數的基礎特性是它可以被局部化, 所以如果有一個點, 函數給你一個值。但測度不是這樣, 測度必須作用在一個集合, 或是特定的集合, 但它竟然也可以被局部化。這個很棒, 因此有一個測度關於另一個測度的導數概念, 以及其它許多可以討論的東西, 我對於測度論的看法主要是這樣。如果函數不足以描述你的系統, 譬如說, 有一個函數乘以勒貝格 (Lebesgue) 測度, 就不再是函數, 但卻是一個測度, 所以某種意義來說, 測度是函數觀念的延伸。因此, 或許在這個新空間裡, 可以解決以往無法解決的問題。例如, 在 F. Golse<sup>14</sup>的演講<sup>15</sup>中, 如果不用測度論處理, 會非常複雜。不過一旦把流 (flow) 詮釋成作用在測度上, 就會變得很乾淨俐落。

鄔: 測度論提供你描述時需要的語言, 所以你仍然有目的, 每件事都有個目的。

劉: 所以在博士生的訓練過程中, 必須在某一個核心領域有扎實的訓練, 對它有不錯的感覺, 並不只是解決一個好的問題就好。

B: 人的精神體力隨著年紀增長而降低, 但最重要的是時間少了, 這是最大的困難, 你可以海闊天空學習的時間變少了。仍然可以做, 不過時間變少了。

鄔: 我想年紀越長, 開始意識到有那麼多的問題可以解決, 去做可以用手邊已有工具解決的問題要簡單多了, 比較沒有動機學習完全無關的東西。

B: 不過這跟時間變少也有關係。

<sup>14</sup>François Golse (1962~), 法國數學家, 詳第 33 卷第 2 期「有朋自遠方來」專訪。

<sup>15</sup>2012 非線性分析國際研討會, 2012 年 10 月 29 日至 2012 年 11 月 2 日, 演講標題為 “Propagation of Monokinetic Measures with Rough Momentum Profiles”。

鄔: 你必須自覺的學習新東西; 必須要有強烈的願望。

B: 當學生的時候, 修課是基本的, 你選擇一個科目, 必須徹底了解。而教書, 是另一種強迫自己學東西的重要方法。

鄔: 我覺得如果想要把書教好, 教的科目必須是你有所涉入的, 比方說, 如果要我現在教代數, 我不知道代數所為何來, 我講課一定很枯燥無趣。

劉: 對了, 說到代數, 這些日子釋賢都在想著代數。

尤: 伽利略相信數學是上帝的語言<sup>16</sup>。我想代數是數學的精髓。

鄔: 真是這樣, 我同意。在我做了我的方程事實上不含二次非線性的工作之後不久, 做了一場公開演講。我們系主任 Mel Hochster<sup>17</sup>, 一位很好的代數學家, 跑來跟我說, 「其實你最關鍵的工作是代數。」我說, 「沒錯。」需要做代數運算把方程式重新制定成那個好的形式, 這些運算是等式, 不是不等式。

尤: 例如, 在代數裡, 可以做加減乘除這些事情。這不只是等式, 這是物件, 可以作運算, 可是如果把它分成幾個部份, 頭和手和腳等等四處分散, 移動其中一個, 就走樣了。不過有代數在那裡, 一個方程式是一個物件, 如果移動另一個物件, 仍然會有完美的平衡, 我特別要說的, 多項式就是這樣的一個物件。

鄔: 我不知道我們對於代數的觀點是否相同。

B: 代數是很廣的學科。

鄔: 至少對我而言, 我總想斤斤計較什麼都捨不得, 盡可能導出等式而非不等式。

劉: 或許可以把常說的一句話改成, 「每個好的理論的背後都有一個等式。」

鄔: 或許不是。我說教代數是指教範疇論、場論, 或是群論, 這些科目我無法告訴學生所為何來, 所以講課一定枯燥無味。只有在知道為什麼要做一件事時, 你所做的這件事情才有生命。

尤: 我舉個例子。在羅馬時代, 做乘法是很複雜的。不過知道怎麼做乘法和除法之後, 事情就不一樣了。所以上帝賦予的語言帶有某一種簡潔。大部份時間我的腦袋缺乏新的想法, 也無法了解新的問題, 不過有時候新想法是在潛意識裡產生的, 一定有誰把想法放到我的腦袋裡, 這是個謎。未來還有很多未知的物理現象要解決, 現在該是用物理和數學來探索新想法的時候了。

劉: 你是說未來有很多自然現象等著探索, 而數學將扮演核心的角色。

尤: 對, 數學仍然可以成為科學之母。

鄔: 不是可以, 它是, 它應該是。想想看, 無論數學家或物理學家都想要瞭解自然的規則, 如果這

<sup>16</sup>出自 1623 年在羅馬出版 Il Saggiatore 一書, 英文譯本 The Assayer 為 Stillman Drake 翻譯, 1957 年出版。

<sup>17</sup>Melvin Hochster (1943~), 美國數學家, 現為活躍的交換代數學家。

是既定的目標，我們就知道該做什麼。

尤：對，不過看看現在的情形，沒有物理學家或工程師願意認真跟你對話。

鄔：我今天早上跟曾根<sup>18</sup>教授談了一些，我們在很多事情上意見一致。

劉：我喜歡釋賢的說法，要強調就要誇大。你說「沒有」，不過當然你不是真的指沒有人。

鄔：只要有一些人認真跟我們說話，就夠好了。

劉：只能希望如此。你剛剛說要找出自然的法則。

鄔：了解自然的法則，就是要「了解」，因為各種現象就在身邊，但是我們想要了解其規律。

B：Newton<sup>19</sup>的方程式很簡單，卻可以從 Newton 到 Boltzmann<sup>20</sup>到 Euler<sup>21</sup>，這很複雜。雖然現實的模型很簡單，但現實很複雜，即便是在古典力學裡，都非常豐富。另一方面，只要不是有限集合，就像我們的情形，就沒辦法描述或演繹每個假設，這很複雜，也很有趣。

劉：釋賢，你有其他的結論嗎？

尤：有，數學家還是有希望，希望能夠占據科學的核心。

B：媒體把事情扭曲了，高能物理的領域中有很多數學家在做模型。許多模型沒有內在一致性，要從假設、法則開始證明一致性。這是數學的世界，沒有模型能夠做這件事。歐洲核子研究組織 (CERN<sup>22</sup>) 有個新機器，沒人注意到有多少數學家在那裡服務，數學家讓機器順利運作，也分析結果。人們以為那裡只有物理學家，但情況並不是這樣。

劉：今天很謝謝你們，未來希望能夠常在這裡見到你們三位，無論是單獨或一起來。

—本文訪問者劉太平任職中央研究院數學研究所，整理者甘濟維、陳麗伍為中央研究院數學研究所助理—

<sup>18</sup>Yoshio Sone 曾根良夫 (1936~)，日本物理學家，詳第 28 卷第 2 期「有朋自遠方來」專訪。

<sup>19</sup>Issac Newton (1643~1727)，英國物理學家、數學家，被譽為世界上最偉大、影響最深遠的科學家。

<sup>20</sup>Ludwig Eduard Boltzmann (1844~1906)，奧地利物理學家，科學界尊為「統計物理學之父」。

<sup>21</sup>Leonhard Euler (1707~1783)，瑞士數學與物理學先驅，在數學各領域，微分方程，拓樸，數論等有開創性重大的貢獻。

<sup>22</sup>The European Organization for Nuclear Research (舊稱 Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire)，簡稱 CERN，國際組織，目的是運作世界上最大型的粒子物理學實驗室。