數學傳播 36卷3期, pp. 81-85

三邊成等差數列的 Heron 三角形

邊　欣・李忠民

摘要: 對三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 給出三邊長的通解公式, 並得到周長、面積和內切圓半徑的若干有趣的性質。

關鍵詞: Heron三角形, 邊長, 等差數列。

三邊成等差數列的三角形有許多有趣的性質, 文 [1] 歸納總結出 21 個結果, 涉及代數、幾何、三角等方面。其中的一些結果形式簡明、優美, 例如下面的引理。

引理: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別爲 a、b、c, 且 $a+b=2c$, 則

$$\tan\frac{\angle A}{2}\tan\frac{\angle B}{2}=\frac{1}{3}。\tag{1}$$

本文進一步從數論方面探究三邊成等差數列的三角形的性質。

邊長和面積均是整數的三角形稱爲 Heron 三角形。若 Heron 三角形的三邊長互質, 稱爲本原 Heron 三角形。本文首先給出三邊成等差數列的本原 Heron 三角形的一般形式。

定理: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別爲 a、b、c, 且 $a+b=2c$, 則 $\triangle ABC$ 是本原 Heron 三角形, 當且僅當存在正整數 m、n, $(m,n)=1$, 3 不能整除 m, 使得

(1) 當 m、n 一奇一偶時, 有

$$a=m^2+9n^2,\quad b=3m^2+3n^2,\quad c=2m^2+6n^2。\tag{2}$$

且 $\triangle ABC$ 的面積爲

$$S=6mn(m^2+3n^2)。$$

(2) 當 m、n 均爲奇數時, 有

$$a=\frac{1}{2}(m^2+9n^2),\quad b=\frac{3}{2}(m^2+n^2),\quad c=m^2+3n^2。\tag{3}$$

且 $\triangle ABC$ 的面積為

$$S=\frac{3}{2}mn(m^2+3n^2)。$$

證明: 先證必要性。若 $\triangle ABC$ 是本原 Heron 三角形, 記 $\triangle ABC$ 的半周長和內切圓半徑分別為 p、r, 則 p、r 均為有理數。故

$$\tan\frac{\angle A}{2}=\frac{r}{p-a},\quad \tan\frac{\angle B}{2}=\frac{r}{p-b}$$

均為有理數。從而存在正整數 m、n、u、v, $(m,n)=1$, $(u,v)=1$, 使得

$$\tan\frac{\angle A}{2}=\frac{n}{m},\quad \tan\frac{\angle B}{2}=\frac{v}{u}。$$

根據式 (1), 得 $mu=3nv$, 故 3 不能同時整除 m、u, 否則 3 能整除 nv, 即 3 能整除 n 或 v, 這與 $(m,n)=1$ 或 $(u,v)=1$ 矛盾。不妨設 3 不能整除 m。

再由式 (1), 得

$$\tan\frac{\angle B}{2}=\frac{m}{3n}。$$

根據萬能公式, 得

$$\sin\angle A=\frac{2mn}{m^2+n^2},\ \cos\angle A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};$$
$$\sin\angle B=\frac{6mn}{m^2+9n^2},\ \cos\angle B=\frac{9n^2-m^2}{m^2+9n^2}。$$

又因為 $\sin\angle C=\sin\angle A\cos\angle B+\cos\angle A\sin\angle B$, 故

$$\sin\angle C=\frac{4mn(m^2+3n^2)}{(m^2+n^2)(m^2+9n^2)}。$$

根據正弦定理, 以 m^2+9n^2、$3m^2+3n^2$、$2m^2+6n^2$ 為三邊長的三角形與 $\triangle ABC$ 相似。又因為 $\triangle ABC$ 的三邊長互質, 故 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為

$$a=\frac{m^2+9n^2}{k},\quad b=\frac{3m^2+3n^2}{k},\quad c=\frac{2m^2+6n^2}{k}。\tag{4}$$

其中 k 為 m^2+9n^2、$3m^2+3n^2$、$2m^2+6n^2$ 的最大公因數。

注意到 3 不能整除 m, 故 m^2+9n^2、$2m^2+6n^2$ 都不能被 3 整除。從而 3 不能整除 k。

若奇質數 $q>3$ 能整除 k, 由 $2\times(3m^2+3n^2)-(2m^2+6n^2)=4m^2$ 可知 q 能整除 m; 再由 $2\times(m^2+9n^2)-(2m^2+6n^2)=12n^2$ 可知 q 能整除 n, 這與 $(m,n)=1$ 矛盾。從而對任意的奇質數 $q>3$, q 不能整除 k。

下面分兩種情況討論。

(1) 當 m、n 一奇一偶時。易知 m^2+9n^2、$3m^2+3n^2$ 均爲奇數, 故 2 不能整除 k, 從而 $k=1$。由式 (4), 得

$$a=m^2+9n^2,\quad b=3m^2+3n^2,\quad c=2m^2+6n^2。$$

容易驗證

$$\begin{aligned}
a+b+c&=6(m^2+3n^2),\\
a+b-c&=2(m^2+3n^2),\\
a+c-b&=12n^2,\\
b+c-a&=4m^2。
\end{aligned}$$

利用 Heron 公式得 $\triangle ABC$ 的面積

$$S=6mn(m^2+3n^2)。$$

(2) 當 m、n 均爲奇數時。易知 m^2+9n^2、$3m^2+3n^2$ 均爲偶數, 但都不能被 4 整除, 從而 $k=2$。由式 (4), 得

$$a=\frac{1}{2}(m^2+9n^2),\quad b=\frac{3}{2}(m^2+n^2),\quad c=m^2+3n^2。$$

類似(1) , 可得 $\triangle ABC$ 的面積

$$S=\frac{3}{2}mn(m^2+3n^2)。$$

再證充分性。易知由式 (2) 或式 (3) 確定三邊長的 $\triangle ABC$, 其三邊 a、b、c 與面積 S 均是整數, 且 $a+b=2c$。再根據必要性的證明可知 a、b、c 互質。故 $\triangle ABC$ 是三邊成等差數列的本原 Heron 三角形。

綜上所述, 定理成立。證畢。

根據定理中的式 (2)、式 (3) 及其證明, 容易得到下述與本原直角 Heron 三角形 (即本原畢達哥拉斯三角形) 相同的幾個性質。

推論1: 設 $\triangle ABC$ 是三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 則
(1) $\triangle ABC$ 的三邊長爲兩奇一偶;

(2) $\triangle ABC$ 的三邊長兩兩互質;
(3) $\triangle ABC$ 有且僅有一條邊被 3 整除;
(4) $\triangle ABC$ 的面積是 6 的倍數。

本原畢達哥拉斯三角形的周長不一定是 6 的倍數, 但其面積可以是周長的任意正整數倍, 且內切圓半徑可以是任意正整數。對應地, 三邊成等差數列的本原 Heron 三角形有如下性質。

推論2: 設 $\triangle ABC$ 是三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 則

(1) $\triangle ABC$ 的周長是 6 的倍數;

(2) $\triangle ABC$ 的面積可以是周長的任意正偶數倍, 但不能是周長的奇數倍;

(3) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑可以是任意的正奇數, 或者爲 4 的任意正整數倍, 但不能是不被 4 整除的偶數。

證明: (1) 根據定理的證明易知 $a+b+c$ 是 6 的倍數。

(2) 當 m、n 一奇一偶時。根據定理的證明可得

$$S=mn(a+b+c)。$$

因爲 mn 是偶數, 故此時不存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其面積是周長的奇數倍。

對任意的正偶數 $x=2^y z$, 其中 y 是正整數, z 是正奇數。令 $m=2^y$, $n=z$, 則 m、n 一奇一偶, $(m,n)=1$, 3 不能整除 m, 且 $S=x(a+b+c)$。即存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其面積是周長的任意正偶數倍。

當 m、n 均爲奇數時。根據定理的證明可得

$$S=\frac{1}{2}mn(a+b+c)。$$

因爲 mn 是奇數, 故 $\dfrac{1}{2}mn$ 不是整數。即此時不存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其面積是周長的整數倍。

(3) 當 m、n 一奇一偶時。根據定理的證明可得三角形的內切圓半徑

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=2mn。$$

因爲 mn 是偶數, 故此時不存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其內切圓半徑是2的倍數但不是4的倍數。

對任意的正偶數滿足 $u = 2^{v+1}w$, 其中 v 是正整數, w 是正奇數。令 $m = 2^v$, $n = w$, 則 m、n 一奇一偶, $(m, n) = 1$, 3 不能整除 m, 且 $r = u$。即存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其內切圓半徑爲 4 的任意正整數倍。

當 m、n 均爲奇數時。根據定理的證明可得三角形的內切圓半徑

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = mn。$$

因爲 mn 是奇數, 故此時不存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其內切圓半徑是偶數。

對任意的正奇數 t。令 $m = 1$, $n = t$, 則 m、n 均爲奇數, $(m, n) = 1$, 3 不能整除 m, 且 $r = t$。即存在三邊成等差數列的本原 Heron 三角形, 其內切圓半徑是任意的正奇數。

綜上所述, 推論2成立。證畢。

對比畢達哥拉斯三角形, 三邊成等差數列的 Heron 三角形還有哪些與之相似的有趣性質? 這是一個有待進一步研究的課題。

致謝: 感謝審稿人對此文提出的寶貴意見。

參考文獻

1. 張奠宙, 戴再平。中學數學問題集[M]。上海: 華東師範大學出版社, 1996。
2. Albert H. Beiler 著, 談祥柏譯。數論妙趣 [M]。上海: 上海教育出版社, 1998。
3. 沈康身。數學的魅力(1) [M]。上海: 上海辭書出版社, 2004。
4. 邊欣。關于完美海倫三角形的存在性[J]。數學教學, 2008(10): 34-35。
5. 邊欣。Heron 三角形的一般表達式及其應用 [J]。數學通訊, 2011(2下半月教師): 42-44。

—邊欣任教天津市天津師範大學數學系, 李忠民任教天津市天津大學管理與經濟學部—