數學傳播 36卷3期, pp. 77-80

一道作為北京大學碩士研究生招生考試考題的高中數學題

張雲峰

2007年北京大學數學科學學院的研究生招生考試的試卷中出現了一道高中水準的考題。據筆者的一位當年參加了考試的同學透露, 這道題竟然難倒了包括他本人在內的大部分考生。在好奇心的驅使和同學的建議下, 筆者對這個問題進行了深入細緻的分析。分析與解答的過程讓筆者體會到不少樂趣, 而且竟有了不少心得, 這裏就將筆者的一點收穫奉獻出來與各位讀者一起分享。

首先要告訴讀者, 這個問題是一個幾何問題, 它並沒有想像中的那麼困難, 也不需要知道額外的知識, 只需要讀者瞭解空間向量的基礎知識, 特別是長方體的畢氏定理。爲便於讀者, 我們把這個定理 (向量形式) 表述如下:

空間的畢氏定理: 設向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 兩兩垂直, 令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 則有

$$\|\alpha\|^2 = \|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \|\alpha_3\|^2$$

好了, 現在可以敘述這個問題了。

問題: 設 S 是半徑爲 1 的球面, P 是單位球內一點 ($\|OP\| < 1$), 從點 P 出發引三條兩兩垂直的射線交球面 S 於 A, B, C 三點, 以 PA, PB, PC 爲棱構造長方體, 設點 Q 爲所作長方體與 P 相對的頂點, 求點 Q 的軌跡。

分析與解: 讀者可以想見, 在題目的所有條件中, 對解決問題最有用的一個條件是“點 Q 爲所作長方體與 P 相對的頂點”, 這啓發我們想到長方體的畢氏定理, 按此定理, 將得到點 Q 滿足的一個基本關係

$$\overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 \tag{1}$$

然而, 現在等式的右邊是未知量, 我們要想辦法把它們替換掉。最容易想到的自然是利用

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$$
$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$$

於是, (1) 式右邊成爲

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2\\&\quad=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})^2+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})^2+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})^2\\&\quad=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OP}^2\\&\quad=3+3\overrightarrow{OP}^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}\end{aligned}\tag{2}$$

然而 (2) 式並沒有將未知量消滅乾淨, 注意到等式最右邊的已知量表現爲 $\overrightarrow{OP}$, 所以我們不妨將 (1) 式的左邊也用 $\overrightarrow{OP}$ 來表達, 這就是

$$\overrightarrow{PQ}^2=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})^2=\overrightarrow{OQ}^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}^2\tag{3}$$

現在聯合 (1), (2), (3) 就有

$$\overrightarrow{OQ}^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}^2=3+3\overrightarrow{OP}^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}$$

即

$$\overrightarrow{OQ}^2=3+2\overrightarrow{OP}^2-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OP}\tag{4}$$

現在只需要求出唯一的未知量

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OQ},$$

這個未知量容易從關於點 P,A,B,C,Q 的基本關係式

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\tag{5}$$

求出, 事實上, (5) 式給出

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}$$

即

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OP}\tag{6}$$

將 (6) 式代入 (4) 式得到

$$\overrightarrow{OQ}^2 = 3 + 2\overrightarrow{OP}^2 - 2 \cdot 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = 3 - 2\overrightarrow{OP}^2$$

從而點 Q 的軌跡方程就是

$$\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = 3 - 2\|\overrightarrow{OP}\|^2 \tag{7}$$

從幾何上講, 它是一個中心在原點半徑爲 $\sqrt{3 - 2\|\overrightarrow{OP}\|^2}$ 的球面。

到此爲止, 我們對問題的分析就結束了, 讀者如果不喜歡這個分析形式作爲解答, 很容易就可以把上面的分析過程轉換成一貫的綜合解答步驟。但是, 事實上, 通常的綜合形式並不能對學生往後獨立地思考問題、解決問題提供任何有益的啓發或幫助。這將使得讀者很容易養成一個壞習慣, 就是, 一看到題目就開始想是不是有某個已知的公式可以直接套用?就以同一道題爲例, 筆者這裏給出一個綜合的證明如下:

另解:

首先證明下面的事實:

若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 兩兩垂直, 則對於任意的向量 β 有

$$\|\beta + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\|^2 + 2\|\beta\|^2 = \|\beta + \alpha_1\|^2 + \|\beta + \alpha_2\|^2 + \|\beta + \alpha_3\|^2 \tag{8}$$

證明只是平凡的展開驗證。

現在在 (8) 中令 $\alpha_1 = \overrightarrow{PA}$, $\alpha_2 = \overrightarrow{PB}$, $\alpha_3 = \overrightarrow{PC}$ 以及 $\beta = \overrightarrow{OP}$, 並注意到基本關係 (5) 就是 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \overrightarrow{PQ}$, 從而有

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}\|^2 + 2\|\overrightarrow{OP}\|^2 &= \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}\|^2 + \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB}\|^2 + \|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}|^2 \\ &= \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2 \\ &= 1 + 1 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

也就是

$$\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = 3 - 2\|\overrightarrow{OP}\|^2$$

現在我們已經證明了點 Q 一定位於球面 (7) 上, 下面我們證明球面上的每一點都可以由此得到。即, 我們要證明, 對球面 (7) 上的任意一點 Q, 存在單位球面上三個點 A, B, C 使得 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 兩兩垂直且 $PQ = PA + PB + PC$。我們先考慮一個簡單的情形: 所給的 P 就是原點。此時 Q 所在的球面是中心在原點半徑爲 $\sqrt{3}$ 的球面, 我們想求出單位球面上

的三個點 A, B, C 使得 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 兩兩垂直且 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。很明顯, 由於球面的旋轉對稱性, 我們只需考慮 $Q=Q_0=(1,1,1)$ 這一特殊情況。很明顯, 這時候我們要取的 A, B, C 三點就是 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$。當 Q 爲球面上任意一點時, 我們可以利用一個旋轉 $\mathcal{R}$ 使得 $Q=\mathcal{R}Q_0$, 這樣對應的 A, B, C 可以取爲 $\mathcal{R}(1,0,0)$, $\mathcal{R}(0,1,0)$, $\mathcal{R}(0,0,1)$。這樣我們就證明了在 $P=O$ 的特殊情形下, Q 的軌跡爲整個球面。一般情形的證明我們留給聰明的讀者, 這裏從略。 $\square$

上述解法相當簡潔明瞭, 但是恐怕很難有學生一開頭就想得到, 事實上, 筆者也是深入地研究了前面的分析過程之後才得到了這個極爲簡化的綜合步驟的。筆者相信, 很多讀者會同意筆者的以下觀點, 雖然第二個解法簡單別致, 但是並不自然。原因是, 一開頭冒出的那個事實太突兀了, (8) 式根本來得不自然, 甚至讓人覺得這個東西從天而降、莫名其妙。事實上, 這個事實正是隱藏在整個題目背後的實質所在, 它正是筆者對前面的分析過程進一步剖析要點提煉出來的結論。這個事實並不是無中生有, 只不過它隱藏得太深, 以致於你即便做完了這個題目不再進一步深入挖掘的話也未必發現得了。對於那些想要知道筆者是如何提煉出這個事實的讀者, 建議你考慮一下在平面情形的類似命題是什麼, 如果你能想到, 那麼 (8) 式只不過是它在三維空間的一個平凡的推廣而已。

最後, 筆者還瞭解到, 這個題目原來大有來頭, 它竟是 1978 年第 20 屆國際數學奧林匹克 (IMO) 競賽的第二題。據筆者所知, 此前還沒有一個像上邊那樣簡短的證明出現。

致謝: 本文在寫作過程中得到首都師範大學研究生林開亮同學的鼓勵, 特表感謝。感謝審稿人發現作者原文中出現的一個錯誤。

—本文作者任教中國河北省正定中學—