數學傳播　36卷3期　民101年9月

對向量方程 $\vec{x}^2+\vec{b}\vec{x}+c=0$ 的一些探討

劉步松

係數爲實數的一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 是大家所熟悉的, 如果將方程中的未知量 x 改爲未知向量 $\vec{x}$ (本文中的向量指平面向量), 而將常數 b 改爲常向量 $\vec{b}$, c 仍表示常數, 同時將實數的乘法改爲向量的數量積, 便得到一個含有未知向量 $\vec{x}$ 的向量方程

$$\vec{x}^2+\vec{b}\vec{x}+c=0 \qquad (*)$$

本文對方程 $(*)$ 探討如下一些問題: (1) 方程 $(*)$ 解的情況; (2) 方程 $(*)$ 類似於實數方程中的韋達定理; (3) 方程 $(*)$ 與圓的相交弦定理; (4) 方程 $(*)$ 與圓的割線定理。

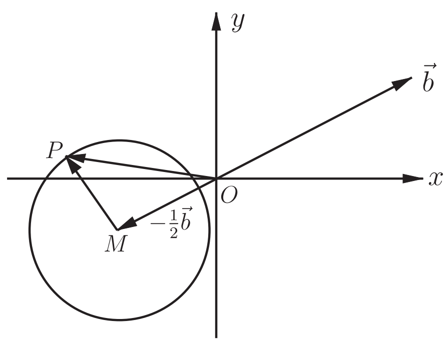
首先探討方程 $(*)$ 的解的情況。爲了求得方程的解, 將方程變形爲

$$\left(\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2=\frac{\vec{b}^2-4c}{4}$$

(1)、當 $\vec{b}^2-4c<0$ 時, 方程無解;

(2)、當 $\vec{b}^2-4c=0$ 時, 方程有一個解: $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{b}$;

(3)、當 $\vec{b}^2-4c>0$ 時, 爲了看出解的情況, 令 $r=\frac{\sqrt{\vec{b}^2-4c}}{2}$, 方程變爲: $[\vec{x}-(-\frac{1}{2}\vec{b})]^2=r^2$, 如果約定 $\vec{x}$ 及 $-\frac{1}{2}\vec{b}$ 的起點均爲原點的話, 則很明顯 $\vec{x}$ 的終點在以 $-\frac{1}{2}\vec{b}$ 的終點 M 爲圓心, 半徑爲 r 的圓上, 且這個圓上任意一點 P 所對應的向量 $\overrightarrow{OP}$ 均是方程 $(*)$ 的一個解。就是說, 方程 $(*)$ 有無數個解, 這些解的終點是一個圓, 以下我們稱這個圓爲方程 $(*)$ 的解圓, 如圖(一)。

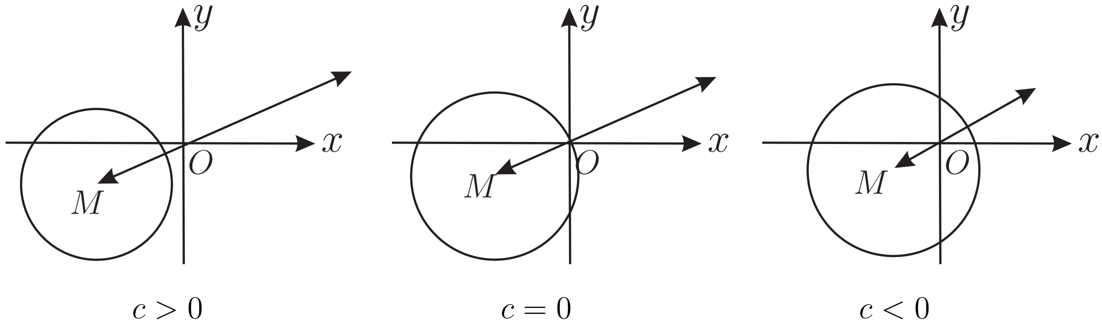


圖(一)

下面討論原點與解圓的位置關係。

因爲原點到圓心的距離爲 $|-\frac{1}{2}\vec{b}|$, 令 $|-\frac{1}{2}\vec{b}|>r=\frac{\sqrt{\vec{b}^2-4c}}{2}$, 解得 $c>0$, 則有結論:

當 $c>0$ 時, 原點在解圓外, 同樣討論知, 當 $c=0$ 時, 原點在解圓上, 當 $c<0$ 時, 原點在解圓內, 如圖 (二)。



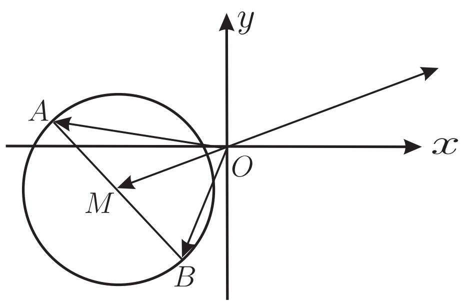
圖(二)

如圖 (三), 設方程 $(*)$ 有一個解圓, 其圓心爲 M, 過 M 作任意直徑 AB, 設 $\vec{x}_1=\overrightarrow{OA}$, $\vec{x}_2=\overrightarrow{OB}$, 則有性質:

(1) $\vec{x}_1+\vec{x}_2=-\vec{b}$

(2) $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=c$

這個性質類似於實數方程中的韋達定理。



圖(三)

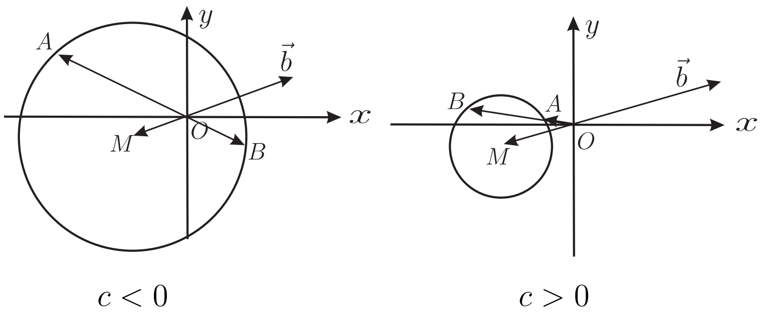
證明如下:

證: (1) 因爲 M 爲 AB 的中點, 所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$, 即 $\vec{x}_1+\vec{x}_2=2(-\frac{1}{2}\vec{b})=-\vec{b}$。

(2) 由 (1), $\vec{x}_2=-\vec{x}_1-\vec{b}$, 則 $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=\vec{x}_1\cdot(-\vec{x}_1-\vec{b})=-\vec{x}_1^2-\vec{b}\cdot\vec{x}_1$, 因爲 $\vec{x}_1$是方程 $(*)$ 的解, 所以 $\vec{x}_1^2+\vec{b}\vec{x}_1+c=0$, 即 $-\vec{x}_1^2-\vec{b}\vec{x}_1=c$, 從而有 $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=c$。

下面探討方程 $(*)$ 與圓的相交弦定理和圓的割線定理之間的關係。

設方程 $(*)$ 有一個解圓, 過原點 O 作直線交解圓於 A、B, 設 $\vec{x}_1=\overrightarrow{OA}$, $\vec{x}_2=\overrightarrow{OB}$, 則有性質: $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=c$ (定值)。當原點在解圓內時, 這個性質便是圓的相交弦定理, 當原點在解圓外時, 這個性質便是圓的割線定理, 如圖 (四)。



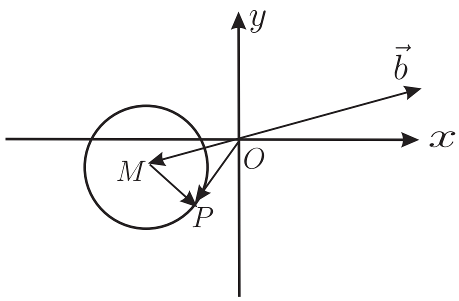
圖(四)

下面證明這個性質。

證: 令 $\vec{x}_2=k\vec{x}_1$ $(k\neq 1)$, 因爲 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ 都是方程 $(*)$ 的解, 從而 $\vec{x}_1^2+\vec{b}\vec{x}_1+c=0$ (1), $\vec{x}_2^2+\vec{b}\vec{x}_2+c=0$, 即 $(k\vec{x}_1)^2+\vec{b}\cdot(k\vec{x}_1)+c=0$, 得 $k^2\vec{x}_1^2+k\vec{b}\cdot\vec{x}_1+c=0$ (2), 將 (2) 式減去 (1) 式的 k 倍得: $(k^2-k)\vec{x}_1^2+c-kc=0$, 因爲 $k\neq 1$, 約去 $k-1$ 得$k\vec{x}_1^2-c=0$, 即 $\vec{x}_1\cdot k\vec{x}_2=c$, 就是 $\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2=c$。

上面這個性質也可以說是圓的相交弦定理和圓的割線定理的統一。

上面的證明用到了 $k\neq 1$, 當 $k=1$ 時, 即割線變爲切線時性質仍然成立, 如圖 (五)。



圖(五)

證明如下:

證: 如圖 (五) 中, 設 OP 是解圓的切線, P 爲切點, $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}$, 令 $\overrightarrow{OP}=\vec{x}$, 因爲 $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{OP}$, 所以 $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM})\cdot\overrightarrow{OP}=0$, 即 $[\vec{x}-(-\frac{1}{2}\vec{b})]\cdot\vec{x}=0$, 化簡得 $2\vec{x}^2+\vec{b}\cdot\vec{x}=0$, 因爲 $\vec{x}$ 是方程 $(*)$ 的解, 所以 $\vec{x}^2+\vec{b}\cdot\vec{x}+c=0$, 從而 $2\vec{x}^2+\vec{b}\cdot\vec{x}=(\vec{x}^2+\vec{b}\cdot\vec{x}+c)+(\vec{x}^2-c)=0$, 即 $\vec{x}^2-c=0$, 從而 $\vec{x}^2=c$。

—本文作者任教江蘇省運河高等師範學校—