

級數求和、對消和與對消乘積(上)

林宜嬪 · 張福春

摘要: 本文主要探討對消在數列的和與乘積之應用, 對消和分成四個方法: 反差分、部份分式、三角函數及階乘函數進行討論。反差分方法又可分為下降階乘冪、等比型及三角函數三種型式, 其概念著重於將級數轉換為離散型之積分型式; 部份分式與三角函數主要概念著重於對級數中的一般項進行拆解, 或藉由乘上適當的輔助量之後, 級數可以進行對消, 進而求得解。因階乘函數並無一般的型式, 故不作深入探討, 只提供相關例題。對消乘積是延續對消和的概念去探討乘積題型, 分為平方差和三角函數兩部分作介紹, 主要概念均為藉由乘上適當的輔助量之後, 乘積可以進行對消, 進而求得解。

美國數學會 2010 年分類索引 40C99, 47B39。

關鍵詞: 數列、級數、反差分、下降階乘冪、部份分式、三角函數、對消和、對消乘積、牛頓定理。

1. 前言

求和是數列的重要運算之一, 而一般數列的級數和, 除了常見的等差及等比級數公式解之外, 我們將介紹其他計算技巧來求和。

例如: 求 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ 之值? 首先將 $\frac{1}{k(k+1)}$ 改寫為 $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, 則級數為

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

□

上述例題所使用的方法稱為對消，對消 (*telescoping*) 是數列 $\{a_k\}$ 求和常使用技巧之一，透過“對消”來計算級數和，即

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (A_{k+1} - A_k)$$

主要目的在於將 a_k 拆解成 $A_{k+1} - A_k$ 的形式，進而得到級數和為 $A_{n+1} - A_1$ 。而對消和的困難點在於如何將 a_k 表示成 $A_{k+1} - A_k$ 進行對消，換言之，若能找出 A_k ，即可得級數和為 $A_{n+1} - A_1$ 。

而對消和最重要的一個應用，即證明微積分基本定理。其想法在於將積分範圍分成數個較小且有相同長度的子區間，利用面積求和近似所求積分。而在求面積總和時，可利用對消和技巧讓積分得到一個較簡單的型式，詳細之證明請參考 Larson and Edwards [?, Theorem 4.9, pp. 282-283]。

同理，對消乘積是延續對消和的概念。例如：求 $\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$ 之值？直接將乘積展開可得

$$\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \square$$

對消乘積主要是透過鄰項對消或跳項對消進行化簡，但一般題目大都無法可以直接看出可對消的項，因此在之後的文章中也會討論相關的對消乘積問題。

本文將對數學競賽中對消求和及乘積之題目進行探討，若想對反差分有更深入的了解，可參閱 Miller [?], Graham, Knuth and Patashnik [?], 書中均對反差分提供詳細的介紹，常豐 [?] 對反差分求和有相關討論，另外，關於部份分式求和題型可參閱 陶懋頌、單墀、蘇淳、嚴鎮軍 [?]，更詳細的對消類型題目在 Andreescu and Gelca [?], Andreescu and Gelca [?] 兩本書中均有對消和及乘積之題目介紹。

本文分成五個小節，前面四個小節主要針對對消和作討論，第五小節則是對消乘積題目的探討。第 2 節介紹利用反差分的概念去求級數和，其原理與對消性質相同，但經由巧妙地將鄰項對消之後，便發現級數可轉換成類似離散型的積分。常見的反差分可分為下降階乘幕、等比型及三角函數三種類型，將於第 2 節中的各子節進行探討。第 3 節介紹以部份分式的概念求級數和，若級數一般項屬於有理多項式且可對消求和，則將它分解成數個較簡單的分式進行對消求和，但必須注意此種方法並不限定於鄰項對消。第 4 節則是介紹一般項為三角函數的級數，此求和類型題目大多藉由乘上一個適當的輔助量進行對消，與第 2 節中介紹的解法有所不同，在此節中的困難點在於如何找出輔助量！第 5 節為階乘求和題型應用，因階乘函數並無一般的型式，故不作深入探討，只提供相關例題。第 6 節中將對消乘積分成平方差、半角與倍角公式及積

化和差三種類型, 第 6.1 節探討平方差對乘積題型之應用, 此類型題目不限於平方差, 可推廣到立方差及特殊的平方差型式, 由競賽試題中可發現對消型及合併型均是常見的題目類型。在對消乘積題型中, 三角函數有時也扮重要角色, 在此細分為半角與倍角公式及積化和差兩種類型, 第 6.2 節是利用半角與倍角公式來改寫題目, 藉由乘上適當的輔助量進行對消或合併, 第 6.3 的原理如同第 6.4 節。

2. 反差分

差分與反差分的關係類似於微分和積分的關係。在介紹反差分之前, 先介紹差分的定義:

定義 1: (差分 (*finite difference*)) 設數列 $\{A_k\}$, 其差分 ΔA_k 定義為

$$\Delta A_k = A_{k+1} - A_k \quad (1)$$

p 階的差分定義為

$$\Delta^p A_k = \Delta(\Delta^{p-1} A_k) = \Delta^{p-1} A_{k+1} - \Delta^{p-1} A_k, \quad p \geq 1$$

且 $\Delta^0 A_k = A_k$ 。

舉例來說, 由定義可知函數 x^2 與 $\log x$ 的一階與二階差分為:

$$1. \Delta x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

$$2. \Delta \log x = \log(x+1) - \log x = \log\left(\frac{1+x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \Delta^2 x^2 &= \Delta(x+1)^2 - \Delta x^2 \\ &= [(x+2)^2 - (x+1)^2] - [(x+1)^2 - x^2] \\ &= (x+2)^2 - 2(x+1)^2 + x^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \Delta^2 \log x &= \Delta \log(x+1) - \Delta \log x \\ &= [\log(x+2) - \log(x+1)] - [\log(x+1) - \log x] \\ &= \log(x+2) - 2\log(x+1) + \log x \\ &= \log \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

又 p 階差分關係列表如表 1 所示。

表 1: 水平差分表

k	A_k	ΔA_k	$\Delta^2 A_k$	$\Delta^3 A_k$	$\Delta^4 A_k$	$\Delta^5 A_k$	$\Delta^6 A_k$
-3	A_{-3}	ΔA_{-3}	$\Delta^2 A_{-3}$	$\Delta^3 A_{-3}$	$\Delta^4 A_{-3}$	$\Delta^5 A_{-3}$	$\Delta^6 A_{-3}$
-2	A_{-2}	ΔA_{-2}	$\Delta^2 A_{-2}$	$\Delta^3 A_{-2}$	$\Delta^4 A_{-2}$	$\Delta^5 A_{-2}$	
-1	A_{-1}	ΔA_{-1}	$\Delta^2 A_{-1}$	$\Delta^3 A_{-1}$	$\Delta^4 A_{-1}$		
0	A_0	ΔA_0	$\Delta^2 A_0$	$\Delta^3 A_0$			
1	A_1	ΔA_1	$\Delta^2 A_1$				
2	A_2	ΔA_2					
3	A_3						

例如, 數列 $\{k^3\}$ 的水平差分表如表 2 所示。

表 2: 數列 $\{k^3\}$ 的水平差分表

k	k^3	Δk^3	$\Delta^2 k^3$	$\Delta^3 k^3$	$\Delta^4 k^3$
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	0
2	8	19	18	6	
3	27	37	24		
4	64	61			
5	125				

由表 2 也可驗證差分關係。

$$\Delta A_0 = A_1 - A_0$$

$$\Delta A_1 = A_2 - A_1$$

⋮

$$\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$$

更進一步, 可推得

$$\Delta^2 A_0 = \Delta A_1 - \Delta A_0 = A_2 - 2A_1 + A_0$$

$$\Delta^2 A_1 = \Delta A_2 - \Delta A_1 = A_3 - 2A_2 + A_1$$

⋮

$$\Delta^2 A_n = \Delta A_{n+1} - \Delta A_n = A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n$$

水平差分表將可應用到牛頓定理, 詳細內容在之後的例子中作說明。另外, 水平差分表在解決多項式配適與內插多項式的問題中是一個很重要的工具。

定理 2: 若 c 為常數, 則 $\Delta c = 0$ 。

證明: $\Delta c = c - c = 0$ 。 □

定理 3: 若 A_k 和 B_k 均為 k 的函數, 且 α 和 β 為常數, 則

$$\Delta^n(\alpha A_k + \beta B_k) = \alpha \Delta^n A_k + \beta \Delta^n B_k$$

成立。

證明: 設 $n = 1$ 時, 則

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha A_k + \beta B_k) &= (\alpha A_{k+1} + \beta B_{k+1}) - (\alpha A_k + \beta B_k) \\ &= \alpha(A_{k+1} - A_k) + \beta(B_{k+1} - B_k) \\ &= \alpha \Delta A_k + \beta \Delta B_k \end{aligned}$$

設 $n = p$ 時,

$$\Delta^p(\alpha A_k + \beta B_k) = \alpha \Delta^p A_k + \beta \Delta^p B_k$$

成立, 則當 $n = p + 1$ 時,

$$\begin{aligned} \Delta^{p+1}(\alpha A_k + \beta B_k) &= \Delta^p(\alpha A_{k+1} + \beta B_{k+1}) - \Delta^p(\alpha A_k + \beta B_k) \\ &= (\alpha \Delta^p A_{k+1} + \beta \Delta^p B_{k+1}) - (\alpha \Delta^p A_k + \beta \Delta^p B_k) \\ &= \alpha \Delta^p(A_{k+1} - A_k) + \beta \Delta^p(B_{k+1} - B_k) \\ &= \alpha \Delta^p(\Delta A_k) + \beta \Delta^p(\Delta B_k) \\ &= \alpha \Delta^{p+1} A_k + \beta \Delta^{p+1} B_k \end{aligned}$$

故由歸納法得證。 □

回到求級數和的主題,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (A_{k+1} - A_k)$$

差分在級數和中所扮演的角色為找出一般項 a_k 的反差分 A_k , 使得可以有效率得到級數和。

定義 4: (反差分 (*antidifference*)) 對於給定的 a_k , 若存在另一個函數 A_k , 使得 $\Delta A_k = a_k$, 則稱 A_k 為 a_k 的反差分, 記為 $A_k = \Delta^{-1}a_k$ 。

定理 5: 對於給定的 a_k , 若存在反差分 A_k , 則有

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^q \Delta A_k = A_{q+1} - A_p$$

其中 $q \geq p$ 。

證明:

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^q \Delta A_k \quad (2)$$

$$= \Delta A_p + \Delta A_{p+1} + \cdots + \Delta A_q \quad (3)$$

$$= [A_{p+1} - A_p] + [A_{p+2} - A_{p+1}] + \cdots + [A_{q+1} - A_q] \quad (4)$$

$$= A_{q+1} - A_p \quad (5)$$

若仿照積分的記號, 將 (5) 的 $A_{q+1} - A_p$ 記為 $A_k \Big|_p^{q+1}$, 則

$$\sum_{k=p}^q a_k = A_k \Big|_p^{q+1} \quad (6)$$

因為在上標部份必須加一, 如 (6) 的上標 q 加一, 可注意到反差分記號與積分記號不完全相同。□

反差分的應用很廣泛, 將介紹利用反差分求下降階乘函數的級數和, 而常見的多項式、有理多項式也可經由轉換, 以下降階乘函數方式來求級數之和。

2.1. 下降階乘冪

在微積分中, 對於冪次函數 $f(x) = x^m$ 的微分和積分都很容易求得: 微分 $f'(x) = mx^{m-1}$ 和積分 $\int f(x) dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$ 。

如果差分有類似微分的簡潔結果, 對求和將有很大的幫助, 但不幸的是, 並沒有類似微分的簡單結果, 例如:

$$\Delta k^3 = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

但下降階乘冪有很好的差分結果, 有助於求和的計算, 其定義如下:

定義 6: (下降階乘冪 (*falling factorial*))

(a) 設 m 為非負整數, k 的 m 下降階乘冪為

$$k^{\underline{m}} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1) = \frac{k!}{(k-m)!}$$

下降階乘冪實際上也是排列 $P(k, m)$ 。

(b) 設 m 為正整數, k 的 $-m$ 下降階乘冪為

$$k^{\overline{-m}} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1)}$$

下降階乘冪的差分與反差分具有良好的性質, 其定理如下:

定理 7: (下降階乘冪的差分與反差分 (*difference and antidifference of falling power*))

設 m 為整數且不等於 0, 則下降階乘冪的差分為

$$\Delta k^{\underline{m}} = m k^{\underline{m-1}}$$

意即下降階乘冪的反差分為

$$\Delta^{-1} k^{\underline{m-1}} = \frac{1}{m} k^{\underline{m}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

證明: 證明分成兩部份 (a) $m > 0$ 時, (b) $m < 0$ 時。

(a) 若 $a_k = k^{\underline{m}} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1) = \frac{k!}{(k-m)!}$, $m > 1$, 則

$$\Delta a_k = \Delta k^{\underline{m}} \tag{7}$$

$$= [(k+1)k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+2)] - [k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)] \tag{8}$$

$$= m k^{\underline{m-1}} \tag{9}$$

即 $\Delta^{-1} k^{\underline{m-1}} = \frac{1}{m} k^{\underline{m}} + C$, $C \in \mathbb{R}$ 。

(b) 同理 $k^{\overline{-m}}$, $m < 0$ 有類似的結果:

$$\begin{aligned} \Delta k^{\overline{-m}} &= \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k-m)} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k-m-1)} \\ &= \frac{m}{k(k+1)(k+2)\cdots(k-m)} = m k^{\overline{-m-1}} \end{aligned}$$

即 $\Delta^{-1} k^{\overline{-m-1}} = \frac{1}{m} k^{\overline{-m}} + C$, $C \in \mathbb{R}$ 。 □

註：下降階乘冪的差分與 x^m 的微分 $\frac{d}{dx}[x^m] = mx^{m-1}$ 結果類似。下降階乘冪的反差分與 x^{m-1} , $m \neq 0$ 之不定積分 $\int x^{m-1} dx = \frac{1}{m}x^m + C$, $C \in \mathbb{R}$ 結果相似。

因此設 $a_k = k^m$, 由 (9) 可看出 $A_k = \frac{k^{m+1}}{m+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$ 。或許會注意到加總方法和微積分基本定理的相似性, 此種方法為反導數的離散型方法。

定理 8: (下降階乘冪的和 (*sum of falling powers*)) 設 n 為正整數, $m \in \mathbb{Z}$ 且不等於 -1 , 則

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{k^{m+1}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}$$

證明: 由定理 7 可知,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k^m &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{m+1} (k+1)^{m+1} + C \right) - \left(\frac{1}{m+1} k^{m+1} + C \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{m+1} (k+1)^{m+1} \right) - \left(\frac{1}{m+1} k^{m+1} \right) \right] \\ &= \frac{k^{m+1}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1} \quad \square \end{aligned}$$

例 1: 求級數和 $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ 。

解:
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1) &= \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \frac{1}{3} (k+1)^3 \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+2)^3}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \square \end{aligned}$$

常見的等差級數就是多項式其中一種形式, 因為其一般項可用多項式表示, 但除了我們熟悉的等差級數公式之外, 上述介紹的反差分概念也可應用在等差級數求和問題上。

回顧高中課程的等差級數和公式為: 等差數列首項為 a , 公差 d , 項數 n , 其中 $a, d \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 則級數和 S 為

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

例 2: 設等差數列首項為 a , 公差 d , 項數 n , 其中 $a, d \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 求 $\sum_{k=0}^{n-1} (a+kd)$ 之值。

解: 等差數列一般項為

$$a_k = a + kd, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

則等差數列前 n 項和為

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kd) &= \sum_{k=0}^{n-1} (ak^0 + k^1d) = ak^1 \Big|_0^n + \frac{d}{2} k^2 \Big|_0^n \\ &= an + \frac{d}{2} n(n-1) = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad \square \end{aligned}$$

例 3: 求級數和 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 。

解: 因為 $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = k^{-3}$, 所以利用反差分求和

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n k^{-3} = \frac{1}{-2} k^{-2} \Big|_1^{n+1} = \frac{1}{-2} [(n+1)^{-2} - 1^{-2}] \\ &= \frac{1}{-2} \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{1 \cdot 2} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \quad \square \end{aligned}$$

下降階乘幂只是數列求和的其中一種類型, 若函數不滿足下降階乘幂型式, 則需經轉換, 再應用反差分求和, 如以下例子所示。

例 4: 求級數和 $\sum_{k=1}^n k^2$ 。

解: 因為

$$k^2 = k(k-1) + k = k^2 + k^1$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] = \sum_{k=1}^n (k^2 + k^1) = \frac{k^3}{3} \Big|_1^{n+1} + \frac{k^2}{2} \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{1}{3} (n+1)n(n-1) + \frac{1}{2} (n+1)n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \square \end{aligned}$$

一般而言，若函數可表示成下降階乘幂型式即可求和，但並非所有函數均可滿足下降階乘幂型式，為滿足此型式，因此介紹以下定理 Rosen[?, Section 3.4.2, Fact 6]:

定理 9: (牛頓定理) 若 P_k 為 k 的 n 次多項式，則

$$P_k = \sum_{m=0}^n \frac{\Delta^m P_0}{m!} k^m$$

證明: 將 P_k 表示成下降階乘幂多項式型式，則

$$P_k = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k^1 + a_0 \quad (10)$$

當 $k = 0$ 時，則

$$P_0 = a_0$$

且一階差分為

$$\Delta P_k = n a_n k^{n-1} + (n-1) a_{n-1} k^{n-2} + \cdots + a_1$$

再代入 $k = 0$ ，可得 $a_1 = \Delta P_0$ 。

設 $\Delta^m P_k = \frac{n!}{(n-m)!} a_n k^{n-m} + \cdots + \frac{(m+1)!}{1!} a_{m+1} k^1 + m! a_m$ 且 $\Delta^m P_0 = m! a_m$ 成立，則可推得

$$\Delta^{m+1} P_k = \frac{n!}{(n-m-1)!} a_n k^{n-m-1} + \cdots + (m+1)! a_{m+1}$$

且

$$\Delta^{m+1} P_0 = (m+1)! a_{m+1}$$

故由數學歸納法可得證，將此結果代入 (10) 即得證。 \square

註: 此型式類似於馬克勞林定理。

例 5: 求 $\sum_{k=1}^n k^3$ 之值?

解: 討論 $f(k) = k^3$ 的各階差分之後，再利用牛頓定理將函數表示成下降階乘幂多項式型式，進而求解。

i. 函數 $P_k = k^3$ 的各階差分表如下:

m	$\Delta^m P_k$	$\Delta^m P_0$
0	k^3	0
1	$3k^2 + 3k + 1$	1
2	$6k + 6$	6
3	6	6
4	0	0

ii. 由上表及牛頓定理可知 k^3 可表示成

$$\begin{aligned}
 k^3 &= \sum_{m=0}^3 \frac{\Delta^m P_0}{m!} k^m \\
 &= P_0 + \frac{\Delta P_0}{1!} k^1 + \frac{\Delta^2 P_0}{2!} k^2 + \frac{\Delta^3 P_0}{3!} k^3 \\
 &= 0 + \frac{1}{1} k^1 + \frac{6}{2} k^2 + \frac{6}{6} k^3
 \end{aligned}$$

iii. 由反差分可知

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1} k^1 + \frac{6}{2} k^2 + \frac{6}{6} k^3 \right) \\
 &= \frac{1}{2} k^2 \Big|_1^{n+1} + k^3 \Big|_1^{n+1} + \frac{1}{4} k^4 \Big|_1^{n+1} \\
 &= \frac{1}{2} (n+1)^2 + (n+1)^3 + \frac{1}{4} (n+1)^4 \quad \square
 \end{aligned}$$

註: 若由數列 $\{k^3\}$ 的水平差分表來看

k	k^3	Δk^3	$\Delta^2 k^3$	$\Delta^3 k^3$	$\Delta^4 k^3$
0	0	1	6	6	$0 \leftarrow m$ 階差分再除以 $m!$ 即為牛頓定理中各項係數
1	1	7	12	6	0
2	8	19	18	6	
3	27	37	24		
4	64	61			
5	125				

將 $k = 0$ 代入各階差分, 如上表第二行所示, 對應的 m 階差分除以 $m!$ 即為牛頓定理中的各項下降階乘幕的係數, 換言之, 只要定出第二行數字, 再利用差分定義, 即可決定之後的各

階差分係數。

綜合以上結果, 可知多項式求和步驟為

[步驟一:] 求出多項式之各階差分或利用差分表寫出多項式之下降階乘冪型式。

[步驟二:] 利用反差分求和。

然而, 亦可運用餘式定理求得牛頓定理中各項係數, 推導如下: 設多項式

$$P_k = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k^1 + a_0 \quad (11)$$

令 $k = 0$ 時, 求得

$$P_0 = a_0$$

換言之, a_0 為多項式 P_k 被 k 除之後所得餘數, 當 a_0 為已知時, 則多項式可被簡化為

$$P_k^{(1)} = a_n (k-1)^{n-1} + a_{n-1} (k-1)^{n-2} + \cdots + a_1 \quad (12)$$

而 $P_k^{(1)}$ 為 P_k 扣掉 a_0 之後除以 k 所得多項式, 令 $k = 1$ 代入 (12) 可求得 a_1 , 同理,

$$P_k^{(m)} = a_n (k-m)^{n-m} + a_{n-1} (k-m)^{n-m-1} + \cdots + a_m$$

令 $k = m$ 代入 $P_k^{(m)}$ 可求得 a_m , 依此類推, 利用此方法求出其他各項。

例 6: 證明 $2k^3 - 3k^2 + 3k - 10 = 2k^3 + 3k^2 + 2k^1 - 10$ 成立。

解: 設

$$A_k = 2k^3 - 3k^2 + 3k - 10 = a_3 k(k-1)(k-2) + a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 \quad (13)$$

令 $k = 0$ 代入 (13), 可得 $a_0 = -10$; 因為

$$A_k = 2k^3 - 3k^2 + 3k - 10 = a_3 k(k-1)(k-2) + a_2 k(k-1) + a_1 k - 10 \quad (14)$$

所以

$$A_k^{(1)} = 2k^2 - 3k + 3 = a_3 (k-1)(k-2) + a_2 (k-1) + a_1 \quad (15)$$

令 $k = 1$ 代入 (15), 可得 $a_1 = 2$; 以此類推, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, 故得證。 □

綜合以上結果, 可知多項式求和步驟為

步驟一：利用餘式定理寫出多項式之下降階乘幂型式。

步驟二：利用反差分求和。

常見的單項多項式及其下階乘幂表達式，如表 5。

表 5: k^m , $m = 1, \dots, 5$ 之下降階乘幂表達式

	下降階乘幂表達式
k	k^1
k^2	$k^1 + k^2$
k^3	$k^1 + 3k^2 + k^3$
k^4	$k^1 + 7k^2 + 6k^3 + k^4$
k^5	$k^1 + 15k^2 + 25k^3 + 10k^4 + k^5$

常見的幂次和及下降階乘幂表達式，如表 6。

表 6: $\sum_{k=1}^n k^m$, $m = 1, \dots, 5$ 之下降階乘幂表達式

和	公式
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{1}{2}(n+1)^2$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1)^3$
$\sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{1}{2}(n+1)^2 + (n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^4$
$\sum_{k=1}^n k^4$	$\frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{7}{3}(n+1)^3 + \frac{3}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{5}(n+1)^5$
$\sum_{k=1}^n k^5$	$\frac{1}{2}(n+1)^2 + 5(n+1)^3 + \frac{25}{4}(n+1)^4 + 2(n+1)^5 + \frac{1}{6}(n+1)^6$

2.2. $a_k = r^{\pm k}$, $r \neq 1$ 型

若設 $a_k = r^k$, $r \neq 1$ 且 k 為非負整數，則由差分定義可知

$$\Delta a_k = r^{k+1} - r^k = (r-1)r^k$$

則 A_k 應滿足 $\Delta A_k = r^k$, 即 $A_{k+1} - A_k = r^k$, 可解得 $A_k = \frac{r^k}{r-1}$, 即

$$\Delta^{-1} r^k = \frac{r^k}{r-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad r \neq 1$$

同理可推得

$$\Delta^{-1}r^{-k} = \frac{r^{-k-1}}{1-r} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad r \neq 1$$

例 7: 設等比數列首項為 a , 公比 r , $r \neq 1$, 項數 n , 其中 $a, r \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 求 $\sum_{k=0}^{n-1} ar^k$ 之值。

解: 等比數列一般項為

$$a_k = ar^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

則等比數列前 n 項和為

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{ar^k}{r-1} \Big|_0^n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, \quad r \neq 1 \quad \square$$

更進一步, 若 $a_k = kr^k$, $r \neq 1$ 時, 則 $\Delta^{-1}a_k = \Delta^{-1}kr^k = A_k$, 即 $\Delta A_k = a_k$, 應滿足 $A_{k+1} - A_k = a_k = kr^k$, 可推得

$$\Delta^{-1}kr^k = A_k = \frac{r^k}{r-1} \left(k - \frac{r}{r-1} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad r \neq 1$$

同理可推得

$$\Delta^{-1}kr^{-k} = A_k = \frac{r^{-k-1}}{1-r} \left(k - \frac{1}{1-r} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad r \neq 1$$

例 8: [?] 求級數和 $\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k}$ 。

解: 因為 $\frac{k+1}{2^k} = k \cdot 2^{-k} + 2^{-k}$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^k} &= \sum_{k=1}^n k \cdot 2^{-k} + \sum_{k=1}^n 2^{-k} \\ &= \Delta^{-1} (k \cdot 2^{-k}) \Big|_1^{n+1} + \Delta^{-1} 2^{-k} \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{2^{-k-1}}{1-2} \left(k - \frac{1}{1-2} \right) \Big|_1^{n+1} + \frac{2^{-k-1}}{1-2} \Big|_1^{n+1} = 3 - \frac{n+3}{2^n} \quad \square \end{aligned}$$

2.3. 三角函數

對於三角函數，由差分定義可知

$$\Delta \sin k\alpha = \sin(k+1)\alpha - \sin k\alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \alpha \quad (16)$$

$$\Delta \cos k\alpha = \cos(k+1)\alpha - \cos k\alpha = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) \alpha \quad (17)$$

且由 (16) 可知

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sin k\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} &= \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \alpha \\ \frac{\Delta^{-1}(\Delta \sin k\alpha)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} &= \Delta^{-1} \cos \left(k + \frac{1}{2}\right) \alpha \quad (\text{等號兩邊同時取反差分}) \\ \frac{\sin \left(k' - \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} &= \Delta^{-1} \cos k' \alpha \quad (\text{令 } k = k' - \frac{1}{2} \text{ 代入}) \end{aligned}$$

因此

$$\Delta^{-1} \cos k\alpha = \frac{\sin \left(k - \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

同理，

$$\Delta^{-1} \sin k\alpha = -\frac{\cos \left(k - \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

例 9: Andreescu and Gelca [?, Section 1.9, p. 31] 試計算 $\sum_{k=1}^n \cos k\alpha$ 的值。

解: 由反差分可知

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos k\alpha &= \frac{\sin \left(k - \frac{1}{2}\right) \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \square \end{aligned}$$