微積分基本定理的發展歷史在教學上的應用與啓發

劉柏宏

壹、緒論

微積分的發展過程不同於一般微積分教材中先教微分後教積分的次序模式, 而是積分概念的發展先於微分概念。積分學的概念溯源自古希臘探求面積、體積與弧長的努力, 而微分學則主要導因於十七世紀計算切線斜率與瞬間速率的需求。在直覺上, 微分與積分是兩個不同的概念, 一個求切線斜率, 另一個求面積, 很難有交集。在數學概念上, 微分是一個差商 $\Delta y/\Delta x$ 的極限, 而積分是漸趨於無限多個的消失量的總和, 兩者關係也不明顯。而微積分基本定理可以說是串連微分學與積分學的軸心, 它很明白地顯示出微分與積分兩者互逆的運算本質, 就如同減法與加法和除法與乘法一般。只不過歷史上對於微積分基本定理的認識過程相當漫長與迂迴, 因此數學史家 Howard Eves (Eves, 1983) 指稱微積分基本定理的發現絕對可以列入數學偉大的時刻之一 (the great moment in mathematics)。

假設 $f(x)$ 是一個在區間 $[a,b]$ 上非負的連續函數, 且曲線 $y=f(x)$ 與 x-軸在 $[a,b]$ 間所圍的面積爲 A, 微積分基本定理指出: 若存在一函數 $F(x)$ 使得其導函數 $dF(x)/dx$ 等於 $f(x)$, 則 $A=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。也就是說, 我們只要設法求出 $f(x)$ 之反導函數 $F(x)$, 並計算 $F(a)$ 與 $F(b)$ 之差即可, 而不必計算無限多個無限小量之和。就計算層面而言, 微積分基本定理的功能等於是將一種無限的定量過程轉化爲定性的技巧問題。這對當時仍陷於無窮級數泥淖的數學家而言, 無異是令人驚訝與振奮的結果。不過, 雖然牛頓與萊布尼茲共享微積分發明人之桂冠, 他們兩人都不是歷史上第一位明確認知到這優美性質的數學家。以歷史探究的後見之明可以發現, 在牛頓與萊布尼茲之前已有幾位數學家掌握到微分與積分兩者互逆的本質, 甚至已提出某些特定條件下的微積分基本定理。正如同牛頓最被經常引用的經典名句:「若我比別人看得更遠, 那是因爲我站在巨人們的肩膀上」。本文所要探討的就是這些數學巨

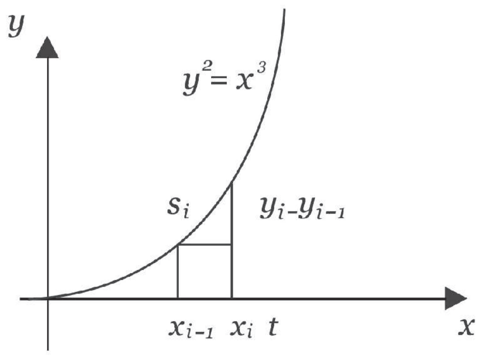
人們的工作, 並從 HPM (History and Pedagogy of Mathematics) 觀點檢視微積分基本定理的發展過程在微積分教學上的價值。

貳、前巴羅 (Isaac Barrow) 時期

早在十七世紀初, 義大利數學家托里契里 (Evangelista Torricelli, 1608～1647) 已經認識到廣義拋物線的微分與積分運算是互逆的。托里契里的結果以現今的符號可以表示如下:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x x^n dx = \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big) = x^n, \quad \text{其中 } n \text{ 是自然數}$$

於 1655年, 英國數學家沃利斯 (John Wallis, 1616～1703) 在《無限算術》(Arithmetica Infinitorum) 一書當中考慮 n 爲有理數和負數等更一般的情形。一般咸認, 沃利斯這方面的工作對於牛頓早期的數學發展有著啓發的作用。事實上, 托里契里和費馬 (Pierre de Fermat, 1607～1665) 也思考過 n 爲有理數的情形, 只是稍晚才發表, 因此沃利斯在此之前並不知情 (Mahoney, 1973)。費馬最初並不認爲可以透過拉彎取直的方法求曲線弧長 (rectification of a curve)。不過在 1660 年之前, 由於討論無限小的技術日漸普遍與成熟, 費馬最初的信念也開始動搖 (Boyer, 1959)。第一個求曲線弧長的問題是由沃利斯的學生內爾 (William Neil) 於 1657 年所考慮的半立方拋物線 (semi-cubical parabola) $y^2 = x^3$ (Edwards, 1979)。



圖一

如圖一, 爲了計算曲線 $y = f(x)$ 在區間 $[0, t]$ 上的弧長 s, 內爾將區間 $[0, t]$ 分割爲無限多個無限小區間, 其中第 i 個區間爲 $[x_{i-1}, x_i]$。令 s_i 表示曲線 $y = f(x)$ 第 i 個分割段中連接 (x_{i-1}, y_{i-1}) 和 (x_i, y_i) 兩點的弧長, 則 $s_i \cong [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{1/2}$, 因此

$y=f(x)$ 在區間 $[0,t]$ 上的弧長爲

$$s \cong \sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2]^{1/2}. \tag{1}$$

在現今的微積分課本中, 接下來大都利用微分均值定理去計算弧長, 不過內爾採用一種特殊的策略。爲了計算弧長 s, 內爾引進輔助函數 $g(x)=x^{\frac{1}{2}}$, 並令 A_i 爲 $g(x)$ 在區間 $[0,x_i]$ 上之區域面積, 再由他的老師沃利斯所得的結果導知 $A_i=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$。再者, 由於 $y_i-y_{i-1}=x_i^{\frac{3}{2}}-x_{i-1}^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(A_i-A_{i-1})\cong\frac{3}{2}g(x_i)(x_i-x_{i-1})$, 內爾將此式代入 (1) 式當中, 並推導得出 $s=\frac{(9t+4)^{\frac{3}{2}}-8}{27}$。內爾所採取的策略是, 如果要計算曲線 $y=f(x)$ 在區間 $[0,t]$ 上的弧長 s, 首先找出一輔助函數 $g(x)$ 使得 $g(x)$ 在 $[0,x_i]$ 間之區域面積 A_i 等於 $f(x_i)$ 之值 (或是其常數倍數), 也就是 $A_i=\int_0^{x_i}g(x)dx=f(x_i)=y_i$。所以利用 $y_i-y_{i-1}=A_i-A_{i-1}\cong g(x_i)(x_i-x_{i-1})$ 可以得知

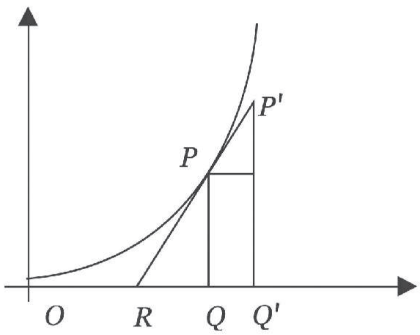
$$s\cong\sum_{i=1}^{n}[1+(g(x))^2]^{\frac{1}{2}}(x_i-x_{i-1})\Rightarrow s=\int_0^t\sqrt{1+[g(x)]^2}dx$$

我們進一步可以發現輔助函數 $g(x)$ 就是 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$。換句話說, $f(x)$ 是位於 $g(x)$ 下方的面積函數, 而 $f'(x)$ 恰又等於 $g(x)$。由此可見面積與切線的互逆關係在內爾的方法中已經隱約浮現。

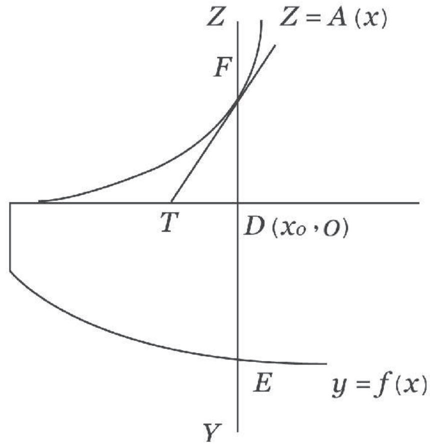
當費馬聽到內爾在這方面的工作成果之後, 他隨即考慮 $my^2=x^3$ 等更一般的半立方拋物線的弧長問題。如圖二所示, 對曲線 $my^2=x^3$ 上任一點 P, 設其橫座標爲 OQ (長度爲 a), 而其縱座標爲 PQ, 費馬求出 RQ 之長爲 $2a/3$。令 Q 與 Q' 距離爲 e, 則 $PP'=e\sqrt{\frac{9a}{4m}+1}$。而當 e 足夠小時, 點 P' 可視爲位於曲線上, 而且曲線弧長也可視爲所有類似 PP' 線段之總和。因此, 以現代符號表示即爲:

$$s=\int_0^a\sqrt{\frac{9x}{4m}+1}\ dx$$

而我們可以發現, 這算式也相當於求出拋物線 $y^2=\frac{9x}{4m}+1$ 下方在區間 $[0,a]$ 間之區域面積。所以只要決定了面積問題, 透過切線概念, 就可以求得曲線弧長。



圖二



圖三

令人訝異的是, 費馬似乎沒有從這求取曲線弧長的過程中發現面積問題與切線問題互逆的本質, 也因而喪失「微積分眞正發明人」的榮銜 (Boyer, 1959)。

參、巴羅的貢獻

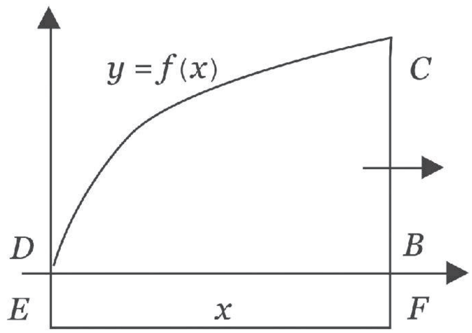
巴羅很可能是從伽利略 (Galileo Galelie, 1564∼1642) 在關於「時間 — 移動」關係曲線上的研究, 直覺地領悟到切線與面積問題互逆的本質。在 1669 年所出版的《幾何講義》(Lectiones opticae et geometricae) 一書中巴羅提出一個雖不完整, 但卻是最早版本的「準微積分基本定理」(Edwards, 1979; Eves, 1983), 其結果敘述如下 (如圖三所示):

> 令 y-軸和 z-軸相對而立。給定一個正的遞增函數 $y = f(x)$, 並以 $z = A(x)$ 表示曲線 $y = f(x)$ 在區間 $[0, x]$ 上與 x-軸所圍之面積函數。設 $D(x_0, 0)$ 爲 x-軸上一點, 且 T 點亦位於 x-軸上, 並使得 $DT = DF/DE = A(x_0)/f(x_0)$, 則直線 TF 與曲線 $z = A(x)$ 只在點 $F(x_0, A(x_0))$ 處接觸。

值得注意的是, 巴羅在定理中只提到“直線 TF 與曲線 $z = A(x)$ 只在點 $F(x_0, A(x_0))$ 處接觸”, 卻沒有進一步直接論斷 TF 爲 $z = A(x)$ 之切線。由於 TF 之斜率爲 $\frac{DF}{DT} = \frac{A(x_0)}{A(x_0)/f(x_0)} = f(x_0)$, 因此假使巴羅更明確指出 TF 爲 $z = A(x)$ 之切線, 那將可以發現 $A'(x_0) = f(x_0)$。換言之, 一函數之面積函數的導函數爲其函數本身, 不也就是微積分基本定理!? 巴羅處理「切線 — 面積」問題時一向從幾何角度切入, 上述定理中很可能巴羅的焦點只放在幾何情境上, 而忽略 $A(x)$ 和 $f(x)$ 兩者之間的關係。

肆、牛頓與萊布尼茲關於微積分基本定理的發現

前述數學家對於微積分基本定理的探究主要是以靜態方式處理面積問題, 而牛頓卻採取不同的進路。牛頓考慮一個給定區域的面積變化率, 並透過反微分 (anti-differentiation) 的方式計算區域面積 (Edwards, 1979; Struik, 1969)。如圖四, 令 $A(x)$ 為曲線 $y=f(x)$下方區域 BCD 之面積, 並將這區域視為是由垂直線段 BC 以單位速率 $\dot{x}=1$, 由左至右移動掃描而成。



圖四

現在將 CB 延伸到 F 使得 $BF=1$, 並且連接 B, D, E, F 四點形成一長方形。牛頓發現區域 BCD 和 $BDEF$ 的流數分別為 BC 和 BF (也就是 $\dot{y}=BC$, $\dot{x}=BF$)。因此, 曲線 $y=f(x)$ 下方區域的導函數就是 $y=f(x)$ 本身:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dot{y}=f(x)$$

很明顯地, 牛頓的方法在本質上是動態的。然而, 縱使牛頓洞見了積分與微分的互逆關係, 他並沒有給出嚴密的證明。

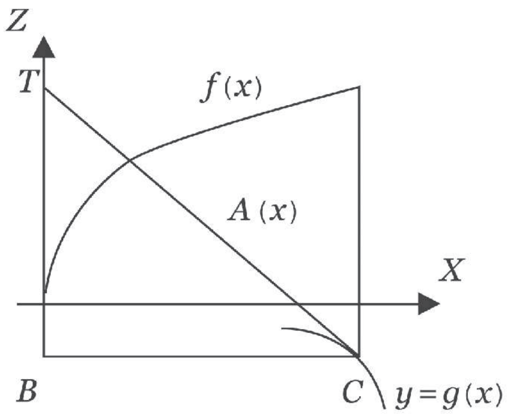
至於萊布尼茲, 由於早期興趣在於邏輯與哲學, 遲至1672年在巴黎遇見惠更斯 (Christiaan Huygens, 1629～1695), 才對數學做正式的探究也開啓了他的數學生涯。而往後的四年, 萊布尼茲在數學、哲學與科學各方面都有關鍵性的發現, 宛如牛頓在 1665 年至 1666 年之間的黃金歲月。

萊布尼茲對於微積分基本定理的體悟是源自於從差和分到微積分的類推關係 (蔡聰明, 1994)。所謂差和分是, 考慮函數 $y=F(x)$, $x\in[a,b]$。設 $a=x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$ 為區間 $[a,b]$ 的一個分割, 則函數 $y=F(x)$ 在各相鄰分割點函數值之差的總和恰等於兩端

點函數值之差, 也就是:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta F(x_k) = F(b) - F(a) \tag{2}$$

(2) 式與現今微積分基本定理的形式: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 可以說是完全一致的。可以想見萊布尼茲將「微分」類比於「差運算」, 將「積分」類比於「和運算」, 因而得出「微分」和「積分」互逆的關係。不過萊布尼茲對於微積分基本定理的敍述形式卻與此截然不同。在一份 1677 年的手稿中, 萊布尼茲陳述了他微積分基本定理的版本。給定一曲線 $z = f(x)$ (如圖五), 若可以找到一輔助函數 $y = g(x)$ 使得其切線斜率 $\frac{TB}{BC} = \frac{z}{k}$, 其中 k 爲一個常數, 則 $\frac{dy}{dx} = \frac{TB}{BC} = \frac{z}{k} \Rightarrow zdx = kdy$。因此在 $z = f(x)$ 曲線下之面積爲 $\int zdx = k\int dy = ky$。可見一個面積問題再次被轉換成一個反切線的問題。也就是, 爲了求 $z = f(x)$ 曲線下之面積, 我們只要能找到一曲線 $y = g(x)$ 滿足 $\frac{dy}{dx} = z$ 即可。若令 $k = 1$, 則 $z = f(x)$ 曲線下方在 $[a, b]$ 之間的面積爲 $\int_a^b zdx = y(b) - y(a)$。從這裡我們也可以很明顯的看出, 萊布尼茲的策略相當近似於前面所提到的內爾使用輔助函數的構想。所不同的是, 內爾的輔助函數 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的切線函數, 而萊布尼茲的輔助函數 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的面積函數。



圖五

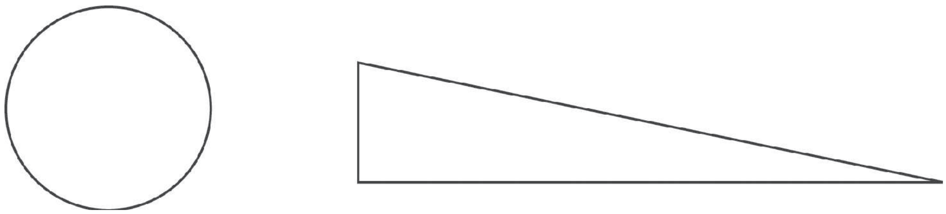
伍、阿基米德已發現微積分基本定理?

微積分基本定理當然是十七世紀數學思想的產物, 不過由於積分概念可遠溯自古希臘, 而阿基米德更是求解面積問題的箇中翹楚。這讓我們不禁發問: 阿基米德當時是否曾意識到積分與微分互逆的本質? 若我們仔細端詳阿基米德的工作, 或許可以發現一些蛛絲馬跡 (Eisenberg

& Sullivan, 2002; Grattan-Guinness, 1997)。在《圓面積的測量》一書中, 阿基米德對於圓面積的敘述爲:

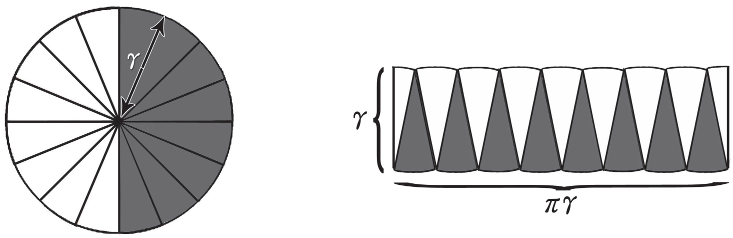
任一圓形的面積等於一個兩股分別爲此圓半徑之長與圓周之長的直角三角形面積。

阿基米德的結論如圖六所示。



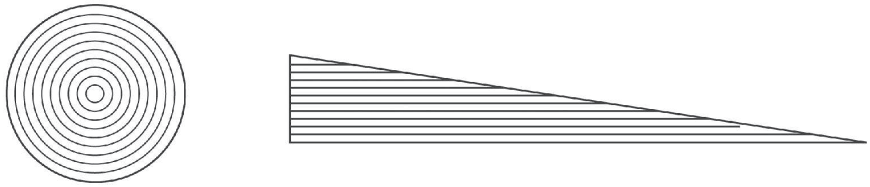
半徑爲 r 圓周爲 C 之圓　　高等於圓半徑 r, 底等於圓周長 C 之直角三角形

圖六



圖七

阿基米德的圓面積公式雖然和現今學生所熟悉的敘述方式不同, 但卻是等價的。因爲若 r 爲半徑, C 爲圓周, 則阿基米德的圓面積爲 $\frac{1}{2}(rC)=\frac{1}{2}r(2\pi r)=\pi r^2$, 而這也和《九章算術》的圓面積公式"半周半徑相乘得積步"在本質上完全一致。劉徽利用窮盡法的概念透過割圓術化圓爲矩的概念解釋《九章算術》的圓面積公式(如圖七)。而窮盡法對阿基米德而言是再熟悉也不過了, 他在《圓面積的測量》一書中的證明也是利用正內接與外切多邊形的窮盡概念再配合雙重歸謬法證明他的論點。所以, 我們可以推想類似割圓術的想法應該曾經浮現於他的腦海當中。然而, 他最後還是採取了化圓爲三角的方式來表示圓面積。令人好奇的是, 阿基米德究竟是如何得到這結果? 這背後的理論基礎爲何? 中世紀的猶太裔西班牙數學家 Abraham bar Hiyya ha-Nasi (1065∼1136) 曾提出一個可能的猜測 (如圖八): 阿基米德將一個圓形看成由無限多個同心圓之組合, 因爲圓面積在直覺上可視爲無限多個同心圓極小的圓周"寬度"之和。再來, 將所有同心圓的圓周拉直, 其中最外圍之圓周線段放置於底端, 而其它由外而內的同心圓圓周所形成之直線線段由下往上逐次堆疊而成一直角三角形 (Grattan-Guinness, 1997)。



圖八

如果這個假設成立, 那我們可以推斷阿基米德可能是歷史上第一位認識到積分與微分互逆本質的數學家。因爲當阿基米德把一個圓形看成由無限多個同心圓之組合, 他事實上是將圓周 $C(r)$ 當作圓面積 $A(r)$ 的瞬間變化率-也就是, $dA(r)/dr = C(r)$。反之, 當把直角三角形中的無限多個直線線段相加時, 阿基米德實際上是將無限多個圓周長 $C(r)$ 相加而得到圓面積-也就是 $\int_0^r C(r)dr = A(r)$, 而這在本質上就是微積分基本定理。不過, 如果事實是如我們所臆測的, 那我們也不禁要問, 爲何不見阿基米德在這方面有任何後續的進展? 究竟是因爲他根本沒意識到這個關係? 或者因爲在當時他並沒有察覺到變化率問題的重要性? 更令人好奇的是, 十七世紀的數學家是否曾經從阿基米德的工作當中得到一些啓發?

微積分基本定理的出現替微分與積分做了很好的連結。不過另一方面, 它也對數學發現 (mathematical discovery) 和數學認知 (mathematical recognition) 這兩個概念給了一個明確的分野 (Eves, 1983)。在所有牛頓和萊布尼茲之前的數學家中, 費馬和巴羅的想法最接近我們現今的微積分基本定理。費馬似乎意識到這種互逆關係, 卻只是專注於求曲線弧長的問題。巴羅提供了一個微積分基本定理的幾何版本, 但終究沒有看透這問題背後的本質。牛頓和萊布尼茲的貢獻不僅在於將微積分基本定理概念化爲一個關鍵事實, 更重要的是他們有效地運用這個結果到無限小量的技巧, 使之進階到一個系統性的演算工具。值得注意的是, 無論是牛頓或萊布尼茲都沒能給微積分基本定理一個嚴格的證明。這是由於當時整個微積分的邏輯基礎尚不穩固, 所以也不能對他們倆有所苛責。關於微積分基本定理嚴格的證明直到一百年後才由柯西 (Augustin Louis Cauchy, 1789∼1857) 提出。

陸、微積分教學上的意涵

許多學者早已呼籲將數學史融入教學之中。因爲不僅歷史上數學大師背後的智慧可以提供學生數學思考的洞見 (Ernest, 1998; Furinghetti, 1997; Katz, 1997; Siu. 1995), 並且可以讓學生認識到不同時間、地區、與文化的數學家對同一數學問題的不同解法, 以使得學生透過比較分析進一步發現數學思考的不同面向 (洪萬生, 2000; Horng, 2000), 微積分基本定理的發現決不能被視爲僅僅是另一樣有效率的數學工具的產生。它長達半世紀的演化過程不僅反映

出數學知識增長的一個典型模式, 更彰顯出一個偉大科學創建的人文面向。以認識論的觀點而言, 這一歷史事件也值得引入課堂之中。作者根據過去幾年一連串的探究與實驗觀察 (劉柏宏, 2007; Liu and Niess, 2006; Liu, 2009) 發現, 大一學生在經驗歷史導向微積分課程後, 對於數學思考的認知往往從「數字計算與套用公式」的觀點轉移到認爲「數學思考就是尋求問題與數學之關聯性, 或以數學角度看問題」。所謂以「數學角度看問題」就是將數學家的解題情境投射到對於數學思考的認知上。在數學知識方面, 雖然無論在學前學後大部份學生對於數學知識始終抱持著強烈的工具化觀點, 不過比對後發現, 學生於學期末的論述很明顯的察覺到數學知識承先啓後的特性和數學家在數學知識發展所扮演的角色。爲了進一步剖析學生數學觀點轉移的內蘊元素, 以便與作者的研究結果相呼應, 本文後段將以作者 2007 年的研究對象爲版本, 針對他們對於微積分基本定理的歷史發展所抱持的觀點做深入與微觀的分析。至於其餘詳細之課程背景與研究脈絡可參閱作者先前的文章 (劉柏宏, 2007)。

迥異於一般微積分教材的處理方式, 微積分基本定理在這一門歷史導向的微積分課程當中並非僅被當作解決定積分問題的一個利器, 而是串連並整合微分學與積分學的一個關鍵概念。首先, 學生收到五份講義, 其中第一份是關於整個微積分基本定理的發展歷程。另四份講義分別是有關於費馬、巴羅、牛頓、萊布尼茲等人對於微積分基本定理的貢獻。所有學生都必須詳讀並思考每位數學家的定理敍述。一週之後, 隨機抽選四位學生上台說明以上四位數學家所採取的策略, 並接受同學的提問。這課程活動的目的是提供學生一個機會去欣賞並了解數學家彼此間事實上是具有不同的數學風格。由於時間所限, 且考量學生數學背景, 課堂中並未一一說明每位數學家的定理證明, 不過也提醒他們, 牛頓與萊布尼茲有關於微積分基本定理的證明並不嚴謹, 而類似課本中的嚴格證明是直到十九世紀才由法國數學家科西所提出。在所有討論告一段落後, 作者也向學生介紹阿基米德的圓面積公式和公式背後的可能想法 (如前述之猜測)。整個課程活動持續一週四堂課的時間, 其目的在於讓學生對於微積分基本定理的衍生、發展和確定的過程能有一深入的了解。之後, 學生寫下他們對於整個微積分基本定理的演化過程有何理解與想法。綜合所有學生的說法, 整理如下:

一、數學家在數學知識發展中的角色

所有學生的回應中最爲顯著的特點就是, 他們眞正認知到數學家在數學知識發展中所扮演的角色。如同 安立所說:

> 微積分從一開始到完成以後, 十五世紀經歷漫長歲月, 一直到十九世紀完成。一個問題在每個人身上的觀點不太一樣, 但是會有共同點而從共同點中去尋找其他不在這共同點的範圍。一開始的啓蒙讓人所知而深入研究。慢慢的累積到最後再經過整理。在這過程有許多數學家的參與, 並積極的研究直到證明, 才會有現在的基本定理。

而另一位學生書彭則表示:

> 看完那麼多數學家們的方法, 讓我不禁感嘆, 原來如今我們所使用的微積分基本定理是經過那[麼]多人之手才獲得而來。其中讓我印象最為深刻的是費馬和巴羅這兩位數學家, 他們都是差一點就可以證出微積分基本定理。就好像電影「向左走向右走」一樣, 主角跟主角快見面了, 可是又擦身而過 ··· 難怪牛頓會說:「我如果比別人看得更遠, 那是因為我站在巨人們的肩膀上」。

此外, 如淵宗所言, 許多學生視數學知識的增長過程為一場古今數學家的接力賽:

> 我想, 微積分應該是從幾何中發展出來的。自阿基米德用三角形面積模擬圓形面積開始, 然後是托里契里、費馬以曲線之切線斜率求面積, 一直到巴羅、牛頓、萊布尼茲以微積分的角度正視問題所在。微積分似乎有不同的面貌與手法, 發展的過程也有些坎坷, 但經由一連串的接力之後, 終於在拉格郎日和科西的筆下將微積分的證明詳盡闡明。

淵宗所說的 "發展的過程也有些坎坷" 顯示出學生對於數學知識發展的崎嶇過程具有一定程度的認知, 而這也與下一個主題相關。

二、數學知識的非線性發展本質

除體認數學家所扮演的角色外, 部分學生也瞭解數學知識的形成是一種漸進累積但非線性的過程。弘尹就一針見血地點出這種現象:

> 只能說是百轉千迴。從阿基米德的可能發現到科西以較近於現代的方法證明基本定理的正確性, 在這之間過了好幾千年。在這之中有只差一點就可以發現, 有些只有說明而沒有證明。但這也可以說是在等待後人慢慢的一步一步整理才可以證明出來的。所以我認為雖然時間長達數千年, 但是這些數學家當初的想法也不是一下子能了解, 因此長時間的發展可能是一定程度上的必要。

從弘尹的敍述很明顯可以看出他體會到在數學知識的形成過程中, 某種程度的「醞釀」是必要的。在醞釀期間數學家對於某些數學性質的完整樣貌並不十分清楚, 也因此其貢獻也是片斷的, 只有"等待後人慢慢的一步一步整理才可以證明出來"。這類的觀點和下列皇坤的說法不謀而合。皇坤形容數學知識的發展宛如一幅無盡的拼圖:

> 微積分的發展過程像是拼圖, 一點一點慢慢成形。在一開始的求面積, 應用無窮大的數或 $\lim\limits_{n\to 0}$ 到發現微分與積分的關係, 明白指出嚴謹的證明。許多數學方法都是一樣, 數學的發展是承先啓後, 一幅拼不完的拼圖。

皇坤的觀點很明顯是將他個人對於微積分發展本質的瞭解, 擴散到他對於數學知識發展本質的闡述上面。而他將數學發展比喻爲“一幅拼不完的拼圖”更充分反映出其個人所抱持的一種數學發展動態觀。

三、數學發現與數學驗證的差異

學生的回應也顯示出他們大致上夠理解到對數學家而言, 建立一個數學定理並非是唾手可得的。並且僅認知到一個數學事實的存在, 並不保證數學家們能保證其確定性。例如琳嘉就明白指出“發明未必能證明”:

> 在整個微積分基本定理可看出許多人發現了定律而不自覺, 而有些人因他人[而]打破自己的觀點而再研究其結果, 使得明白眞理。而就算發明者也未必是可證明其原理者。

部分學生將發明而未能證明的原因歸諸於數學家個人的盲點。然而, 一位學生盛義卻表達出一個獨特的看法:

> 微積分基本定理經過了費馬、巴羅、牛頓、萊布尼茲等數學家的研究之下, 最後由科西做最後的整理與結束。我們大致上可以發現這幾位數學家的想法都與切線求面積有關。當然唯有牛頓的解題方式是運用動態的想法。但可惜的是, 在科西之前的幾位數學家都差那麼一點就可以是微積分基本定理的發明人, 卻都差了一些重要的細節。我想或許當時他們都把心思放在其他數學問題上, 而他們只是把微積分當作解決問題的工具, 所以沒有具體的整理、討論。

盛義的說法是頗令人深省的。做歷史探究時我們通常急於挖掘隱藏在表象後的事實, 而輕易地將自我建構的情節鑲嵌於歷史證據上, 而非讓證據自己說話。如同歷史學者提問爲何費馬和巴羅竟然沒有發現微積分基本定理的關鍵概念時, 盛義的觀點提醒我們, 實際的情形可能是他們當時解題的焦點和我們現今探究的焦點根本不同, 因此我們的疑問很可能只是自作多情。

另一方面, 大部分的學生傾向於將微積分基本定理的發現(或發明) 歸功於費馬, 或牛頓與萊布尼茲。他們認爲費馬將面積與切線問題做一串連具有啓發作用, 而牛頓與萊布尼茲臨門一腳, 確立了微積分基本定理更是功不可沒。値得注意的是, 認爲科西的證明工作是最爲重要的學生並不多。其中原因或許如勝裕所言, “如果沒有牛頓指出, 或許科西就不知道這項關係”。從這裡似乎也可以觀察到學生可能相對地較不重視證明在數學知識發展中的重要性。

柒、結論

本文之宗旨在於從數學的歷史與教學 (HPM, History and Pedagogy of Mathematics) 闡述數學的人文價值與教育目的的會通。傳統數學教學之焦點只在於強調計算之精熟和其實用目的, 卻長期嚴重地忽略其人文面向。歷史很清楚地傳達出數學知識的發展取決於環境外因 (社會文化條件) 或個體內因 (數學家的智識好奇), 可是這兩者皆被現今的數學教學隔絕於外, 數學的內蘊精神因而被掩蓋。也因此不少學者提出一種人文取向的教學策略以挽救這種日益失衡的現象 (Tymoczko, 1993; Davis, 1993)。將微積分基本定理的歷史過程融入正規微積分課堂之中, 便是從人文角度看待數學知識發展的脈絡, 傳遞人類在建構數學知識的過程中所做的一種智識冒險 (Lakatos, 1976 ; White, 1993), 也就是傳達一種「人文數學」的信念 (Hersh, 1993; White, 1993)。Bronowski (1965) 在闡述科學與人類價值時說:「科學不是一種機械運作過程, 而是人類的進展; 也不是一些事實的堆積, 而是探索事實的歷程」(p.63)。而這就是本文所強調的, 探索微積分基本定理這個美妙的事實, 不僅是數學發展歷程中一項偉大的成就, 更是人類智識文明進展中一個非凡的里程碑。

参考文獻

1. 洪萬生 (2000)。《無異解》 中的三案初探: 一個 HPM 的觀點。科學教育學刊, 8(3), 215-224。
2. 蔡聰明 (1994)。Leibniz 如何想出微積分。數學傳播, 18(3), 1-14。
3. 劉柏宏 (2007)。探究歷史導向微積分課程與發展學生數學觀點之關係。科學教育學刊, 15(6), 703-723。
4. Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development.* New York, NY: Dover Publications.
5. Bronowski, J. (1965). *Science and Human Values.* New York, NY: Harper & Row.
6. Davis, P. (1993). The humanistic aspects of mathematics and their importance. In A. M. White (Ed.), Humanistic mathematics (pp.9-10), Washington, DC: The Mathematical Association of America.
7. Edwards, Jr. C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York, NY: Springer-Verlag.
8. Eisenberg, B. and Sullivan, R. (2002). The fundamental theorem of calculus in two dimensions, *The American Mathematical Monthly*, 109, 806-817.
9. Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom. *Mathematics in School*, 27(4), 25-32.
10. Eves, H. (1983). Great moments in mathematics after 1650. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
11. Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 55-61.

12. Grattan-Guinness, I. (1997). *The Rainbow of Mathematics*. New York, NY: W.W. Norton & Company.
13. Hersh, R. (1993). Humanistic mathematics and the real world. In A. M. White (Ed.), *Humanistic Mathematics* (pp.15-18), Washington, DC: The Mathematical Association of America.
14. Horng, W.-S. (2000). Euclid versus Liu Hui: A pedagogical reflection. In V. J. Katz (Ed.), *Using history of mathematics in teaching mathematics* (pp.37-48). Washington, D.C.: Mathematics Association of America.
15. Katz, V. J. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 62-63.
16. Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
17. Liu, P.-H. (2009). History as a platform for developing college students' epistemological beliefs of mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2), 473-499.
18. Liu, P.-H. and Niess, L. M. (2006). An exploratory study of college students' views of mathematical thinking in a historical approach calculus course. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 373-406.
19. Mahoney, M. S. (1973). *The Mathematical Career of Pierre De Fermat*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
20. Priestly, W. M. (1979). *Calculus: A Historical Approach*. New York, NY: Springer-Verlag.
21. Siu, M. (1995). Mathematical thinking and history of mathematics. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, and V. Katz (Eds.), *Learn from the Masters* (pp.279-282). Washington, D. C.: Mathematics Association of America.
22. Struik, D. J. (1969) (Ed.). *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800. Princeton, NJ: Princeton University Press.
23. Tymoczko, T. (1993). Humanistic and utilitarian aspects of mathematics. In A. M. White (Ed.), *Humanistic Mathematics* (pp. 11-14), Washington, DC: The Mathematical Association of America.
24. White, A. M. (Ed.) (1993). *Humanistic Mathematics*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

—本文作者任教國立勤益科技大學博雅通識教育中心—