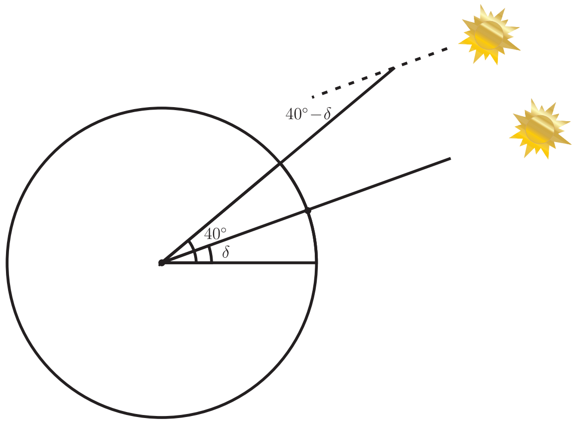
數學傳播　36卷3期, pp. 41-45

評康熙朝的一場天文比試

張海潮

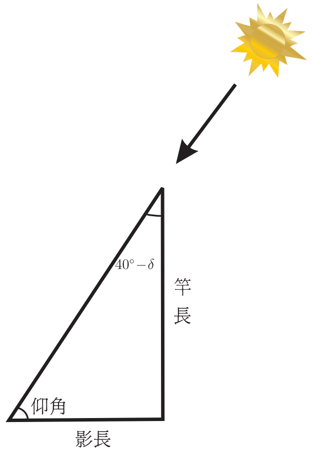
楊光先和吳明烜原是康熙朝的欽天監監正和監副 (國家天文局局長和副局長)。康熙親政之後, 命令這對難兄難弟與傳教士南懷仁比賽, 預測立竿的日影和太陽的仰角, 結果楊吳一敗塗地, 幾遭問斬。此後百餘年, 欽天監的業務盡交洋人主持。直到道光年間, 洋天文學家或歸國或老死, 而欽天監的中國官員也已學會西法, 才停止延請洋人入監。[1]

立竿見影這套設計又名日晷, 功能之一是利用每天正午時的竿影來判斷一年中的時序。在北回歸線以北的地帶, 亦即緯度高於北緯 23.5° 的地帶, 夏至 (約 6 月 22 日) 這一天的日影最短, 冬至 (約 12 月 22 日) 這一天的日影最長。由於每一天太陽直射地球的緯度不同, 因此正午時的日影也隨之而有消長, 請看下圖 (以下的討論均假設竿子立在位於北緯 40° 的北京):



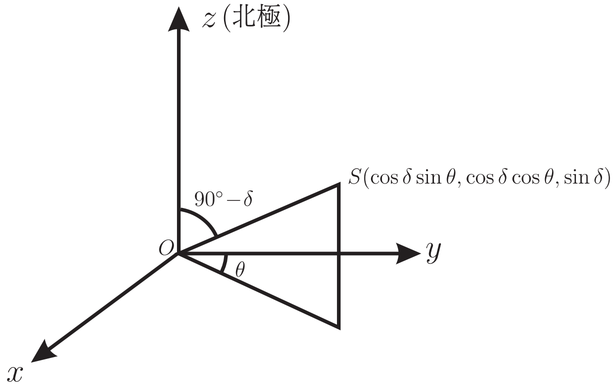
圖中, 太陽直射北緯 δ。由於北京位於北緯 40°, 因此陽光與立竿的夾角是 $40^\circ-\delta$, 再從下圖這個直角三角形看出影長與竿長之比是 $\tan(40^\circ-\delta)$。

[1] 這場比試可參考史景遷著《改變中國》中文譯本 30, 31 頁 (時報文化出版公司, 2004 年) 或是 GOOGLE「楊光先」。



以夏至這一天爲例, $\delta = 23.5°$, $\tan(40° - 23.5°) \approx 0.3$。因此如果立竿高 200 公分, 正午的影長就是 60 公分。到了冬至這一天, 影長與竿長之比變成 $\tan(40° + 23.5°) \approx 2.0$, 竿長 200 公分對應的影長大約是 400 公分。

至於太陽的仰角, 從上圖可以看出正午的時候, 這個仰角就是 $40°-\delta$ 的餘角, 亦即 $50°+\delta$。因此在夏至的時候是 $73.5°$, 冬至的時候是 $26.5°$, 不過這是正午的情形。如果問的是北京某日, 下午三點時的仰角, 那又另當別論, 因爲如圖 (y 軸指向正南):



正午時太陽在正南, 對應 $\theta = 0°$, 此時太陽的方向向量是 $(0, \cos\delta, \sin\delta)$。由於地球由西向東繞北極自轉, 因此在正午以後, 太陽的方向向量 $(0, \cos\delta, \sin\delta)$ 向著 x 軸 (指向西方), 繞 z 軸轉了 θ 角, 新的方向是 $(\cos\delta\sin\theta, \cos\delta\cos\theta, \sin\delta)$。如果要了解這個方向在北京的仰角 γ, 或者 $\cos(90° - \gamma)$, 就要將此方向與在北京立竿的方向 $(0, \cos 40°, \sin 40°)$ 作內積而得到 γ、θ 和 δ 的關係式:

$$\sin\gamma = \cos(90° - \gamma) = \cos 40° \cos\delta \cos\theta + \sin 40° \sin\delta \tag{1}$$

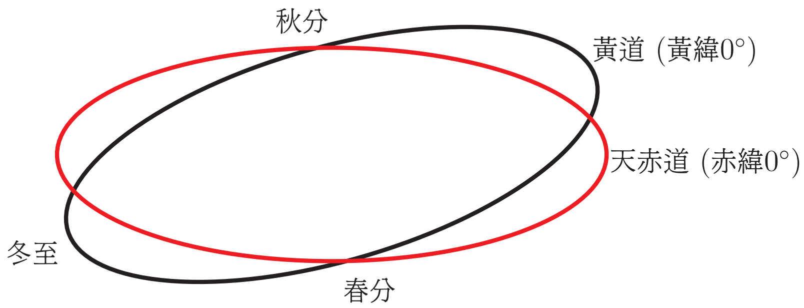
而此刻竿影與竿長之比就是 $\tan(90^\circ-\gamma)$。

例如, 在正午的時候, $\theta=0^\circ$, $\sin\gamma=\cos 40^\circ\cos\delta+\sin 40^\circ\sin\delta=\cos(40^\circ-\delta)$, 亦即 $\gamma=90^\circ-(40^\circ-\delta)=50^\circ+\delta$, 與前文所求相符。若是要求下午 3 時的仰角 γ, 則在公式中, θ 要以 45° 代入, 或是要求上午 9 時的仰角, 公式中的 θ 要以 -45° 代入, 這是因爲每一小時地球自轉 15°, 注意到式中 δ 代表太陽直射地球的緯度。

前面提到, 夏至的時候, $\delta=23.5^\circ$, 冬至的時候, $\delta=-23.5^\circ$, 其間春秋分的時候, $\delta=0^\circ$。上述二至和二分是一年中四個最重要的節氣, 通常發生在 6 月 22 日、12 月 22 日、3 月 21 日和 9 月 23 日。然而在這四個節氣之間, δ 與日期的關係並非線性, 而是要看地球當日在公轉軌道上的位置。

我們在夜晚從地球觀天, 極目所見, 只有角度 (方向), 沒有遠近, 這就是所謂的天球, 球面上繁星點點, 是所謂的恒星, 它們之間的相對位置關係不變, 但是每天繞北極星旋轉一圈。若將地球的經緯度從地心投射到天球, 則在天球上就有了所謂的赤經和赤緯, 並且又將地球所見太陽的軌跡也投射到天球, 就是所謂的黃道。我們以黃道爲黃經和黃緯系統的赤道, 換句話說, 黃道相當於黃緯的零度。

現在, 以地球爲原點 (球心), 在天球上有兩組球座標, 一是黃經黃緯, 一是赤經赤緯。如圖:



圖中天赤道這一圈是從地心將地球赤道投射到天球的軌跡, 在天球上定爲赤緯 0°, 黃道這一圈是太陽在天球上的軌跡, 定爲黃緯 0°。這兩個大圓有兩個交點, 一個點是春分定爲黃 (赤) 經 0°, 另一個點是秋分定爲黃 (赤) 經 180°。以下是二至二分的經緯度:

	赤經	赤緯	黃經	黃緯
春分	0°	0°	0°	0°
夏至	90°	23.5°	90°	0°
秋分	180°	0°	180°	0°
冬至	270°	-23.5°	270°	0°

習慣上, 我們以 (λ,β) 表示黃經黃緯, 以 (α,δ) 表示赤經赤緯; 兩者有下列的換算公式:

$$\begin{aligned}\sin\delta &= \sin\varepsilon\sin\lambda\cos\beta+\cos\varepsilon\sin\beta\\ \cos\alpha\cos\delta &= \cos\lambda\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\delta &= \cos\varepsilon\sin\lambda\cos\beta-\sin\varepsilon\sin\beta\end{aligned}\tag{2}$$

或

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \cos\varepsilon\sin\delta-\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon\\ \cos\lambda\cos\beta &= \cos\alpha\cos\delta\\ \sin\lambda\cos\beta &= \sin\varepsilon\sin\delta+\sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon\end{aligned}$$

式中 ε 代表黃赤夾角, 大約是 $23.5°$。[2]

回到楊吳與南懷仁的比試。若要知道某月某日太陽直射地球的緯度, 等於是要知道當天太陽的赤緯 δ。以 4 月 20 日這一天為例, 由於這一天太陽約在黃經 $30°$, 亦即將 $\lambda=30°$、$\beta=0°$、$\varepsilon=23.5°$ 代入換算公式 (2) 得到

$$\sin\delta=\sin 23.5°\sin 30°\cos 0°\approx 0.4\times 0.5=0.2$$

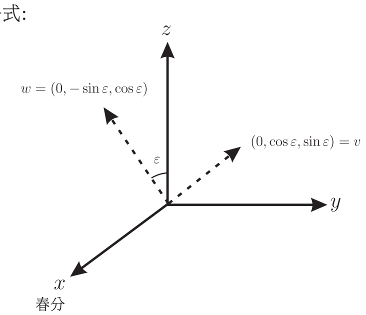
因此 δ 大約是 $11°40'$。

再由 (1) 式, 求 4 月 20 日上午 9 時 $(\theta=-45°)$, 太陽在北京的仰角 γ

$$\sin\gamma=\cos 40°\cos 11°40'\cos(-45°)+\sin 40°\sin 11°40'\approx 0.66$$

γ 大約是 $41°$。但是在同一天正午太陽的仰角卻是 $50°+\delta=50°+11°40'$, 約為 $61°40'$, 兩者相差 $20°$ 左右。

[2] 我們略證第一組換算公式:



如圖, 原點是地球, 春分在 $(1,0,0)$, xy 平面是天赤道面, z 軸指向北極星。黃經黃緯系統的三個互相垂直的單位向量依序為 $(1,0,0)$, $v=(0,\cos\varepsilon,\sin\varepsilon)$ 和 $w=(0,-\sin\varepsilon,\cos\varepsilon)$, 其中 $(1,0,0)$ 和 v 張出黃道面, w 是黃道面的法向量, 其與北極方向的夾角是 $\varepsilon=23.5°$。在天球面上赤經赤緯是 (α,δ) 時, 代表空間向量

$$(\cos\delta\cos\alpha,\cos\delta\sin\alpha,\sin\delta)\tag{3}$$

而黃經黃緯是 (λ,β) 時, 代表空間向量

$$\cos\beta\cos\lambda(1,0,0)+\cos\beta\sin\lambda(0,\cos\varepsilon,\sin\varepsilon)+\sin\beta(0,-\sin\varepsilon,\cos\varepsilon)\tag{4}$$

令 (3) = (4) 就得到第一組換算公式, 至於第二組, 可由第一組中 ε 代以 $-\varepsilon$, (λ,β) 和 (α,δ) 交換而得。

從上面的計算看來, 中國的天文官如果不知道幾何及三角, 又不能理解地球是球形, 乃至於不清楚北京城的緯度, 在這種劣勢之下如何進行最基本的預測? 無怪乎楊吳大敗於南懷仁, 一言以蔽之, 數學太差, 理所當敗。

—本文作者爲台大數學系退休教授—