數學傳播 36卷2期, pp. 94-96

# 三角形中幾個優美的不等式

馬占山 · 劉春傑

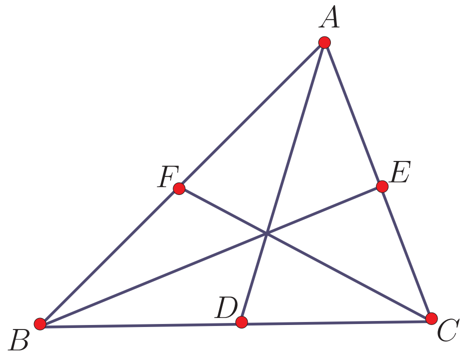
最近筆者在研究三角形不等式時, 發現了幾個優美的不等式, 僅供讀者參考。

如右圖在 $\triangle ABC$ 中, 設三邊長 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ 點 $D$, $E$, $F$ 分別是三邊 $BC, AC, AB$ 的中點,, 並且記

$$AD=m_a=\frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$$

$$BE=m_b=\frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2}$$

$$CF=m_c=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}$$




**命題** 1. $a$, $b$, $c$; $m_a$, $m_b$, $m_c$ 分別是 $\triangle ABC$ 三角形的三邊和三條中線, 則有

$$\frac{m_c^2}{c^2}+\frac{m_b^2}{b^2}\geq\frac{m_b^2+m_c^2}{bc} \tag{1}$$

**證明**: 把中線公式代入(1) 的左右兩邊得

$$\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4c^2}+\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4b^2}\geq\frac{4a^2+b^2+c^2}{4bc}$$

因此證明 (1) 等價於證明

$$b^2(2a^2+2b^2-c^2)+c^2(2a^2+2c^2-b^2)-bc(4a^2+b^2+c^2)\geq 0$$

整理得

$$(b-c)^2(2b^2+2c^2+2a^2+3bc)\geq 0$$

上式顯然成立, 當且僅當 $b=c$ 時取到等號。

**命題** 2. $a$, $b$, $c$; $m_a$, $m_b$, $m_c$ 分別是三角形的三邊和三條中線, 則有

$$\frac{c^2}{m_c^2}+\frac{b^2}{m_b^2}\ge\frac{b^2+c^2}{m_bm_c} \tag{2}$$

**證明**: (2) $\Leftrightarrow 4b^2m_c^2+4c^2m_b^2\ge 4m_bm_c(b^2+c^2)$。由文 [1] 的結果 $4m_bm_c\le 2a^2+bc$ 只需要證明不等式 $4b^2m_c^2+4c^2m_b^2\ge(2a^2+bc)(b^2+c^2)$ 成立即可。把中線公式代入 (2) 的左邊得

$$\begin{aligned}&b^2(2a^2+2b^2-c^2)+c^2(2a^2+2c^2-b^2)-(2a^2+bc)(b^2+c^2)\\&\quad=(b-c)^2(2b^2+2c^2+3bc)\ge 0\end{aligned}$$

上式顯然成立, 當且僅當 $b=c$ 時取到等號。
可以看出其結構十分的優美, 利用上面的命題又得

**推論** 1. $a$, $b$, $c$; $m_a$, $m_b$, $m_c$ 分別是三角形的三邊和三條中線, 則

$$\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\ge\frac{b+c}{\sqrt{m_bm_c}}$$

**證明**: 給不等式 (2) 兩邊都加上 $\frac{2bc}{m_bm_c}$ 並開方便得到結果。

**推論** 2. $a$, $b$, $c$; $m_a$, $m_b$, $m_c$ 分別是三角形的三邊和三條中線, 則有

$$\frac{c^2}{m_c^2}+\frac{b^2}{m_b^2}\ge\frac{2am_a}{m_bm_c}.$$

**證明**: $(2am_a)^2=a^2(2b^2+2c^2-a^2)\le\left(\frac{2b^2+2c^2-a^2+a^2}{2}\right)^2=(b^2+c^2)^2$ 以及命題 (2) 得到

$$\frac{c^2}{m_c^2}+\frac{b^2}{m_b^2}\ge\frac{b^2+c^2}{m_bm_c}\ge\frac{2am_a}{m_bm_c}.$$

**推論** 3. $a$, $b$, $c$; $m_a$, $m_b$, $m_c$ 分別是三角形的三邊和三條中線, 則有

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\ge\frac{3}{8}\Big(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Big)\ge\frac{9}{4}.$$

**證明**: 由命題 (1) 可得

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\ge\frac{a(m_b^2+m_c^2)+b(m_a^2+m_c^2)+c(m_a^2+m_b^2)}{2abc}$$

將不等式左邊的 $m_a$, $m_b$, $m_c$ 以中線公式代入, 可得

$$\frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}\ge\frac{1}{8abc}[4(a^3+b^3+c^3)+ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+a^2c+ac^2]$$

再由常見的不等式 $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$ ($a,b$ 爲非負實數), 因此得

$$\begin{aligned}4(a^3+b^3+c^3)&\ge 2a^2b+2ab^2+2b^2c+2bc^2+2a^2c+2ac^2\\ \frac{m_a^2}{a^2}+\frac{m_b^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{c^2}&\ge\frac{1}{8abc}[3a(b^2+c^2)+3b(a^2+c^2)+3c(a^2+b^2)]\\ &=\frac{3}{8}\Big(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Big)\\ &\ge\frac{3}{8}(2+2+2)=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

當且僅當 $b=c=a$ 時取到等號。

## 参考文獻

1. 楊學枝, 不等式研究, pp.565-564 (西藏人民出版社 2000, 6)。

—本文作者任教中國寧夏固原市五原中學—