數學傳播 36卷2期, pp. 85-93

從 Cauchy 不等式的一種證法談起

秦慶雄 · 範花妹

在不等式的證明方法中, 讀者一定了解 Cauchy 不等式的一種證法:

記 $M=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$, $N=\sum\limits_{i=1}^n b_i^2$, 當 $MN=0$ 時, $\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\Big)=\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2$; 當 $MN\neq 0$ 時, 則

$$2=\frac{M}{M}+\frac{N}{N}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}{M}+\frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}{N}=\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{M}+\sum_{i=1}^n\frac{b_i^2}{N}\geq\sum_{i=1}^n\frac{2|a_ib_i|}{\sqrt{MN}}=\frac{2\sum\limits_{i=1}^n|a_ib_i|}{\sqrt{MN}},$$

即 $2\geq\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^n|a_ib_i|}{\sqrt{MN}}$, 整理得

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)\geq\Big(\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\Big)^2.$$

所以, $\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\Big)\geq\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2$.

筆者稱此法爲構造 “數字” 法, 本文結合算術—幾何平均不等式, 推廣此法的使用範圍, 簡證或推廣了幾個著名或新穎的不等式:

例1: 已知 $a,b,c\in R^+$, 試證明:

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^3 \tag{1}$$

證明: 記 $M_1=a^2+ab+b^2$, $M_2=b^2+bc+c^2$, $M_3=c^2+ca+a^2$, 則

$$\begin{aligned}3&=\frac{M_1}{M_1}+\frac{M_2}{M_2}+\frac{M_3}{M_3}\\&=\frac{a^2+ab+b^2}{M_1}+\frac{b^2+bc+c^2}{M_2}+\frac{c^2+ca+a^2}{M_3}\\&=\Big(\frac{a^2}{M_1}+\frac{c^2}{M_2}+\frac{ca}{M_3}\Big)+\Big(\frac{ab}{M_1}+\frac{b^2}{M_2}+\frac{a^2}{M_3}\Big)+\Big(\frac{b^2}{M_1}+\frac{bc}{M_2}+\frac{c^2}{M_3}\Big)\\&\ge\frac{3ca}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}}+\frac{3ab}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}}+\frac{3bc}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}}\\&=\frac{3(ab+bc+ca)}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}},\end{aligned}$$

即 $3\ge\dfrac{3(ab+bc+ca)}{\sqrt[3]{M_1M_2M_3}}$, 整理得

$$M_1M_2M_3\ge(ab+bc+ca)^3,$$

也就是 $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$, 從而, (1) 式得證。

例 2: 若 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 爲滿足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$ 的正數, $\lambda\ge\dfrac{1}{n^2}$, 則

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_3}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\ge\Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n \tag{2}$$

證明: 記 $M_1=a_1+\dfrac{\lambda}{a_2}$, $M_2=a_2+\dfrac{\lambda}{a_3}$, $\ldots$, $M_n=a_n+\dfrac{\lambda}{a_1}$, 則

$$\begin{aligned}n&=\frac{M_1}{M_1}+\frac{M_2}{M_2}+\cdots+\frac{M_n}{M_n}\\&=\frac{a_1+\frac{\lambda}{a_2}}{M_1}+\frac{a_2+\frac{\lambda}{a_3}}{M_2}+\cdots+\frac{a_n+\frac{\lambda}{a_1}}{M_n}\\&=\Big(\frac{a_1}{M_1}+\frac{a_2}{M_2}+\cdots+\frac{a_n}{M_n}\Big)+\Big(\frac{\frac{\lambda}{a_2}}{M_1}+\frac{\frac{\lambda}{a_3}}{M_2}+\cdots+\frac{\frac{\lambda}{a_1}}{M_3}\Big)\\&\ge\frac{n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}+\frac{\frac{n\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}},\\&=\frac{n\Big(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\Big)}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}\end{aligned}$$

即 $n \geq \dfrac{n\Big(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\dfrac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\Big)}{\sqrt[n]{M_1M_2\cdots M_n}}$, 整理得

$$M_1M_2\cdots M_n \geq \Big(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\Big)^n,$$

即

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_3}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_1}\Big) \geq \Big(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\Big)^n.$$

因此, 要證明 $\Big(a_1+\dfrac{\lambda}{a_2}\Big)\Big(a_2+\dfrac{\lambda}{a_3}\Big)\cdots\Big(a_n+\dfrac{\lambda}{a_1}\Big) \geq \Big(\dfrac{1}{n}+n\lambda\Big)^n$ 成立,
只需要證明 $\Big(\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\dfrac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\Big)^n \geq \Big(\dfrac{1}{n}+n\lambda\Big)^n$ 成立, 即證明 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\dfrac{\lambda}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} \geq \dfrac{1}{n}+n\lambda \Leftrightarrow \Big(\dfrac{1}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\Big)(n\lambda-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}) \geq 0$,

由 $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, 和 $n\lambda \geq n\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n}$ 知, 上式成立。

從而, (2) 式得證, 由證明過程可知, 當且僅當 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 時, (2) 式取等號。
重複上述證明過程, 我們順勢可得 (2) 式的一個類似:

命題: 若 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 爲滿足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$ 的正數, $\lambda \geq \dfrac{1}{n^2}$, 則

$$\Big(a_1+\frac{\lambda}{a_1}\Big)\Big(a_2+\frac{\lambda}{a_2}\Big)\cdots\Big(a_n+\frac{\lambda}{a_n}\Big) \geq \Big(\frac{1}{n}+n\lambda\Big)^n \tag{3}$$

(3) 式推廣了 2008 年南京大學自主招生試題中的一道不等式:

設 $a,b,c \in R^+$ 且 $a+b+c=1$, 求證

$$\Big(a+\frac{1}{a}\Big)\Big(b+\frac{1}{b}\Big)\Big(c+\frac{1}{c}\Big) \geq \frac{1000}{27}.$$

例 3: 設 $a_1,a_2,\ldots,a_{n-m}$, $m,n \in N_+$, $n-m \geq 3$, 則

$$(a_1^n-a_1^m+n-m)(a_2^n-a_2^m+n-m)\cdots(a_{n-m}^n-a_{n-m}^m+n-m) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m}, \tag{4}$$

證明: 當 $a_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n-m)$ 時, 有

$$(a_i^n-a_i^m+n-m)-(a_i^{n-m}+n-m-1)=a_i^{n-m}(a_i^m-1)-(a_i^m-1)=(a_i^{n-m}-1)(a_i^m-1) \geq 0.$$

故, 要證 $(a_1^n-a_1^m+n-m)(a_2^n-a_2^m+n-m)\cdots(a_{n-m}^n-a_{n-m}^m+n-m)\geq(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m}$, 只需要證 $(a_1^{n-m}+n-m-1)(a_2^{n-m}+n-m-1)\cdots(a_{n-m}^{n-m}+n-m-1)\geq(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m}$. 記 $M_i=a_i^{n-m}+n-m-1$ $(i=1,2,\ldots,n-m)$, 則

$$\begin{aligned}
n-m&=\frac{M_1}{M_1}+\frac{M_2}{M_2}+\cdots+\frac{M_{n-m}}{M_{n-m}}\\
&=\frac{a_1^{n-m}+n-m-1}{M_1}+\frac{a_2^{n-m}+n-m-1}{M_2}+\cdots+\frac{a_{n-m}^{n-m}+n-m-1}{M_{n-m}}\\
&=\Big(\frac{a_1^{n-m}}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\cdots+\frac{1}{M_{n-m}}\Big)+\Big(\frac{1}{M_1}+\frac{a_2^{n-m}}{M_2}+\cdots+\frac{1}{M_{n-m}}\Big)+\cdots\\
&\quad+\Big(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\cdots+\frac{a_{n-m}^{n-m}}{M_{n-m}}\Big)\\
&\geq\frac{(n-m)a_1}{\sqrt[n-m]{M_1M_2\cdots M_{n-m}}}+\frac{(n-m)a_2}{\sqrt[n-m]{M_1M_2\cdots M_{n-m}}}+\cdots+\frac{(n-m)a_{n-m}}{\sqrt[n-m]{M_1M_2\cdots M_{n-m}}}\\
&=\frac{(n-m)(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})}{\sqrt[n-m]{M_1M_2\cdots M_{n-m}}},
\end{aligned}$$

即 $n-m\geq\dfrac{(n-m)(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})}{\sqrt[n-m]{M_1M_2\cdots M_{n-m}}}$, 整理得

$$M_1M_2\cdots M_{n-m}\geq(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m},$$

也就是 $(a_1^{n-m}+n-m-1)(a_2^{n-m}+n-m-1)\cdots(a_{n-m}^{n-m}+n-m-1)\geq(a_1+a_2+\cdots+a_{n-m})^{n-m}$, 從而, (4) 式得證。

例 4: 在任意 $\triangle ABC$ 中, 若 $n\in N_+$, 則有

$$\frac{\cos^{2n}A}{\sin^2B+\sin^2C}+\frac{\cos^{2n}B}{\sin^2C+\sin^2A}+\frac{\cos^{2n}C}{\sin^2A+\sin^2B}\geq\frac{1}{2^{2n-1}},\tag{5}$$

證明: 當 $n=1$ 時, 即爲 (6), 也就是

$$\frac{\cos^2A}{\sin^2B+\sin^2C}+\frac{\cos^2B}{\sin^2C+\sin^2A}+\frac{\cos^2C}{\sin^2A+\sin^2B}\geq\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{2\times1-1}}.$$

當 $n\geq2$ 時, 記

$$M=\frac{\cos^{2n}A}{\sin^2B+\sin^2C}+\frac{\cos^{2n}B}{\sin^2C+\sin^2A}+\frac{\cos^{2n}C}{\sin^2A+\sin^2B},\ N=2(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C),$$

則

$$\begin{aligned}
n &= \frac{M}{M} + \frac{N}{N} + \underbrace{1+\cdots+1}_{(n-2)\text{個}1} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^{2n} A}{\sin^2 B+\sin^2 C} + \dfrac{\cos^{2n} B}{\sin^2 C+\sin^2 A} + \dfrac{\cos^{2n} C}{\sin^2 A+\sin^2 B}}{M} \\
&\quad + \frac{2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)}{N} + \underbrace{1+\cdots+1}_{(n-2)\text{個}1} \\
&= \left(\frac{\frac{\cos^{2n} A}{\sin^2 B+\sin^2 C}}{M} + \frac{\sin^2 B+\sin^2 C}{N} + \underbrace{\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}}_{(n-2)\text{個}\frac{1}{3}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\frac{\cos^{2n} B}{\sin^2 C+\sin^2 A}}{M} + \frac{\sin^2 C+\sin^2 A}{N} + \underbrace{\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}}_{(n-2)\text{個}\frac{1}{3}} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\frac{\cos^{2n} C}{\sin^2 A+\sin^2 B}}{M} + \frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{N} + \underbrace{\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}}_{(n-2)\text{個}\frac{1}{3}} \right) \\
&\ge \frac{n\cos^2 A}{\sqrt[n]{3^{n-2}MN}} + \frac{n\cos^2 B}{\sqrt[n]{3^{n-2}MN}} + \frac{n\cos^2 C}{\sqrt[n]{3^{n-2}MN}} \\
&= \frac{n(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)}{\sqrt[n]{3^{n-2}MN}}.
\end{aligned}$$

即 $n \ge \dfrac{n(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)}{\sqrt[n]{3^{n-2}MN}}$, 整理得

$$\begin{aligned}
M &\ge \frac{(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)^n}{3^{n-2}[2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)]} = \frac{(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)^n}{3^{n-2}[6-2(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)]} \\
&= \frac{(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)^{n-1}}{3^{n-2}\left(\dfrac{6}{\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C} - 2\right)}.
\end{aligned}$$

由常見三角不等式 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \ge \dfrac{3}{4}$, 得到

$$M \ge \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}}{3^{n-2}\left(6 \div \dfrac{3}{4} - 2\right)} = \frac{1}{2^{2n-1}},$$

也就是, 當 $n\ge 2$ 時,

$$\frac{\cos^{2n}A}{\sin^2B+\sin^2C}+\frac{\cos^{2n}B}{\sin^2C+\sin^2A}+\frac{\cos^{2n}C}{\sin^2A+\sin^2B}\ge\frac{1}{2^{2n-1}}.$$

綜上, (5) 式得證。

註: 上述命題推廣了由劉健老師提出, 許康華老師在文 [1] 中證明了的如下命題:

在任意 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\frac{\cos^{2}A}{\sin^2B+\sin^2C}+\frac{\cos^{2}B}{\sin^2C+\sin^2A}+\frac{\cos^{2}C}{\sin^2A+\sin^2B}\ge\frac{1}{2}. \tag{6}$$

例 5: 設 $a_i\ge 0$, $b_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $l\in N$, $k\in N_+$, 則

$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i^{l+k}}{b_i^l}\ge\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i\Big)^{l+k}}{n^{k-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i\Big)^l}. \tag{7}$$

證明: 記 $M=\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{a_i^{l+k}}{b_i^l}$, $N=\sum\limits_{i=1}^n b_i$, 則

$$\begin{aligned}l+k&=\frac{M}{M}+l\frac{N}{N}+\underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{個}1}\\&=\frac{\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i^{l+k}}{b_i^l}}{M}+l\frac{\sum\limits_{i=1}^n b_i}{N}+\underbrace{1+\cdots+1}_{(k-1)\text{個}1}=\sum_{i=1}^n\Bigg(\frac{\frac{a_i^{l+k}}{b_i^l}}{M}+\underbrace{\frac{b_i}{N}+\cdots+\frac{b_i}{N}}_{l\text{個}\frac{b_i}{N}}+\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{(k-1)\text{個}\frac{1}{n}}\Bigg)\\&\ge\sum_{i=1}^n\frac{(l+k)a_i}{\sqrt[l+k]{n^{k-1}MN^l}}=\frac{(l+k)\sum\limits_{i=1}^n a_i}{\sqrt[l+k]{n^{k-1}MN^l}},\end{aligned}$$

即 $l+k\ge\dfrac{(l+k)\sum\limits_{i=1}^n a_i}{\sqrt[l+k]{n^{k-1}MN^l}}$, 整理得 $n^{k-1}MN^l\ge\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i\Big)^{l+k}$, 即 $M\ge\dfrac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i\Big)^{l+k}}{n^{k-1}N^l}$。從而有 $\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{a_i^{l+k}}{b_i^l}\ge\dfrac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_i\Big)^{l+k}}{n^{k-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^n b_i\Big)^l}$。

註: 例 5 推廣了著名的 Radon 不等式。

例 6: 設 $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $k > 0$, $n \geq 3$, 且 $m, n \in N_+$, 則

$$\frac{a_1^m}{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + ka_n} + \frac{a_2^m}{a_3 + a_4 + \cdots + a_n + ka_1} + \cdots + \frac{a_n^m}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + ka_{n-1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{m-1}}{n^{m-2}(n - 2 + k)} \tag{8}$$

證明: 記

$$M = \frac{a_1^m}{a_2 + \cdots + a_{n-1} + ka_n} + \frac{a_2^m}{a_3 + \cdots + a_n + ka_1} + \cdots + \frac{a_n^m}{a_1 + \cdots + a_{n-2} + ka_{n-1}},$$
$$N = (n - 2 + k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

則

$$\begin{aligned}
m &= \frac{M}{M} + \frac{N}{N} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(m-2)\text{個}1} \\
&= \frac{\frac{a_1^m}{a_2 + \cdots + a_{n-1} + ka_n} + \frac{a_2^m}{a_3 + \cdots + a_n + ka_1} + \cdots + \frac{a_n^m}{a_1 + \cdots + a_{n-2} + ka_{n-1}}}{M} \\
&\quad + \frac{(a_2 + \cdots + a_{n-1} + ka_n) + (a_3 + \cdots + a_n + ka_1) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{n-2} + ka_{n-1})}{N} \\
&\quad + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m-2\text{個}1} \\
&= \Big(\frac{\frac{a_1^m}{a_2 + \cdots + a_{n-1} + ka_n}}{M} + \frac{a_2 + \cdots + a_{n-1} + ka_n}{N} + \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-2\text{個}\frac{1}{n}}\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{\frac{a_2^m}{a_3 + \cdots + a_n + ka_1}}{M} + \frac{a_3 + \cdots + a_n + ka_1}{N} + \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-2\text{個}\frac{1}{n}}\Big) + \cdots \\
&\quad + \Big(\frac{\frac{a_n^m}{a_1 + \cdots + a_{n-2} + ka_{n-1}}}{M} + \frac{a_1 + \cdots + a_{n-2} + ka_{n-1}}{N} + \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-2\text{個}\frac{1}{n}}\Big) \\
&\geq \frac{ma_1}{\sqrt[m]{n^{m-2}MN}} + \frac{ma_2}{\sqrt[m]{n^{m-2}MN}} + \cdots + \frac{ma_n}{\sqrt[m]{n^{m-2}MN}} = \frac{m(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{\sqrt[m]{n^{m-2}MN}},
\end{aligned}$$

即 $m \geq \dfrac{m(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{\sqrt[m]{n^{m-2}MN}}$, 整理得 $MN \geq \dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m}{n^{m-2}}$, 即 $(n-2+k)(a_1+a_2+\cdots+a_n)M \geq \dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^m}{n^{m-2}}$, 也就是 $M \geq \dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{m-1}}{n^{m-2}(n-2+k)}$。從而, (8) 式得證。

例 7: 已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, a,b 均爲正實數, $m,n\in N_+$, 求函數 $y=\dfrac{a}{\sin^{\frac{n}{m}}x}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{n}{m}}x}$ 的最小值。

解:

$$\begin{aligned}
2m+n=&\frac{2ma}{y\sin^{\frac{n}{m}}x}+\frac{2mb}{y\cos^{\frac{n}{m}}x}+n\cos^2x+n\sin^2x\\
=&\underbrace{\frac{a}{y\sin^{\frac{n}{m}}x}+\cdots+\frac{a}{y\sin^{\frac{n}{m}}x}}_{2m\text{個}}+\underbrace{\sin^2x+\cdots+\sin^2x}_{n\text{個}\sin^2x}\\
&+\underbrace{\frac{b}{y\cos^{\frac{n}{m}}x}+\cdots+\frac{b}{y\cos^{\frac{n}{m}}x}}_{2m\text{個}}+\underbrace{\cos^2x+\cdots+\cos^2x}_{n\text{個}\cos^2x}\\
\geq&(2m+n)\cdot\sqrt[2m+n]{\left(\frac{a}{y\sin^{\frac{n}{m}}x}\right)^{2m}\cdot(\sin^2x)^n}\\
&+(2m+n)\cdot\sqrt[2m+n]{\left(\frac{b}{y\cos^{\frac{n}{m}}x}\right)^{2m}\cdot(\cos^2x)^n}\\
=&(2m+n)\sqrt[2m+n]{\left(\frac{a}{y}\right)^{2m}}+(2m+n)\sqrt[2m+n]{\left(\frac{b}{y}\right)^{2m}}\\
=&(2m+n)\cdot\frac{\sqrt[2m+n]{a^{2m}}+\sqrt[2m+n]{b^{2m}}}{\sqrt[2m+n]{y^{2m}}},
\end{aligned}$$

即 $2m+n\geq(2m+n)\cdot\dfrac{\sqrt[2m+n]{a^{2m}}+\sqrt[2m+n]{b^{2m}}}{\sqrt[2m+n]{y^{2m}}}$, 整理得 $y\geq\sqrt[2m]{\left(\sqrt[2m+n]{a^{2m}}+\sqrt[2m+n]{b^{2m}}\right)^{2m+n}}$, 當且僅當 $\dfrac{a}{y\sin^{\frac{n}{m}}x}=\sin^2x$, $\dfrac{b}{y\cos^{\frac{n}{m}}x}=\cos^2x$, 即 $\tan^{\frac{n}{m}+2}x=\dfrac{a}{b}$, 也就是 $x=\arctan\sqrt[2m+n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ 時取等號。

所以, 函數 $y=\dfrac{a}{\sin^{\frac{n}{m}}x}+\dfrac{b}{\cos^{\frac{n}{m}}x}$ 的最小值 $\left(a^{\frac{2m}{2m+n}}+b^{\frac{2m}{2m+n}}\right)^{\frac{2m+n}{2m}}$。

鏈接練習:

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a>0$, $n\in N_+$, 且 $n\geq 2$, 則有
$$\frac{\cos^{2n}A}{a+\cos^2 A}+\frac{\cos^{2n}B}{a+\cos^2 B}+\frac{\cos^{2n}C}{a+\cos^2 C}\geq\frac{3}{4^{n-1}(4a+1)}.$$
2. 已知 $a_1>a_2>\cdots>a_n$, $k\in N_+$, 則
$$\frac{1}{(a_1-a_2)^{2k-1}}+\frac{1}{(a_2-a_3)^{2k-1}}+\cdots+\frac{1}{(a_{n-1}-a_n)^{2k-1}}\geq\frac{(n-1)^{2k}}{(a_1-a_n)^{2k-1}}.$$
3. 若 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 滿足 $\sum\limits_{i=1}^n a_i=S$ 的正數, 且 $\alpha>0$, $\lambda\geq\Big(\dfrac{S}{n}\Big)^{2\alpha}$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 爲 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的一個排列, 則
$$\Big(a_1^\alpha+\frac{\lambda}{b_1^\alpha}\Big)\Big(a_2^\alpha+\frac{\lambda}{b_2^\alpha}\Big)\cdots\Big(a_n^\alpha+\frac{\lambda}{b_n^\alpha}\Big)\geq\Big[\Big(\frac{S}{n}\Big)^\alpha+\lambda\Big(\frac{n}{S}\Big)^\alpha\Big]^n.$$

參考文獻

1. 許康華, 一個三角形不等式的證明: 幾何不等式在中國, 南京: 江蘇教育出版社, 1996, 43-45頁。

—本文作者任教中國雲南省大理州漾濞縣第一中學(高中部)—