數學傳播　36卷2期, pp. 77-84

用 Froullani 公式求一些反常積分

胡紹宗

形如 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$ $(a,b>0)$ 的積分, 稱爲 Froullani 積分。

設 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上連續, 且 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 則

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}\qquad\text{(Froullani 公式)}\tag{1}$$

證: 當 $a=b$ 時, 顯然, 等式成立。

當 $a<b$ 時, 設 $0<\delta<\Delta<+\infty$, 則以下積分存在:

$$\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\delta^\Delta\frac{f(bx)}{x}dx$$

在前一積分中令 $ax=z$; 後一積分中令 $bx=z$

$$\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz$$

由推廣的中值定理, 得

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{z}dz=f(\xi)\cdot\ln\frac{b}{a}\qquad(a\delta\le\xi\le b\delta),$$

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=f(\eta)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{1}{z}dz=f(\eta)\cdot\ln\frac{b}{a}\qquad(a\Delta\le\eta\le b\Delta),$$

從而 $$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=[f(\xi)-f(\eta)]\cdot\ln\frac{b}{a},$$

於是 $$\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(\xi)-f(\eta)]\cdot\ln\frac{b}{a},$$

又當 $\delta\to 0$ 時, $\xi\to 0$; 當 $\Delta\to+\infty$ 時, $\eta\to+\infty$,

因此 $\displaystyle\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Delta\to+\infty}}\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \eta\to+\infty}}[f(\xi)-f(\eta)]\cdot\ln\frac{b}{a}=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$,

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}$。

當 $a>b$ 時,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx&=-\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx=-[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{a}{b}\\&=[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\Big(\frac{a}{b}\Big)^{-1}=[f(0)-f(+\infty)]\cdot\ln\frac{b}{a}。\end{aligned}$$

若 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 但積分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 存在, 則

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}。\tag{2}$$

事實上, 因 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 存在, 由無窮積分收斂的柯西準則, 對任意 $\varepsilon>0$, 當 Δ 充分大以後,

$$\Big|\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz\Big|<\varepsilon,\quad 即\lim_{\Delta\to+\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(z)}{z}dz=0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}。$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 點不連續, 但積分 $\displaystyle\int_0^A\frac{f(x)}{x}dx$ $(A<+\infty)$ 存在, 則

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}。\tag{3}$$

事實上, 因 $\displaystyle\int_0^A\frac{f(x)}{x}dx$ 存在, 由瑕積分收斂的充要條件, 對任意 $\varepsilon>0$, 當 δ 充分小時, 有

$$\Big|\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz\Big|<\varepsilon,,\quad 即\lim_{\delta\to 0}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}dz=0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}。$$

上述公式 (1)、(2)、(3) 可以方便的用於求一些按照通常方法難以計算的反常積分。

例1: 求下列積分 (a、$b>0$)

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}dx.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bxdx.$

解: (1) 取 $f(x)=\arctan x$, 則 $f(0)=0$, $f(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$, 則由公式 (1),

$$\text{原積分}=(0-\frac{\pi}{2})\ln\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}。$$

(2) 令 $\ln x=-t$, 則 $x=e^{-t}$, $dx=-e^{-t}$, 於是

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}dx&=\int_{+\infty}^0\frac{e^{-(a-1)t}-e^{-(b-1)t}}{-t}\cdot(-e^{-t})dt\\&=\int_{+\infty}^0\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}dt,\end{aligned}$$

取 $f(t)=e^{-t}$, 則 $f(0)=1$, $f(+\infty)=0$, 由公式 (1),

$$\text{原積分}=\ln\frac{b}{a}。$$

(3) 當 $a=b$ 時, 所討論積分成為

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx=\int_0^{1}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx+\int_1^{\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx$$

由於 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx=0$, 補充定義, 當 $x=0$ 時, $\dfrac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}=0$, 這樣 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx$ 為正常積分, 而

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx=\int_1^{\infty}\frac{\cos ax}{x}dx-\int_1^{\infty}\frac{\cos^2 ax}{x}dx,$$

由狄利克雷判別法, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos ax}{x}dx$ 收斂, 又

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos^2 ax}{x}dx=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1+\cos 2ax}{2}}{x}dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2x}dx+\int_1^{\infty}\frac{\cos 2ax}{2x}dx$$

由狄利克雷判別法, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos 2ax}{2x}dx$ 收斂, 但 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{2x}dx$ 發散, 從而 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos^2 ax}{2x}dx$ 發散, 於是 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos ax-\cos^2 ax}{x}dx$ 發散, 所以當 $a=b$ 時, 原積分發散。

若 $a>b$, 則

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx dx &= \int_0^{\infty}\frac{2\sin^2\frac{a}{2}x}{x}\cos bx dx\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{a}{2}x(2\sin\frac{a}{2}x\cos bx)}{x}dx\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{a}{2}x[\sin(\frac{a}{2}+b)x+\sin(\frac{a}{2}-b)x]}{x}dx\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{a}{2}x\sin(\frac{a}{2}+b)x+\sin\frac{a}{2}x\sin(\frac{a}{2}-b)x}{x}dx\\
&=\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{2}[\cos(-b)x-\cos(a+b)x]+\frac{1}{2}[\cos bx-\cos(a-b)x]}{x}dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos(a+b)x}{x}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos bx-\cos(a-b)x}{x}dx
\end{aligned}$$

取 $f(x)=\cos x$, 則 $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在, 但由狄利克雷判別法, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx=\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 存在, 由公式 (2),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx dx &= \frac{1}{2}\ln\frac{a+b}{b}+\frac{1}{2}\ln\frac{a-b}{b}\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2-b^2}{b^2}=\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}。
\end{aligned}$$

若 $a<b$, $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos ax}{x}\cos bx dx=\ln\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$。總之, 當 $a\neq b$ 時,

$$原積分=\ln\frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}。$$

例2: 試求積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big)\frac{dx}{x^2}$。

解: 利用下面恆等式, 將所給積分化成 Froullani 積分。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big) &= -\frac{1}{2x}(e^{-x}-e^{-2x})+\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\Big)\\
&\quad-\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\Big)
\end{aligned}$$

此恆等式的證明如下:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2x}(e^{-x}-e^{-2x})+\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\Big)-\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\Big)\\
&=-\frac{1}{2x}(e^{-x}-e^{-2x})+\frac{1}{2x}\Big(\frac{2}{e^x-1}-\frac{2}{x}+e^{-x}\Big)-\frac{1}{2x}\Big(\frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}+e^{-2x}\Big)\\
&=\frac{1}{2x}\Big(-e^{-x}+e^{-2x}+\frac{2}{e^x-1}-\frac{2}{x}+e^{-x}-\frac{2}{e^{2x}-1}+\frac{1}{x}-e^{-2x}\Big)\\
&=\frac{1}{2x}\Big(\frac{2}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}\Big)\\
&=\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}\Big)\\
&=\frac{1}{x^2}\Big(\frac{x}{e^x-1}-\frac{x}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2}\Big)\\
&=\frac{1}{x^2}\Big(\frac{x(e^x+1)}{e^{2x}-1}-\frac{x}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2}\Big)\\
&=\frac{1}{x^2}\Big(\frac{xe^x}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2}\Big)\\
&=\frac{1}{x^2}\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big)。
\end{aligned}
$$

於是

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big)\frac{dx}{x^2}=\int_0^\infty-\frac{1}{2x}(e^{2x}-e^{-2x})dx+\int_0^\infty\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\Big)dx\\
-\int_0^\infty\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\Big)dx
\end{aligned}
$$

在上式右端第二個積分中令 $x=2t$, 則

$$\int_0^\infty\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\Big)dx=\int_0^\infty\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{e^{2t}-1}-\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\Big)dt$$

因此

$$\int_0^\infty\Big(\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2}\Big)\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$$

取 $f(x)=e^{-x}$, 則 $f(0)=1$, $f(+\infty)=0$ 由公式 (1), 得

$$\text{原積分}=-\frac{1}{2}\ln 2。$$

例3: 計算 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx$ $(a,b>0)$。

解: 對 $\delta>0$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_\delta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx\\
&=\int_\delta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}dx+(a-b)\int_\delta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}dx \quad (\text{這些積分當 } \delta=0 \text{ 時並不收斂})\\
&=\int_\delta^\infty (e^{-ax}-e^{-bx})d(-\frac{1}{x})+(a-b)\int_\delta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}dx\\
&=-\frac{1}{x}(e^{-ax}-e^{-bx})\Big|_\delta^\infty-\int_\delta^\infty -\frac{1}{x}d(e^{-ax}-e^{-bx})+(a-b)\int_\delta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}dx\\
&=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{\delta}+\int_\delta^\infty \frac{-ae^{-ax}+be^{-bx}}{x}dx+(a-b)\int_\delta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}dx\\
&=\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{\delta}+a\int_\delta^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx&=\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}dx\\
&=\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{\delta}+a\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx\\
&=b-a+a\int_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}dx
\end{aligned}$$

取 $f(x)=e^{-x}$, 則 $f(0)=1$, $f(+\infty)=0$, 於是由公式 (1),

$$\text{原積分}=b-a+a\ln\frac{a}{b}\text{。}$$

例4: 求證 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{A\cos ax+B\cos bx+\cdots+K\cos kx}{x}dx$
$=-(A\ln a+B\ln b+\cdots+K\ln k)$, $(a,b,\ldots,k>0$, 且 $A+B+\cdots+K=0)$。

解: 由公式 (2),

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{A\cos ax-A\cos kx}{x}dx&=A\ln\frac{k}{a}=-A\ln a+A\ln k,\\
\int_0^\infty \frac{B\cos bx-B\cos kx}{x}dx&=B\ln\frac{k}{b}=-B\ln b+B\ln k,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\int_0^\infty \frac{K\cos Kx-K\cos kx}{x}dx&=K\ln\frac{k}{k}=-K\ln k+K\ln k,
\end{aligned}$$

以上各等式兩邊分別相加, 得

$$\int_0^\infty \frac{(A\cos ax + B\cos bx + \cdots + K\cos kx) - (A+B+\cdots+K)\cos kx}{x}dx$$
$$= -(A\ln a + B\ln b + \cdots + K\ln k) + (A+B+\cdots+K)\ln k,$$

即 $$\int_0^\infty \frac{(A\cos ax + B\cos bx + \cdots + K\cos kx)}{x}dx$$
$$= -(A\ln a + B\ln b + \cdots + K\ln k)。$$

例 5: 計算 $\int_0^1 dx \int_1^\infty (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})dy - \int_1^\infty dy \int_0^1 (pe^{-pxy} - qe^{-qxy})dx (p, q > 0)$。

解: 當 $p = q$ 時, 原式 $= 0$。

當 $p \neq q$ 時,

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^1 \Big(\frac{-e^{-pxy} + e^{-qxy}}{x}\Big|_1^\infty\Big)dx - \int_1^\infty \Big(\frac{-e^{-pxy} + e^{-qxy}}{y}\Big|_0^1\Big)dy \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}dx - \int_1^\infty \frac{-e^{-py} + e^{-qy}}{y}dy \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-py} - e^{-qy}}{y}dy \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-px} - e^{-qx}}{x}dx。
\end{aligned}$$

取 $f(x) = e^{-x}$, 則 $f(0) = 1$, $f(+\infty) = 0$, 由公式 (1),

$$\text{原積分} = \ln\frac{q}{p}。$$

習題: 求下列積分 $(a > 0,\ b > 0,\ p > 0,\ q > 0)$

(1) $\int_0^\infty \ln\frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}}\frac{dx}{x}$。

(2) $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x}dx$。

(3) $\int_0^\infty \frac{b\sin ax - a\sin bx}{x^2}dx$。

(4) $\int_0^\infty \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2}dx$。

參考文獻

1. 華東師範大學數學系編,《數學分析》, 第三版, 高等教育出版社, 2001年7月。
2. Γ. M. 菲赫金哥爾茨著,《微積分學教程》, 人民教育出版社, 1978年3月。
3. 復旦大學數學系主編,《數學分析》, 第二版, 上海科學技術出版社, 1978年3月。

—本文作者任教中國安徽省阜陽師範學院—