數學傳播 36卷2期, pp. 70-76

利用向量內積與外積求反矩陣

李瑞 · 鄭金樹 · 洪瑞英 · 吳汀菱

前言:

給定一個二階方陣或三階方陣 $\boldsymbol{A}$, 要如何求得其乘法反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 呢?

高中數學課程中, 現行課本中的方法, 一般皆是設出此反矩陣的每一元素, 列出滿足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$ 的一次方程組, 再使用克拉瑪公式解之, 以一般高中生的計算能力來看, 這個代數方法的過程在矩陣 $\boldsymbol{A}$ 爲二階方陣時, 並不費事, 但對三階方陣來說, 就有些繁複了。

其實, 若從向量與幾何的角度, 利用向量的內積與外積來求反矩陣, 在解釋三階方陣的反矩陣求法時, 或許會更簡潔也更有數學的興味喔, 以下我們來說明!

預備知識:

1. 二矩陣的乘積可視爲二矩陣對應向量的內積, 如 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times p}$, 則 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=[c_{ij}]_{m\times p}$, 其中矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列向量爲 $\vec{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$ 矩陣 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行向量爲 $\vec{b}_j=\begin{bmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}$, 其中 $c_{ij}=\vec{a}_i\cdot\vec{b}_j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$。
2. 設 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 爲空間中兩個不平行的非零向量, 則 $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$ 且 $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$。

3. 設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 則

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (a_1,a_2,a_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\end{aligned}$$

根據行列式的性質, 得 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$; $\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

且 $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3$。

4. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$(承 (3))。

問題一: 給定一個二階方陣 $\boldsymbol{A}$, 是否可找到一反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$?

給二階方陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 有乘法反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 我們可用向量內積觀點來找出 $\boldsymbol{A}^{-1}$; 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可知 $\boldsymbol{A}$ 的第一列與 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第二行對應之向量內積爲 0, $\boldsymbol{A}$ 的第二列與 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第一行對應之向量內積爲 0。

教學設計:

步驟 (I):

將二階方陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 第一、二列元素分別視爲向量 $\vec{u}$、$\vec{v}$, 其中 $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=$

(c,d), 現在目標是找到 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=[\vec{x} \quad \vec{y}]$, 其中 $\vec{x}=\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}$ ⇒ 現在想滿足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$, 也就是 $\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix}[\vec{x} \quad \vec{y}]=\begin{bmatrix} \vec{u}\cdot\vec{x} & \vec{u}\cdot\vec{y} \\ \vec{v}\cdot\vec{x} & \vec{v}\cdot\vec{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 爲已知向量, $\vec{x}$、$\vec{y}$ 爲所求向量。可得 $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{x}=1 \\ \vec{u}\cdot\vec{y}=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{x}=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{y}=1 \end{cases}$, 直觀想法是湊湊看, 但內積值爲 0 使我們聯想到找垂直向量, 所以從這個方向著手。

步驟 (II):

因爲 $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$, 又 $\vec{u}\cdot\vec{y}=0$ 且 $\vec{v}\cdot\vec{x}=0$, 因此 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 有四個選擇, 分別爲

$$\text{(i)} \begin{cases} \vec{x}=\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \\ \vec{y}=\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} d & b \\ -c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & bc-ad \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} \vec{x}=\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix} \\ \vec{y}=\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)} \begin{cases} \vec{x}=\begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix} \\ \vec{y}=\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & -ad+bc \end{bmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{cases} \vec{x}=\begin{bmatrix} -d \\ c \end{bmatrix} \\ \vec{y}=\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -d & -b \\ c & a \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -ad+bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

由以上四種結果來看, 現在雖無法滿足 $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{x}=1 \\ \vec{v}\cdot\vec{y}=1 \end{cases}$, 但要使得 $\vec{u}\cdot\vec{x}=\vec{v}\cdot\vec{y}$, 所以考慮 (ii)

或 (iii), 再進一步觀察, 發現 (ii) 中 $ad-bc=\det(\boldsymbol{A})$, 不妨取 (ii) 來參考, 其實取 (iii) 亦可。

步驟 (III):

因爲 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \det(\boldsymbol{A}) & 0 \\ 0 & \det(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix}=\det(\boldsymbol{A})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

至此可知: 當 $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$ 時, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 才存在, 且由上式得 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。

在此, 我們也可得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$ $=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix} \det(\boldsymbol{A}) & 0 \\ 0 & \det(\boldsymbol{A}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 同時滿足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$。

接下來我們將求二階反方陣的這種方法延伸至三階反方陣的求法。

問題二: 給定一個三階方陣 $\boldsymbol{A}$, 是否可找到一反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$?

假設給定了 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 有乘法反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 則滿足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 可知 $\boldsymbol{A}$ 的第二列、第三列與 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第一行對應之向量內積同時爲0, $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第三列與 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第二行對應之向量內積同時爲 0, $\boldsymbol{A}$ 的第一列、第二列與 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的的第三行對應之向量內積同時爲 0。

教學設計:

步驟 (I):

將 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ 第一、二、三列元素分別視爲向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$, 即 $\vec{a}=(a_{11},a_{12},a_{13})$、$\vec{b}=(a_{21},a_{22},a_{23})$、$\vec{c}=(a_{31},a_{32},a_{33})\Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}$, 將所欲求的反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 記爲 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}=[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}]$, 其中 $\vec{x}=\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix} b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{pmatrix}$, $\vec{z}=\begin{pmatrix} b_{13}\\ b_{23}\\ b_{33}\end{pmatrix}$
現在想滿足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$, 也就是

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 爲已知向量, $\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{z}$ 爲所求向量。

步驟 (II):

由矩陣乘法性質可得 (1) 式中,

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}[\vec{x}] = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \text{也就是}\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{x}=1\\ \vec{b}\cdot\vec{x}=0\\ \vec{c}\cdot\vec{x}=0\end{cases} \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}[\vec{y}] = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \text{也就是}\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{y}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{y}=1\\ \vec{c}\cdot\vec{y}=0\end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{bmatrix}[\vec{z}] = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \text{也就是}\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{z}=0\\ \vec{b}\cdot\vec{z}=0\\ \vec{c}\cdot\vec{z}=1\end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

因此可由 (i) 得知向量 $\vec{x}$ 需同時與向量 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 垂直, 由預備知識中外積運算性質: $(\vec{b}\times\vec{c})\perp\vec{b}$, $(\vec{b}\times\vec{c})\perp\vec{c}$ 及二階反方陣求法的精神, 我們不妨暫取 $\vec{x}=\vec{b}\times\vec{c}$, 但這個 $\vec{x}$ 不一定滿足 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=1$, 因此目前可以暫時得到 $\vec{x}=\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{y}=\vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{z}=\vec{a}\times\vec{b}$。

步驟 (III):

現在我們有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{bmatrix}[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}] &= \begin{bmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{bmatrix}[\vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}\quad \vec{a}\times\vec{b}]\\ &= \begin{bmatrix}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) & 0 & 0\\ 0 & \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) & 0\\ 0 & 0 & \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\end{bmatrix}\end{aligned}$$

但因爲 $\det(\boldsymbol{A}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ (參考預備知識 3), 所以

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) & 0 & 0\\ 0 & \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) & 0\\ 0 & 0 & \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\det(\boldsymbol{A}) & 0 & 0\\ 0 & \det(\boldsymbol{A}) & 0\\ 0 & 0 & \det(\boldsymbol{A})\end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此我們現在有

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{bmatrix}[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}] = \begin{bmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{bmatrix}[\vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}\quad \vec{a}\times\vec{b}] = \det(\boldsymbol{A})\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

當 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 時, 等式兩邊同時除以 $\det(\boldsymbol{A})$

$$\begin{bmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}[\vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}\quad \vec{a}\times\vec{b}] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

結論: 當 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ 時, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 才存在, 且由上式可得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}[\vec{b}\times\vec{c}\quad \vec{c}\times\vec{a}\quad \vec{a}\times\vec{b}] = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{32} & a_{33}\\ a_{12} & a_{13}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{23} & a_{21}\\ a_{33} & a_{31}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{33} & a_{31}\\ a_{13} & a_{11}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}\\ a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{31} & a_{32}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix},$$

而且

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A &= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \frac{\det(A)}{\det(A)}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

同時滿足 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$。

結語:

1. 高中現行課程在三維空間中介紹向量外積, 所以我們利用向量的內積與外積推導反矩陣只討論到三階方陣, 四階以上的反矩陣求法還是回歸矩陣列運算。
2. 95課綱中高三選修 I 第二章矩陣2-4小節及99課綱中第四冊第一章空間向量 1−4 小節中介紹三階行列式與向量外積的概念, 但若由此向量內積與外積觀點來對學生介紹反方陣求法, 可以另外增加學生對三階行列式值的操作經驗, 靈活運用向量內積與外積, 老師們不妨試試除了克拉瑪法則之外的此種方法。

參考文獻

1. 高中數學課程95課綱及99課綱。
2. 全華高中數學課本選修I。

—本文作者李瑞為台北市建國中學數學科退休教師; 鄭金樹為台北市中山女高數學科退休教師; 洪瑞英、吳汀菱任教台北市中山女高—