數學傳播 36卷2期, pp. 52-63

Fibonacci Q-Matrix 在遞迴數列上的延伸和其應用

林鈺傑

一、前言

Fibonacci 在 1202 年提出一個問題, 現在有一公一母的小兎子, 一個月之後這對小兎子長大成一對大兎子。再過了一個月, 大兎子又生下了一公一母的小兎子, 所以有一對大兎子和一對小兎子共2對兎子。在之後的每個月, 所有小兎子都會長成大兎子, 而每對大兎子都會生下一對小兎子。請問在 n 個月之後, 總共有幾對兎子呢? 我們利用下面的表格來觀察一下

	第0個月	第1個月	第2個月	第3個月	第4個月
大兎子	0	1	1	2	3
小兎子	1	0	1	1	2
總和	1	1	2	3	5

會發現首項爲1, 次項也爲1, 之後每一項都是前兩項相加的數列。而這就是 Fibonacci 數列 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}=\{1,1,2,3,\ldots\}$ 也是上面這個問題的答案。換成數學的寫法可以寫成 $F_0=1$、$F_1=1$ 而當 $n\geq 2$ 時 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 這種遞迴規則的數列。這是一個不論在數論或組合上都很有名的數列。因爲 Fibonacci 數列有很多有趣且很特殊的性質, 使得 Fibonacci 從 1202 年寫下它以後, 幾百年來一直到現在還持續的有人在研究它。

而 Fibonacci Q 矩陣指的是 $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ 的這個矩陣, 1960 年時 Charles H. King 在他的碩士論文中研究這個矩陣 (Koshy [10]), 而在 Gould 對 Fibonacci Q 矩陣的歷史探討中也提出是否這矩陣能被延伸到三維的矩陣呢? 這矩陣爲什麼會被稱爲 Fibonacci Q 矩陣呢?

這是因爲這個矩陣和 Fibonacci 數列有一個如下的關係 (Gould [5])。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}$$

矩陣有很多的性質可以利用, 所以如果數列和矩陣中間的關係找出來的話, 就能夠利用矩陣性質得到很多有趣的性質。如 $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ 等 (Huang [9])。

現在我們就利用 Q 矩陣這個放大鏡來檢視看看 Fibonacci 有什麼有趣的地方, 再把這放大鏡移到其他類似於 Fibonacci 的二階數列上看看有什麼結果。接著再更進一步的來看看像 $h_0 = a$, $h_1 = b$ 且當 $n \geq 2$ 時 $h_n = ch_{n-1} + dh_{n-2}$, 其中 a, b, c, d 爲實數的這種一般的二階遞迴式是否也有一個類似於 Fibonacci Q 矩陣和 Fibonacci 數列的矩陣恆等式呢?

而在知道這些用 Q 矩陣得出的結果後, 我們是不是可以拿這些東西來運用呢? 很巧的, 我們發現這些性質可以應用在處理有關 log-convex 以及 log-concave 的問題上。

二、類似 Fibonacci 數列的二階遞迴數列

什麼樣的遞迴數列我們說它是類似 Fibonacci 數列的呢? 在觀察 Fibonacci 時會發現, 假設說數列可以一直往前倒著推回去的話, 我們將 Fibonacci 往回倒推一項到第 -1 項讓其也符合遞迴式時, 也就是說 $F_{-1} + F_0 = F_1$ 時, 會得到 $F_{-1} = 0$。

而現在我們就規定說如果第 -1 項爲 0 的數列就是類似 Fibonacci 數列的遞迴數列。那麼對以下這種型態的二階遞迴數列是否有類似 Fibonacci Q 矩陣的矩陣 Q 呢?

$$g_n = \begin{cases} 0 & n = -1 \\ a & n = 0 \\ cg_{n-1} + dg_{n-2} & n \geq 1 \end{cases}$$

先做個猜測, 如果 $Q = \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是 $\{g_n\}$ 的 Q 矩陣, 則當 $\{g_n\}$ 就是 Fibonacci 數列的情況下, Q 和 Fibonacci Q 矩陣是相同。接著再觀察一下 Q 的 n 次方的情形。

$$Q^n \begin{bmatrix} g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} g_2 \\ g_1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} g_{n+1} \\ g_n \end{bmatrix}$$

但是由原來的二階遞迴數列的定義方式我們可以知道

$$\begin{bmatrix} g_{n+1} \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cg_n + dg_{n-1} \\ cg_{n-1} + dg_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ac \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_0 \end{bmatrix}$$

比較兩個等式的相似處, 猜測下面這個式子是否會永遠成立呢?

$$Q^n=\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} g_1 \\ g_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix}, \qquad \forall\ n\ge 1。$$

如果能寫出證明的話, 就能證實我們的猜測了。而我們現在就試著把這猜測的證明寫下來。

定理 2-1:

令 $g_n=\begin{cases} 0 & n=-1 \\ a & n=0 \\ cg_{n-1}+dg_{n-2} & n\ge 1 \end{cases}$, 而 $Q=\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

則 $Q^n=\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix}, \forall\ n\ge 1$。

證明: 利用數學規納法來證明之

(1) 當 $n=1$ 時

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_1 & \frac{d}{a}g_0 \\ \frac{1}{a}g_0 & \frac{d}{a}g_{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}ac & \frac{d}{a}a \\ \frac{1}{a}a & \frac{d}{a}0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1$$

定理 2-1 成立。

(2) 假設定理 2-1 對 $n=k$ 時成立, 也就是說

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_k & \frac{d}{a}g_{k-1} \\ \frac{1}{a}g_{k-1} & \frac{d}{a}g_{k-2} \end{bmatrix}$$

那麼當 $n=k+1$ 的時候

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1}&=\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_k & \frac{d}{a}g_{k-1} \\ \frac{1}{a}g_{k-1} & \frac{d}{a}g_{k-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} \frac{cg_k+dg_{k-1}}{a} & \frac{d}{a}g_k \\ \frac{cg_{k-1}+dg_{k-2}}{a} & \frac{d}{a}g_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_{k+1} & \frac{d}{a}g_k \\ \frac{1}{a}g_k & \frac{d}{a}g_{k-1} \end{bmatrix}。\end{aligned}$$

(3) 由數學歸納法我們可以得出結論

$$Q^n=\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \forall\ n\ge 1。$$ □

接著由定理2-1中數列和 Q 矩陣的關係, 藉由一些矩陣的運算我們可以得出一些有關這些數列的特殊性質。

性質 2-2:

$$(-d)^n = \frac{d}{a^2}(g_n g_{n-2} - g_{n-1}^2)$$

證明: 由定理 2-1 再取其行列式

$$\det\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^n = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix}\right), \quad \forall\ n \geq 1。$$

性質 2-3:

$$(-d)^{n+2} = \frac{d}{a^2}(g_n^2 - c g_n g_{n-1} - d g_{n-1}^2)。$$

證明: 藉由性質 2-2, $(-d)^n = \frac{1}{a^2}(g_n g_{n-2} - g_{n-1}^2)$, 再將 $g_n = c g_{n-1} + d g_{n-2}$ 代入平移一項。

性質 2-4:

$$g_{n+m} = \frac{1}{a}g_n g_m + \frac{d}{a}g_{n-1}g_{m-1} = \frac{1}{a}g_{n+1}g_{m-1} + \frac{d}{a}g_n g_{m-2}$$

證明: 藉由定理 2-1 和矩陣相乘得出式子

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+m} &= \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{m} \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_{n+m} & \frac{d}{a}g_{n+m-1} \\ \frac{1}{a}g_{n+m-1} & \frac{d}{a}g_{n+m-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_m & \frac{d}{a}g_{m-1} \\ \frac{1}{a}g_{m-1} & \frac{d}{a}g_{m-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2}g_n g_m + \frac{d}{a^2}g_{n-1}g_{m-1} & \frac{d}{a^2}g_n g_{m-1} + \frac{d^2}{a^2}g_{n-1}g_{m-2} \\ \frac{1}{a^2}g_{n-1}g_m + \frac{d}{a^2}g_{n-2}g_{m-1} & \frac{d}{a^2}g_{n-1}g_{m-1} + \frac{d^2}{a^2}g_{n-2}g_{m-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

觀察矩陣的左上方及右上方可以得到性質 2-4。

性質 2-5:

$$(-d)^k \cdot g_{n-k} = \frac{d}{a}g_n g_{k-2} - \frac{d}{a}g_{n-1}g_{k-1}.$$

證明: 由定理 2-1 在 $n > k \geq 0$ 時, 利用矩陣乘法可以得到

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-k} &= \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-k} \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_{n-k} & \frac{d}{a}g_{n-k-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-k-1} & \frac{d}{a}g_{n-k-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_n & \frac{d}{a}g_{n-1} \\ \frac{1}{a}g_{n-1} & \frac{d}{a}g_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a}g_k & \frac{d}{a}g_{k-1} \\ \frac{1}{a}g_{k-1} & \frac{d}{a}g_{k-2} \end{bmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(-d)^k}\begin{bmatrix} \frac{d}{a^2}g_ng_{k-2}-\frac{d}{a^2}g_{n-1}g_{k-1} & -\frac{d}{a^2}g_ng_{k-1}+\frac{d}{a^2}g_{n-1}g_k \\ \frac{d}{a^2}g_{n-1}g_{k-2}-\frac{d}{a^2}g_{n-2}g_{k-1} & -\frac{d}{a^2}g_{n-1}g_{k-1}+\frac{d}{a^2}g_{n-2}g_k \end{bmatrix}$$

觀察等式左上角可以得到性質2-5。

推論2-6: 現在我們回頭來看 Fibonacci 數列的一些性質, 將以上這些性質代入 Fibonacci 數列可以得到以下結果:

$$\begin{aligned} (-1)^n &= (F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2) \\ (-1)^n &= (F_n^2-F_nF_{n-1}-F_{n-1}^2) \\ F_{n+m} &= F_nF_m+F_{n-1}F_{m-1}=F_{n+1}F_{m-1}+F_nF_{m-2} \\ (-1)^k\cdot F_{n-k} &= F_nF_{k-2}-F_{n-1}F_{k-1} \end{aligned}$$

又因爲 Fibonacci Q 矩陣相較於其他的矩陣, 有更好的一些性質, 也就是 $Q^2=Q+I$ 及 $(Q-I)\cdot Q=I$, 所以能夠得到更好的一些結果:

性質2-7:

$$F_{2n+p}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot F_{i+p}.$$

證明:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{2n+p} & F_{2n+p-1} \\ F_{2n+p-1} & F_{2n+p-2} \end{bmatrix} &= Q^{2n+p}=Q^pQ^{2n}=Q^p(Q^2)^n \\ &= Q^p(Q+I)^n=Q^p\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot Q^i \\ &= \begin{bmatrix} F_p & F_{p-1} \\ F_{p-1} & F_{p-2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_i & \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{i-1} \\ \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{i-1} & \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}F_{i-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

再去查看矩陣的左上角就可以得到

性質2-8:

$$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$$

證明:

$$(I+Q+Q^2+\cdots+Q^n)\cdot(Q-I)=Q^{n+1}-1$$

$$\Rightarrow I + Q + Q^2 + \cdots + Q^n = (Q^{n+1} - I) \cdot (Q - I)^{-1}$$
$$\Rightarrow I + Q + Q^2 + \cdots + Q^n = Q^{n+2} - Q$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} F_i & \sum_{i=0}^{n} F_{i-1} \\ \sum_{i=0}^{n} F_{i-1} & \sum_{i=0}^{n} F_{i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} - F_1 & F_{n+1} - F_0 \\ F_{n+1} - F_0 & F_n - F_{-1} \end{bmatrix}$$

三、一般二階遞迴數列

在知道了特殊情況下的二階遞迴數列與 Q 矩陣的關係之後, 我們會想要知道是不是所有的二階遞迴數列都有類似關係呢? 一般的二階遞迴數列定義如下

$$h_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ ch_{n-1} + dh_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

首先, 想先看看是不是除了類似 Fibonacci 數列之外, 還有其他種類數列和 Q 矩陣有關。由 Hoggatt & Ruggles [6], 我們可以知道 Lucas 數列和 Fibonacci-Q 矩陣有關係:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

而 Lucas 數列 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ 就是 $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ 的情形。

如果我們可以知道一般遞迴數列和之前討論的特殊數列的關係。或許就能夠找出類似 Lucas 數列與 Q 矩陣的關係式。我們已經知道 Fibonacci-Q 矩陣和 Fibonacci 數列有關, 再由以下運算發現 Lucas 數列和 Fibonacci 數列之間的關係。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_n + 2F_{n-1} & F_{n-1} + 2F_{n-2} \\ 2F_n - F_{n-1} & 2F_{n-1} - F_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$$

所以現在要試著找出一般二階遞迴數列 $\{h_n\}_{n\geq 0}$ 和之前所討論的特殊遞迴數列 $\{g_n\}_{\geq -1}$ 的關係式, 接著再結合定理2-1就可以得到一般遞迴數列和 Q 矩陣的關係。

先比較之前的遞迴數列和一般的二階遞迴數列來猜測結果, 而爲了要讓這兩個可以比較, 我們拿有相同遞迴關係及相同首項的兩個數列來觀察。

$$g_n=\begin{cases} a & n=0\\ ac & n=1\\ cg_{n-1}+dg_{n-2} & n\ge 2\end{cases}\qquad h_n=\begin{cases} a & n=0\\ b & n=1\\ ch_{n-1}+dh_{n-2} & n\ge 2\end{cases}$$

這兩個數列都擁有二階遞迴關係, 如果數列 g_n 中的連續兩項和 h_n 中的其中一項有線性關係, 那麼我們就可以利用遞迴關係去確認 g_n 及 h_n 其他項也會有此種線性關係。

我們可做些猜測, 如果 $h_n=sg_n+tg_{n-1}$

當 $n=0$ 的時候 $h_0=sg_0+tg_{-1}\ \Leftrightarrow\ a=sa+t0\ \Leftrightarrow\ s=1$

當 $n=1$ 的時候 $h_1=sg_1+tg_0\ \Leftrightarrow\ b=sac+ta=ac+ta\ \Leftrightarrow\ t=\frac{b-ac}{a}$

由此, 我們可以猜出之前的特殊遞迴數列和一般遞迴數列的關係式。

定理3-1: 令

$$g_n=\begin{cases} 0 & n=-1\\ a & n=0\\ cg_{n-1}+dg_{n-2} & n\ge 1\end{cases}\qquad h_n=\begin{cases} a & n=0\\ b & n=1\\ ch_{n-1}+dh_{n-2} & n\ge 2\end{cases}$$

則 $\begin{bmatrix}\frac{b}{a} & d\\ 1 & \frac{b-ac}{a}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_n & g_{n-1}\\ g_{n-1} & g_{n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_{n+1} & h_n\\ h_n & h_{n-1}\end{bmatrix}$。

證明: 先利用數學規歸納法證明矩陣下半部的式子 $h_n=g_n+\frac{b-ac}{a}g_{n-1}$

(1) 當 $n=0$, $h_0=a=a+\frac{b-ac}{a}0=g_0+\frac{b-ac}{a}g_{-1}$

當 $n=1$, $h_1=b=ac+\frac{b-ac}{a}a=g_1+\frac{b-ac}{a}g_0$

(2) 假設 $n\le k-1$ 定理 3-1 都是對的, 也就是說 $h_n=g_n+\frac{b-ac}{a}g_{n-1}$

當 $n=k$ 的時候

$$\begin{aligned} h_k=ch_{k-1}+dh_{k-2}&=c\Big(g_{k-1}+\frac{b-ac}{a}g_{k-2}\Big)+d\Big(g_{k-2}+\frac{b-ac}{a}g_{k-3}\Big)\\ &=(cg_{k-1}+dg_{k-2})+\frac{b-ac}{a}(cg_{k-2}+dg_{k-3})\\ &=g_k+\frac{b-ac}{a}g_{k-1}\end{aligned}$$

(3) 由數學歸納法可以知道 $h_n=g_n+\frac{b-ac}{a}g_{n-1}$

接著要證明上半部的式子, 在已經知道 $h_n = g_n + \frac{b-ac}{a} g_{n-1}$ 的情形下。

$$h_n = g_n + \frac{b-ac}{a} g_{n-1} = (cg_{n-1} + dg_{n-2}) + \frac{b-ac}{a} g_{n-1} = \left(\frac{b}{a}\right) g_{n-1} + dg_{n-2}$$

推導出矩陣上半部的式子 $h_n = \left(\frac{b}{a}\right) g_{n-1} + dg_{n-2}$

由這兩個關係式, 我們可以寫出一個矩陣的式子

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{a} & d \\ 1 & \frac{b-ac}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n & g_{n-1} \\ g_{n-1} & g_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{n+1} & h_n \\ h_n & h_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \square$$

在找出一般遞迴數列和特殊遞迴數列的關係後, 我們可以把定理3-1的結果和定理2-1的結果結合, 得到下面這個定理。

定理 3-2:

$$h_n = \begin{cases} a & n = 0 \\ b & n = 1 \\ ch_{n-1} + dh_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} b & ad \\ a & b-ac \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} h_{n+1} & dh_n \\ h_n & dh_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad n \geq 1.$$

證明:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{n+1} & dh_n \\ h_n & dh_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_{n+1} & h_n \\ h_n & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & d \\ 1 & \frac{b-ac}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n & g_{n-1} \\ g_{n-1} & g_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & ad \\ a & b-ac \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} g_n & \frac{d}{a} g_{n-1} \\ \frac{1}{a} g_{n-1} & \frac{d}{a} g_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & ad \\ a & b-ac \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n. \end{aligned}$$

$\square$

同樣的, 利用定理3-2和矩陣運算, 我們可以發現這些一般二階遞迴數列的一些性質。

性質 3-3:

$$(h_1^2 - h_2 h_0)(-d)^n = d(h_{n+1} h_{n-1} - h_n^2).$$

證明: 由定理3-2和矩陣的行列式可以得到

$$\det\left(\begin{bmatrix} b & ad \\ a & b-ac \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \right) = \det\left(\begin{bmatrix} h_{n+1} & dh_n \\ h_n & dh_{n-1} \end{bmatrix}^n \right), \qquad n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (h_1^2 - h_2h_0)(-d)^n = d(h_{n+1}h_{n-1} - h_n^2). \qquad \square$$

四、在判斷 log-convex 及 log-concave 上的應用

log-concave 是 logarithmically concave 的縮寫, 在 1989 年 Stanley 的文章中 (Stanley [13]) 說明了許多由代數、組合以及幾何中與 log-concave 及 unimodal 數列的一些事物。像是利用直接計算來確認巴斯卡三角形的數列 $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$, 是 log-concave、若 $P(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_jx^j$ 是沒有根的多項式, 則 $\{a_j\}_{j\geq 0}$ 是 log-concave $\cdots$ 等結果。

那麼什麼是 log-concave 呢? 一般將 log-convex 和 log-concave 的定義如下

一個數列 $\{h_n\}_{n\in N\cup 0}$ 被稱爲 log-concave 如果 $h_{k-1}h_{k+1}\leq h_k^2$, $k\geq 1$。

一個數列 $\{h_n\}_{n\in N\cup 0}$ 被稱爲 log-convex 如果 $h_{k-1}h_{k+1}\geq h_k^2$, $k\geq 1$。

而現在我們將藉由性質3-3, 我們能夠利用不同於其他證明的方法推導出在有關 log-convex 及 log-concave 的結果。

推論 4-1: 令

$$h_n=\begin{cases} a & n=0\\ b & n=1\\ ch_{n-1}+dh_{n-2} & n\geq 2\end{cases}$$

如 $d<0$ 且 $h_0h_2\geq h_1^2$, 則數列 $\{h_n\}_{n\in N\cup 0}$ 爲 log-convex, 也就是說 $h_{k-1}h_{k+1}\geq h_k^2$, $k\geq 1$。

如 $d<0$ 且 $h_0h_2\leq h_1^2$, 則數列 $\{h_n\}_{n\in N\cup 0}$ 爲 log-concave, 也就是說 $h_{k-1}h_{k+1}\leq h_k^2$, $k\geq 1$。

證明: 由性質3-3 $(h_1^2-h_2h_0)(-d)^n=d(h_{n+1}h_{n-1}-h_n^2)$

因爲 $h_1^2-h_0h_2\leq 0$, $d<0$, 所以 $h_{n+1}h_{n-1}-h_n^2\geq 0\Rightarrow h_{n+1}h_{n-1}\geq h_n^2$。

因爲 $h_1^2-h_0h_2\geq 0$, $d<0$, 所以 $h_{n+1}h_{n-1}-h_n^2\leq 0\Rightarrow h_{n+1}h_{n-1}\leq h_n^2$。

同樣的我們可得到。

推論 4-2:

$$h_n=\begin{cases} a & n=0\\ b & n=1\\ ch_{n-1}+dh_{n-2} & n\geq 2\end{cases}$$

假如 $d>0$ 而且 $h_0h_2\geq h_1^2$, 那麼 $h_{2k-2}h_{2k}\geq h_{2k-1}^2$, $k\geq 1$ 而 $h_{2k-1}h_{2k+1}\leq h_{2k}^2$, $k\geq 1$。

假如 $d>0$ 而且 $h_0h_2\leq h_1^2$, 那麼 $h_{2k-2}h_{2k}\leq h_{2k-1}^2$, $k\geq 1$ 而 $h_{2k-1}h_{2k+1}\geq h_{2k}^2$, $k\geq 1$。

證明: 如同推論 4-1。

推論 4-3: 而在 Lily [12] 和 Doslic & Veljan [4] 提出了一些有關特殊數列的一些性質。

$$F_{2k-2}F_{2k} \geq F_{2k-1}^2,\ k \geq 1, \quad L_{2k-2}L_{2k} \geq L_{2k-1}^2,\ k \geq 1, \quad P_{2k-2}P_{2k} \geq P_{2k-1}^2,\ k \geq 1$$

$$F_{2k-2}F_{2k+1} \leq F_{2k}^2,\ k \geq 1, \quad L_{2k-1}L_{2k+1} \leq L_{2k}^2,\ k \geq 1, \quad P_{2k-1}P_{2k+1} \leq P_{2k}^2,\ k \geq 1$$

在這裡我們利用不同與前兩篇的方法, 我們可以計算前三項

Fibonacci 數列 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $2 = F_0F_2 \geq F_1^2 = 1$。

Lucas 數列 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $6 = L_0L_2 \geq L_1^2 = 1$。

Pell 數列 $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, $5 = P_0P_2 \geq P_1^2 = 4$。

再由推論 4-2 可以得到和 Lily [12] 和 Doslic & Veljan [4] 相同的結果。

除了性質 3-3 以外, 將結果稍微調整, 可以得到下面這個性質。

推論 4-4:

$$(h_1^2 - h_2h_0)(-d)^n = (h_{n+1}^2 - ch_{n+1}h_n - dh_n^2).$$

證明: 由性質 3-3 $(h_1^2 - h_2h_0)(-d)^n = d(h_{n+1}h_{n-1} - h_n^2)$ 將 $h_{n+1} = ch_n + dh_{n-1}$ 代入, 再把 n 換成 $n+1$ 可以得到

$$\begin{aligned} & (h_1^2 - h_2h_0)(-d)^{n+1} = d(dh_n^2 + ch_{n+1}h_n - h_{n+1}^2) \\ \Leftrightarrow \quad & (h_1^2 - h_2h_0)(-d)^n = (h_{n+1}^2 - ch_{n+1}h_n - dh_n^2) \end{aligned}$$

而這和 Astin [1] 的結果是相同的

五、致謝

這篇文章是在參加中央研究院數學研究所的暑期研習生計畫時完成, 特別感謝薛昭雄老師的指導以及中央研究院數學研究所給的機會。同時也感謝審查者用心的建議, 使得這篇文章更完整。

六、附錄

以下是一些著名的數列符合之前所說的情形:

Fibonacci 數列	$a=1,\ c=1,\ d=1$	Hoggatt & Ruggles [6]
Fibonacci 多項式	$a=1,\ c=x,\ d=1$	Civciv & Türkmen [3]
Lucas 數列	$a=2,\ b=1,\ c=1,\ d=1$	Hoggatt & Ruggles [6]
Lucas 多項式	$a=2,\ b=x,\ c=x,\ d=1$	Horadam [7]
Pell 數列	$a=1,\ c=2,\ d=1$	Horadam & Mahon [8]
Pell 多項式	$a=1,\ c=2x,\ d=1$	Hordam [8]
Pell-Lucas 多項式	$a=2,\ b=2x,\ c=2x,\ d=1$	Horadam & Mahon [8]
第一種 Chebyshev 多項式	$a=1,\ b=x,\ c=2x,\ d=-1$	Horadam [7]
第二種 Chebyshev 多項式	$a=1,\ c=2x,\ d=-1$	Chen [2]
第一種 Dickson 多項式	$a=2,\ b=x,\ c=x,\ d=-a$	Lidl & Mullen & Turnwald [11]
第二種 Dickson 多項式	$a=1,\ c=x,\ d=-a$	Lidl & Mullen & Turnwald [11]
Jacobsthal 數列	$a=1,\ c=1,\ d=2$	Horadam [7]
Jacobsthal 多項式	$a=1,\ c=1,\ d=2x$	Hordam [7]
Jacobsthal-Lucas 多項式	$a=2,\ b=1,\ c=1,\ d=2x$	Horadam [7]
Fermat 多項式	$a=1,\ c=3x,\ d=-2$	Hordam [7]
Femat-Lucas 多項式	$a=2,\ b=3x,\ c=3x,\ d=-2$	Horadam [7]
Morgan-Voyce 多項式	$a=1,\ c=x+2,\ d=-1$	Swamy [14] [15]
Mersenne 數列	$a=1,\ c=3,\ d=-2$	Horadam [7]
Koshy多項式	$a=1,\ c=1,\ d=x$	Astin [1]

七、參考資料

1. Astin, Jack, *A Discriminant That Forms a Geometric Sequence*, The Mathematical Gazette (July2008), pp.286-287.
2. Chen, William Y. C., *The combinatorial power of the companion matrix*, Linear Algebra and its Applications (1996) 232: pp.261-278.
3. Civciv, Hacl and Türkmen, Ramazan, *On the* (s,t)*-Fibonacci and Fibonacci matrix sequences*, ARS Combinatoria 87(2008), pp.162-173.
4. Doslic, T. and Veljan, E., *Logarithmic behavior of some combinatorial sequences*, Discrete Mathematics 308(2008), pp.2182-2212.
5. Gould, H.W., *A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem*, Fibonacci Quarterly(1981), Volume 19, pp.250-257.
6. Hoggatt, V.E. Jr. and Ruggles, I. D., *A primer for the Fibonacci number—Part IV*,

Fibonacci Quarterly (1963) Volume 1, pp.65-71.

7. Horadam, A.F., *A synthesis of certain polynomial sequences*, Applications of Fibonacci Numbers(1968), Volume 6, pp.215-229.
8. Horadam, A.F. and Mahon, Bro. J. M., *Pell and Pell-Lucas polynomials*, Fibonacci Quarterly(1985), Volume 23, pp.7-20.
9. Huang, Danrun, *Fibonacci identities, matrices, and graphs*, Mathematics Teacher 98(February 2005), pp.400-403.
10. Koshy,Thomas, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Wiley-Interscience Publication, 2001.
11. Lidl, .R., Mullen, G. L.and Turnwald, G., *Dickson Polynomials*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 65, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
12. Liu, Lily L.and Wang, Yi, *On the log-convexity of combinatorial sequences*, Advances in Applied Mathematics 39(2007), pp.454-476.
13. Stanley, Richard P., *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. 576 (1989), 500-535.
14. Swamy, M.N.S., *Further properties of Morgan-Voyce polynomials*, Fibonacci Quarterly(1968) Volume 6, pp.167-175.
15. Swamy, M. N. S., *Properties of the polynomials defined by Morgan-Voyce*, Fibonacci Quarterly (1966), Volume 4, pp.75-81.

—本文作者於投稿時為國立台灣大學數學系四年級學生—