數學傳播 36卷1期, pp. 93-96

正三角形和正五邊形的兩個性質

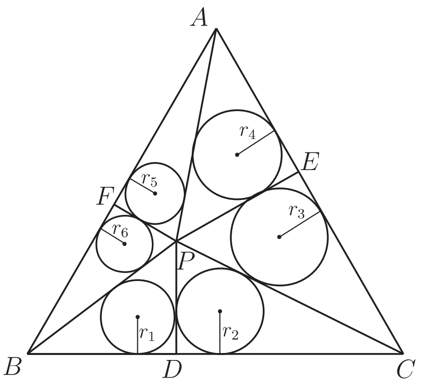
劉步松

一、正三角形的兩個性質

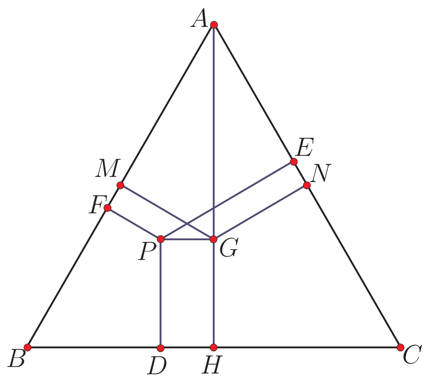
如圖一, 設 $\triangle ABC$ 爲正三角形, P 爲其內部任一點, 由 P 分別向三角形的三邊作垂線, 垂足分別是 D、E、F, 連 PA、PB、PC, 則 $\triangle ABC$ 被分成 6 個直角三角形, 設這些直角三角形的內切圓半徑依次爲 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6, 則有如下兩個結論:

(1) $AF+BD+CE=FB+DC+EA$;

(2) $r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$。



圖一



圖二

證: (1) 如圖二, 過 A 作 $AH\perp BC$, 垂足爲 H, 再過 P 作 $PG\perp AH$, 垂足爲 G, 由 G 點分別作 AB、AC 的垂線, 垂足分別是 M, N, 則

$$\begin{aligned}AF+BD+CE&=(AM+MF)+(BH-DH)+(CN+NE)\\&=(AM+BH+CN)+(MF-DH+NE)\qquad(1)\\FB+DC+EA&=(MB-MF)+(HC+DH)+(NA-NE)\\&=(MB+HC+NA)+(DH-MF-NE)\qquad(2)\end{aligned}$$

注意到 $AM=NA$, $BH=HC$, $CN=MB$, 則 (1) 式減去 (2) 式得:

$$AF+BD+CE-(FB+DC+EA)=2(MF+NE+DH)$$

從而要證明性質 (1) 成立, 只需證明 $2(MF+NE-DH)=0$, 即 $MF+NE=DH$ 即可。

由圖二不難看出, $\angle PGM=\angle GPE=30^\circ$, 則有

$$MF+NE=PG\sin 30^\circ+PG\sin 30^\circ=PG=DH$$

從而性質 (1) 成立。

(2) 設直角三角形的兩條直角邊為 a 和 b, 斜邊為 c, 內切圓半徑為 r, 則有 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, 下面我們直接引用這一性質而略去它的證明。

由圖一及上述性質可得:

$$r_1=\frac{BD+PD-PB}{2},\qquad r_3=\frac{CE+PE-PC}{2},\qquad r_5=\frac{AF+PF-PA}{2},$$
$$r_2=\frac{DC+PD-PC}{2},\qquad r_4=\frac{EA+PE-PA}{2},\qquad r_6=\frac{FB+PF-PB}{2}。$$

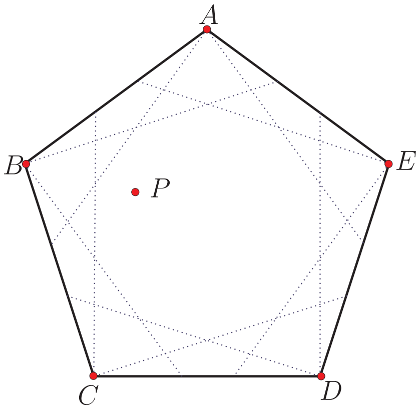
不難算出

$$(r_1+r_3+r_5)-(r_2+r_4+r_6)=\frac{1}{2}(BD+CE+AF-DC-EA-FB)$$

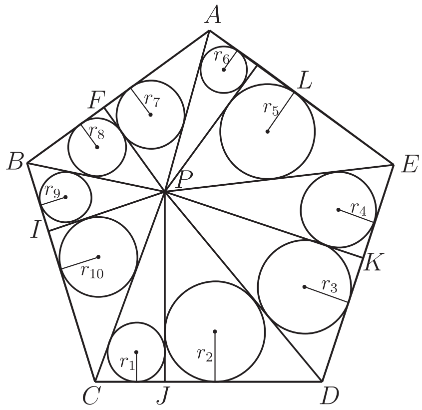
由於性質 (1) 成立, 從而上式括弧內為零, 即 $(r_1+r_3+r_5)-(r_2+r_4+r_6)=0$, 性質 (2) 也成立。

二、正五邊形的兩個性質

設 P 為正五邊形 $ABCDE$ 內一點, 為了使 P 點向各邊作垂線時都能得到垂足, 我們對 P 點的範圍加上一些限制。如圖三, 過正五邊形的每個頂點分別作其所在的兩邊的垂線, 則這 10 條垂線在正五邊形內部圍成一個正十邊形, 當 P 點在這個正十邊形內部時, 由 P 點向正五邊形各邊作垂線時都能得到垂足。



圖三

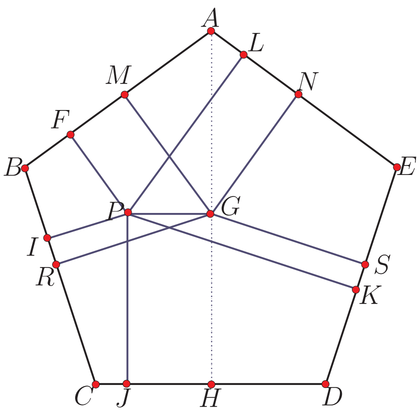


圖四

如圖四, 設正五邊形 $ABCDE$ 內部一點 P (P 點向各邊作垂線時都能得到垂足), 由 P 點向各邊作垂線, 設垂足分別爲 F、I、J、K、L, 連 PA、PB、PC、PD、PE, 則正五邊形被分成 10 個直角三角形, 設這些直角三角形的內切圓半徑依次爲 r_1、r_2、r_3、r_4、r_5、r_6、r_7、r_8、r_9、r_{10}, 則有如下兩個結論:

(1) $AF+BI+CJ+DK+EL=FB+IC+JD+KE+LA$;

(2) $r_1+r_3+r_5+r_7+r_9=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}$。



圖五

證: (1) 如圖五, 過 A 作 $AH\perp CD$, 垂足爲 H, 再過 P 作 $PG\perp AH$, 垂足爲 G, 由 G 點分

別作 AB、BC、DE、EA 的垂線, 垂足分別是 M, R、S、N, 則

$$\begin{aligned}&AF+BI+CJ+DK+EL\\&\quad=(AM+MF)+(BR-IR)+(CH-JH)+(DS-KS)+(EN-NL)\\&\quad=(AM+BR+CH+DS+EN)+(MF-IR-JH-KS+NL)\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&FB+IC+JD+KE+LA\\&\quad=(MB-MF)+(RC+IR)+(HD+JH)+(SE+KS)+(NA-NL)\\&\quad=(MB+RC+HD+SE+NA)+(IR+JH+KS-MF-NL)\end{aligned}\tag{4}$$

注意到 $AM=NA$、$BR=SE$、$CH=HD$、$DS=RC$、$EN=MB$, 由 (3) 式減去 (4) 式得:

$$(AF+BI+CJ+DK+EL)-(FB+IC+JD+KE+LA)=2(MF-IR-JH-KS+NL)$$

從而要證明性質 (1) 成立, 只需證明 $2(MF-IR-JH-KS+NL)=0$, 即證明 $MF-IR-JH-KS+NL=0$ 即可。

因爲正五邊形的內角爲 108°, 所以 $\angle RGH=180^\circ-108^\circ=72$○, 由此得 $\angle PGR=90^\circ-\angle RGH=90^\circ-72^\circ=18^\circ$, 同樣可以算出, $\angle GPK=18^\circ$, $\angle PGM=54^\circ$、$\angle GPL=54^\circ$。則有

$$\begin{aligned}MF-IR-JH-KS+NL&=PG\sin 54^\circ-PG\sin 18^\circ-PG-PG\sin 18^\circ+PG\sin 54^\circ\\&=PG(2\sin 54^\circ-1-2\sin 18^\circ)\end{aligned}$$

這樣我們就只需證明 $2\sin 54^\circ-1-2\sin 18^\circ=0$ 即可。由於 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, 利用三倍角公式得: $\sin 54^\circ=3\sin 18^\circ-4\sin^3 18^\circ=\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{4}-4\cdot\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\Big)^3=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$。這樣便有 $2\sin 54^\circ-1-2\sin 18^\circ=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}-1-2\cdot\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}=0$, 從而性質 (1) 成立。

(2) 利用和正三角形性質 (2) 同樣的證明方法, 可以得到:

$$\begin{aligned}&(r_1+r_3+r_5+r_7+r_9)-(r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10})\\&\quad=\frac{1}{2}[(AF+BI+CJ+DK+EL)-(FB+IC+JD+KE+LA)]\end{aligned}$$

由於性質 (1) 成立, 從而上式中括弧內爲零, 即

$$r_1+r_3+r_5+r_7+r_9=r_2+r_4+r_6+r_8+r_{10}$$

性質 (2) 也成立。

—本文作者任教江蘇省運河高等師範學校—