數學傳播 36卷1期, pp. 84-92

一組幾何不等式的類似

吳裕東

謹以此文獻給我的爺爺吳光如先生 (1928~2006)

摘要: 本文用初等數學的方法證明瞭 Zhivko Zhelev 最近用高等數學方法證明的一個幾何不等式和一個類似的不等式, 還發現了此種類型另外幾個不等式和反向的幾個不等式, 最後提出了一個問題。

關鍵詞: 三角形、Symmedian 點、Gergonne 點、Ceva 線、幾何不等式、歐拉不等式。

1. 引言

在本文中約定: a, b, c 分別爲 $\triangle ABC$ 的三邊長; s 爲半周長; $\triangle$ 爲三角形面積; R, r 分別爲 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑與內切圓半徑; m_a, m_b, m_c 分別爲三中線長; w_a, w_b, w_c 分別爲三角平分線長; h_a, h_b, h_c 分別爲三高線長; r_a, r_b, r_c 分別爲三旁切圓半徑長; k_a, k_b, k_c 分別爲過 Symmedian 點之 Ceva 線長; g_a, g_b, g_c 分別爲過 Gergonne 點之 Ceva 線長。另外我們通常使用循環求和符號“$\sum$”與循環求積符號“$\prod$”, 如:

$$\sum f(a) = f(a) + f(b) + f(c),$$
$$\sum f(b,c) = f(a,b) + f(b,c) + f(c,a),$$
$$\prod f(a) = f(a)f(b)f(c)$$

等等。

最近, Zhivko Zhelev 在文 [5] 證明了如下的一組幾何不等式:

$$ah_a + bh_b + ch_c \le \sqrt{bc}h_a + \sqrt{ca}h_b + \sqrt{ab}h_c, \tag{1}$$
$$am_a + bm_b + cm_c \le \sqrt{bc}m_a + \sqrt{ca}m_b + \sqrt{ab}m_c. \tag{2}$$

文 [5] 證明不等式 (2) 時用了多元函數求極值的高等數學方法。本文將給出不等式 (2) 的一個初等證明和一個類似:

$$aw_a + bw_b + cw_c \le \sqrt{bc}w_a + \sqrt{ca}w_b + \sqrt{ab}w_c. \tag{3}$$

2. 引理

爲了證明不等式 (2) 和 (3), 我們先給出一些引理。

引理 1. ([1, p.12; 2, p.52] 也可參見 [4, p.510]) 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$a+b+c=2s, \tag{4}$$

$$ab+bc+ca=s^2+4Rr+r^2, \tag{5}$$

$$abc=4Rrs. \tag{6}$$

引理 2. 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$a^2m_a^2+b^2m_b^2+c^2m_c^2=\frac{1}{2}s^4-(4R-5r)rs^2+\frac{1}{2}(4R+r)^2r^2, \tag{7}$$

$$bcm_a^2+cam_b^2+abm_c^2=s^4-6Rrs^2-(4R+r)^2r^2, \tag{8}$$

$$a^2w_a^2+b^2w_b^2+c^2w_c^2=\frac{16Rr^2s^2[(5R+6r)s^2-(8R^2+7Rr+2r^2)r]}{(s^2+2Rr+r^2)^2}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}bcw_a^2+caw_b^2+abw_c^2=&\frac{1}{(s^2+2Rr+r^2)^2}\cdot[s^8-4(R-r)rs^6\\&-2(24R^2-2Rr-3r^2)r^2s^4\\&+4(16R^2+5Rr+r^2)r^4s^2+(4R+r)^3r^5],\end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum bc(2a^2+bc)=s^4+2(4R+r)rs^2+(4R+r)^2r^2, \tag{11}$$

$$\sum\frac{4a^2+b^2+c^2}{b+c}=\frac{11s^4-2(20R+11r)rs^2-(4R+r)^2r^2}{s(s^2+2Rr+r^2)}, \tag{12}$$

$$\sum\frac{(b+c)(b-c)^2}{a^2}=\frac{-s^4+2(R+r)(4R-r)s^2-(4R+r)^2(2R+r)r}{2R^2s}, \tag{13}$$

$$\sum\frac{(s-b)(s-c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{2(R+r)r}{s^2+2Rr+r^2}, \tag{14}$$

$$\sum\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a(a+b)(a+c)}=\frac{r(s^2+4R^2+2Rr+r^2)}{2R(s^2+2Rr+r^2)}. \tag{15}$$

證明: 由中線長公式 $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ 等可得

$$a^2m_a^2+b^2m_b^2+c^2m_c^2=-\frac{1}{4}\Big(\sum a\Big)^4+\Big(\sum a\Big)^2\cdot\sum bc+\frac{1}{2}\Big(\sum bc\Big)^2-3\prod a\cdot\sum a; \tag{16}$$

$$bcm_a^2+cam_b^2+abm_c^2=\frac{1}{2}\Big(\sum a\Big)^2\cdot\sum bc-\Big(\sum bc\Big)^2-\frac{3}{4}\prod a\cdot\sum a; \tag{17}$$

由角平分線長公式 $w_a=\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$ 等可得

$$a^2w_a^2+b^2w_b^2+c^2w_c^2=\frac{\prod a\cdot\sum a}{\left(\sum a\cdot\sum bc-\prod a\right)^2}\Big[-\Big(\sum a\Big)^6+5\sum bc\cdot\Big(\sum a\Big)^4 -7\prod a\cdot\Big(\sum a\Big)^3-4\Big(\sum bc\Big)^2\cdot\Big(\sum a\Big)^2 +9\prod a\cdot\sum bc\cdot\sum a-6\Big(\prod a\Big)^2\Big]; \tag{18}$$

$$bcw_a^2+caw_b^2+abw_c^2=\frac{\sum a}{\left(\sum a\cdot\sum bc-\prod a\right)^2}\Big[-\Big(\prod a\Big)^2\Big(\sum a\Big)^3 -2\prod a\cdot\Big(\sum bc\Big)^2\cdot\Big(\sum a\Big)^2+\sum a\cdot\Big(\sum bc\Big)^4 +6\sum a\cdot\sum bc\cdot\Big(\prod a\Big)^2-2\prod a\Big(\sum bc\Big)^3-6\Big(\prod a\Big)^3\Big]; \tag{19}$$

$$\sum bc(2a^2+bc)=\Big(\sum bc\Big)^2; \tag{20}$$

$$\sum\frac{4a^2+b^2+c^2}{b+c}=\frac{2\Big[2\Big(\sum a\Big)^4-5\sum bc\cdot\Big(\sum a\Big)^2-\Big(\sum bc\Big)^2+6\prod a\cdot\sum a\Big]}{\sum a\cdot\sum bc-\prod a} \tag{21}$$

$$\sum\frac{(b+c)(b-c)^2}{a^2}=\frac{1}{\left(\prod a\right)^2}\cdot\Big[-2\prod a\cdot\Big(\sum a\Big)^4+\Big(\sum bc\Big)^2\cdot\Big(\sum a\Big)^3 +9\prod a\cdot\sum bc\cdot\Big(\sum a\Big)^2-4\Big(\sum bc\Big)^3\cdot\sum a -12\Big(\prod a\Big)^2\cdot\sum a+4\prod a\cdot\Big(\sum bc\Big)^2\Big]; \tag{22}$$

$$\sum\frac{(s-b)(s-c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{1}{4}\sum\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b)(a+c)} =\frac{-\left(\sum a\right)^3+4\sum bc\cdot\sum a-6\prod a}{\sum a\sum bc-\prod a}; \tag{23}$$

$$\sum\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a(a+b)(a+c)}=\frac{1}{4}\sum\frac{(b+c)(c+a-b)(a+b-c)}{a(a+b)(a+c)}$$

$$=\frac{-\sum bc\cdot\left(\sum a\right)^4+\prod a\cdot\left(\sum a\right)^3+4\sum bc\left(\sum a\right)^2-12\prod a\cdot\sum bc\cdot\sum a+12\left(\prod a\right)^2}{4\prod a\cdot\left(\sum bc\cdot\sum a-\prod a\right)}. \tag{24}$$

由恒等式(16)−(24) 和引理 1 即可得恒等式 (7)−(15)。

引理 3. ([4, pp.440, pp.564]) 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\frac{1}{2}\Big[4a^2+b^2+c^2-\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2}\Big]\le 4m_bm_c\le 2a^2+bc. \tag{25}$$

引理 4. 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$\frac{4s(s-b)(s-c)(b+c)}{(a+b)(a+c)}\le w_bw_c\le\frac{2as}{(a+b)(a+c)}\Big[\frac{abc}{b+c}+\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a}\Big]. \tag{26}$$

證明: 不等式 (26) 右邊的不等式的證明見 [4, pp.467]。

由角平分線長公式 $w_a=\dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$ 知不等式 (26) 左邊的不等式等價於

$$\begin{aligned}&\frac{4s(s-b)(s-c)(b+c)}{(a+b)(a+c)}\le\frac{4as\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{(a+b)(a+c)}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{4}(a+b+c)(b+c-a)(b-c)^2\ge 0.\end{aligned}$$

最後一式顯然成立, 所以不等式 (26) 左邊的不等式成立。 □

引理 5. ([3, pp.56]) 在 $\triangle ABC$ 中, 有

$$16Rr-5r^2\le s^2\le 4R^2+4Rr+3r^2. \tag{27}$$

3. 不等式 (2) 和 (3) 的證明

3.1. 不等式 (2) 的證明

證明: 不等式 (2) 等價於

$$\begin{aligned}&(am_a+bm_b+cm_c)^2\le\Big(\sqrt{bc}m_a+\sqrt{ca}m_b+\sqrt{ab}m_c\Big)^2\\ \Leftrightarrow\ &\sum a^2m_a^2+2\sum bcm_bm_c\le\sum bcm_a^2+2\sum a\sqrt{bc}m_bm_c.\end{aligned} \tag{28}$$

由引理 3 知

$$\sum a^2m_a^2+2\sum bcm_bm_c\le\sum a^2m_a^2+\frac{1}{2}\sum bc(2a^2+bc). \tag{29}$$

由引理 3 及調和平均 $\le$ 幾何平均知

$$\begin{aligned}\sum bcm_a^2+2\sum a\sqrt{bc}m_bm_c&\ge\sum bcm_a^2+2\sum\frac{2abcm_bm_c}{b+c}\\ &=\sum bcm_a^2+4\prod a\cdot\sum\frac{m_bm_c}{b+c}\end{aligned}$$

$$\geq \sum bcm_a^2+\frac{1}{2}\prod a\cdot\sum\Big[\frac{4a^2+b^2+c^2}{b+c}-\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2(b+c)}\Big]. \quad (30)$$

由不等式 (29) 和 (30) 知要證不等式 (28) 只要證

$$\sum a^2m_a^2+\frac{1}{2}\sum bc(2a^2+bc)\leq\sum bcm_a^2+\frac{1}{2}\prod a\cdot\sum\Big[\frac{4a^2+b^2+c^2}{b+c}-\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2(b+c)}\Big],$$

即證

$$\begin{aligned}&\sum a^2m_a^2+\frac{1}{2}\sum bc(2a^2+bc)\\ &\quad\leq\sum bcm_a^2+\frac{1}{2}\prod a\cdot\Big[\sum\frac{4a^2+b^2+c^2}{b+c}-\sum\frac{(b+c)(b-c)^2}{a^2}\Big]. \qquad (31)\end{aligned}$$

由引理 1 中恒等式 (6) 及引理 2 中恒等式 (7), (8), (11)$-$(13) 可知不等式 (31) 等價於

$$\begin{aligned}s^4+6r^2s^2+(4R+r)^2r^2\geq{}&\frac{2Rr[11s^4-2(20R+11r)rs^2-(4R+r)^2r^2]}{s^2+2Rr+r^2}+s^4-6Rrs^2\\ &-(4R+r)^2r^2+\frac{r}{R}\cdot[s^4-2(R+r)(4R-r)s^2+(4R+r)^2(2R+r)r]\\ \Leftrightarrow{}&(s^2-16Rr+5r^2)^3+[8R^2+32Rr+6r(R-2r)](s^2-16Rr+5r^2)^2\\ &+2r[R+r+(R-2r)][37R^2+82Rr+12r(R-2r)](s^2-16Rr+5r^2)\\ &+4r^2(R-2r)[72R^3+52R^2r+31Rr(R-2r)+8r^3]\geq 0. \qquad (32)\end{aligned}$$

由引理 5 及著名的歐拉不等式 [3, pp.53] $R\geq 2r$ 可知不等式 (32) 成立, 從而不等式 (31) 成立, 進而不等式 (28) 成立, 即不等式 (2) 得證。 □

3.2. 不等式 (3) 的證明

證明: 不等式 (3) 等價於

$$\begin{aligned}&(aw_a+bw_b+cw_c)^2\leq\Big(\sqrt{bc}w_a+\sqrt{ca}w_b+\sqrt{ab}w_c\Big)^2\\ \Leftrightarrow{}&\sum a^2w_a^2+2\sum bcw_bw_c\leq\sum bcw_a^2+2\sum a\sqrt{bc}w_bw_c. \qquad (33)\end{aligned}$$

由引理 4 知

$$\begin{aligned}&\sum a^2w_a^2+2\sum bcw_bw_c\\ &\quad\leq\sum a^2w_a^2+2\sum\frac{2abcs}{(a+b)(a+c)}\Big[\frac{abc}{b+c}+\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a}\Big]\\ &\quad=\sum a^2w_a^2+\frac{12s\Big(\prod a\Big)^2}{\sum a\cdot\sum bc-\prod a}+4s\prod a\cdot\sum\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a(a+b)(a+c)}. \qquad (34)\end{aligned}$$

由引理 4 及調和平均 $\le$ 幾何平均知

$$\begin{aligned}\sum bcw_a^2+2\sum a\sqrt{bc}w_bw_c &\ge \sum bcw_a^2+2\sum\frac{2abc}{b+c}w_bw_c\\ &=\sum bcw_a^2+4\prod a\cdot\sum\frac{w_bw_c}{b+c}\\ &\ge\sum bcw_a^2+4\prod a\cdot\sum\frac{4s(s-b)(s-c)}{(a+b)(a+c)}\\ &=\sum bcw_a^2+16s\prod a\cdot\sum\frac{(s-b)(s-c)}{(a+b)(a+c)}. \qquad (35)\end{aligned}$$

由不等式 (34) 和 (35) 知要證不等式 (33) 只要證

$$\begin{aligned}&\sum a^2w_a^2+\frac{12s\Big(\prod a\Big)^2}{\sum a\cdot\sum bc-\prod a}+4s\prod a\cdot\sum\frac{(b+c)(s-b)(s-c)}{a(a+b)(a+c)}\\ \le&\sum bcw_a^2+16s\prod a\cdot\sum\frac{(s-b)(s-c)}{(a+b)(a+c)}. \qquad (36)\end{aligned}$$

由引理 1 中恒等式及引理 2 中恒等式 (9), (10), (14), (15) 可知不等式 (36) 等價於

$$\begin{aligned}&\frac{16Rr^2s^2[(5R+6r)s^2-(8R^2+7Rr+2r^2)r]}{(s^2+2Rr+r^2)^2}+\frac{96R^2r^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}+\frac{8(s^2+4R^2+2Rr+r^2)r^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}\\ \le&\frac{s^8-4(R-r)rs^6-2(24R^2-2Rr-3r^2)r^2s^4+4(16R^2+5Rr+r^2)r^4s^2+(4R+r)^3r^5}{(s^2+2Rr+r^2)^2}\\ &+\frac{128R(R+r)r^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}\\ \Leftrightarrow&(s^2-16Rr+5r^2)^4+12r[4R+(R-2r)](s^2-16Rr+5r^2)^3\\ &+8r^2[84R^2+68R(R-2r)+25r^2](s^2-16Rr+5r^2)^2\\ &+16r^3[584(R-2r)^3+2585r(R-2r)^2+3720r^2(R-2r)+1728r^3](s^2-16Rr+5r^2)\\ &+32r^4(R-2r)[576(R-2r)^3+2870r(R-2r)^2+4739r^2(R-2r)+2592r^3]\ge 0. \qquad (37)\end{aligned}$$

由引理 5 及著名的歐拉不等式 [3, pp.53] $R\ge 2r$ 可知不等式 (37) 成立, 從而不等式 (36) 成立, 進而不等式 (33) 成立, 即不等式 (3) 得證。 $\square$

4. 進一步的思考

通過仔細研究, 我們還發現與不等式 (1)–(3) 類似的兩個不等式:

$$ak_a+bk_b+ck_c\le\sqrt{bc}k_a+\sqrt{ca}k_b+\sqrt{ab}k_c, \qquad (38)$$

$$ag_a + bg_b + cg_c \le \sqrt{bc}g_a + \sqrt{ca}g_b + \sqrt{ab}g_c. \tag{39}$$

仿文 [5], 由不等式 (3), (38), (39) 及幾何平均 $\le$ 算術平均, 我們立即可得如下幾個有趣的不等式:

$$(b+c-2a)w_a + (c+a-2b)w_b + (a+b-2c)w_c \ge 0, \tag{40}$$

$$(b+c-2a)k_a + (c+a-2b)k_b + (a+b-2c)k_c \ge 0, \tag{41}$$

$$(b+c-2a)g_a + (c+a-2b)g_b + (a+b-2c)g_c \ge 0. \tag{42}$$

但是卻有下面的不等式:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}, \tag{43}$$

$$ar_a + br_b + cr_c \ge \sqrt{bc}r_a + \sqrt{ca}r_b + \sqrt{ab}r_c. \tag{44}$$

礙於篇幅本文不再給出不等式 (38) 和 (39) 的證明, 這兩個不等式的證明將另文發表。下面我們給出不等式 (43) 和 (44) 的證明。

不等式 (43) **的證明**: 由 $(\sqrt{ab} - \sqrt{bc})^2 + (\sqrt{bc} - \sqrt{ca})^2 + (\sqrt{ca} - \sqrt{ab})^2 \ge 0$ 可得

$$ab + bc + ca \ge a\sqrt{bc} + b\sqrt{bc} + c\sqrt{ca}, \tag{45}$$

又由 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$ 可得

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca. \tag{46}$$

由不等式 (45) 和 (46) 即可得不等式 (43)。 $\square$

不等式 (44) **的證明**: 由旁切圓半徑公式 $r_a = \dfrac{\triangle}{s-a}$ 等可知不等式 (44) 等價於

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \ge \frac{\sqrt{bc}}{s-a} + \frac{\sqrt{ca}}{s-b} + \frac{\sqrt{ab}}{s-c}. \tag{47}$$

由幾何平均 $\le$ 算術平均知

$$\frac{\sqrt{bc}}{s-a} + \frac{\sqrt{ca}}{s-b} + \frac{\sqrt{ab}}{s-c} \le \frac{b+c}{2(s-a)} + \frac{c+a}{2(s-b)} + \frac{a+b}{2(s-c)}. \tag{48}$$

由不等式 (48) 知要證不等式 (47) 只要證

$$\frac{b+c}{2(s-a)} + \frac{c+a}{2(s-b)} + \frac{a+b}{2(s-c)} \le \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c}. \tag{49}$$

令 $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$ 則 $x,y,z>0$, $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ 從而不等式 (49) 等價於

$$\begin{aligned}
&\frac{2x+y+z}{2x}+\frac{x+2y+z}{2y}+\frac{x+y+2z}{2z}\le\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\\
&\quad\Leftrightarrow\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}+3\le\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\\
&\quad\Leftrightarrow 3\le\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\\
&\quad\Leftrightarrow 6\le\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)+\Big(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\Big)+\Big(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\Big). \qquad (50)
\end{aligned}$$

由幾何平均 $\le$ 算術平均得

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2,\qquad \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2,\qquad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2.$$

由上述三個不等式即得不等式 (50), 從而不等式 (49) 成立, 進而不等式 (47) 成立, 即不等式 (44) 得證。 □

因此現在一個自然的問題是:

問題 1. 在 $\triangle ABC$ 中, 對哪些幾何量 l_a,l_b,l_c 來說如下的不等式成立?

$$al_a+bl_b+cl_c\le\sqrt{bc}l_a+\sqrt{ca}l_b+\sqrt{ab}l_c \qquad (51)$$

而對哪些幾何量上述不等式反向成立?

根據不等式 (1)−(3) 和 (38)−(39), 我們有理由猜想對於三角形內的 Ceva 線, 不等式 (51) 成立, 這還有待於證實。

注: 本文中的運算藉助了數學軟件 Maple 9.0。

致謝: 非常感謝山東省威海職業學院姜衛東老師提供文獻 [5] 以及和他有益的探討! 同時也衷心感謝審稿專家提出的寶貴意見和建議! 對《數學傳播》編輯部老師耐心細緻的排版和編輯工作亦深表感謝!

參考文獻

1. B. П. 索勒丹、C. N. 米德曼著, 張華忠譯, 三角形中的恒等式和不等式 [M], 陝西人民教育出版社, 1985。
2. Dragoslav S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities[M], Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1989.

3. O. Bottema 等著, 單墫譯, 幾何不等式 [M], 北京大學出版社, 1991。
4. 楊學校主編, 不等式研究[M], 西藏人民出版社, 2000。
5. Zhivko Zhelev, One group of inequalities with altitudes and medians in triangle, arXiv:0811.2656v1 [math.MG].

—本文作者任教中國浙江省新昌縣新昌中學—