數學傳播 35卷4期, pp. 82-85

有關三角形內切圓等分線的一些不等式

莊健祥

摘要: 本文利用三角形的內切圓等分線長爲過渡量, 簡化四個三角幾何不等式的證明。

關鍵詞: 三角形內切圓等分線, 三角幾何不等式。

本文符號定義: a, b, c 表 $\triangle ABC$ 的三邊長; $\triangle$ 表 $\triangle ABC$ 的面積; s 表 $\triangle ABC$ 的半周長; r 表 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑; m_a, m_b, m_c 表三中線長; t_a, t_b, t_c 表三內角平分線長; h_a, h_b, h_c 表三邊上的高; r_a, r_b, r_c 表三傍切圓半徑; l_a, l_b, l_c 表三內切圓等分線長。

壹、三角形內切圓等分線的由來

1988 年第 29 屆國際奧林匹亞數學競賽 IMO 開賽前, 依慣例各國須提供預選題給命題委員會選用, 其中第 84 題是由當時蘇聯所提供, 其題目爲: 在 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上取一點 D, 使得 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的內切圓半徑相等,

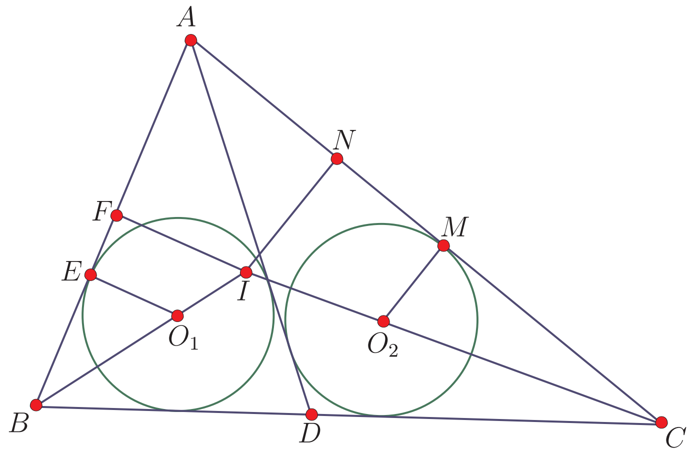
求證: $\overline{AD}^2 = \triangle \cdot \cot \dfrac{A}{2}$。

(因 $\overline{AD}$ 使得 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的內切圓半徑相等, 而中文卻無統一的正式譯名, 因此筆者比照三角形中邊或角等分的概念, 將它稱爲 $\triangle ABC$ 在 BC 邊上內切圓等分線。)

證明：依 Heron 公式及三角形半角定理知:

$$\triangle \cdot \cot \frac{A}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = s(s-a),$$

故只要證得:$\overline{AD} = \sqrt{s(s-a)}$, 此題即可得證, 今如下圖所示:



設 $\triangle ABD$ 的面積爲 $\triangle_1$, 半周長爲 s_1, 內切圓的圓心爲 O_1,

設 $\triangle ACD$ 的面積爲 $\triangle_2$, 半周長爲 s_2, 內切圓的圓心爲 O_2,

且其相等之內切圓半徑爲 r'; $\triangle ABC$ 的內心爲 I, 而 $\overline{AD}$ 設爲 l_a, 則有

$$r' = \frac{\triangle_1}{s_1} = \frac{\triangle_2}{s_2} = \frac{\triangle_1 + \triangle_2}{s_1 + s_2} = \frac{\triangle}{s + l_a} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{\triangle}{r(s + l_a)} = \frac{s}{s + l_a}; \tag{1}$$

又設 $\triangle ABD$ 的內切圓與 $\overline{AB}$ 切於 E, $\triangle ACD$ 的內切圓與 $\overline{AC}$ 切於 M, 而 $\triangle ABC$ 的內切圓與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 分別切於 F 及 N, 因 $\triangle BO_1E$ 和 $\triangle BIF$ 相似, 且 $\triangle CO_2M$ 和 $\triangle CIN$ 相似, 所以有:

$$\frac{r'}{r} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = \frac{s_1 - l_a}{s - b} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}} = \frac{s_2 - l_a}{s - c} = \frac{s_1 + s_2 - 2l_a}{2s - b - c} = \frac{s - l_a}{a}; \tag{2}$$

綜合 (1)、(2) 得:

$$\frac{s}{s + l_a} = \frac{s - l_a}{a} \Rightarrow s^2 - l_a^2 = as \Rightarrow l_a^2 = s^2 - as \Rightarrow l_a = \sqrt{s(s-a)}。$$

上述之 $\overline{AD} = l_a = \sqrt{s(s-a)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}$, 得證。

註:

1. 有關三角形內切圓等分線相關性質的介紹及另外利用 STEWART 定理所得的證明, 讀者可參看 [2]。
2. 2010 年 AIME 邀請賽第一階段的第 5 題也是關於三角形內切圓等分線的題目, 22 年後又重新出現在國際數學競賽上, 令人驚喜。

貳、利用三角形內切圓等分線長簡化三角幾何不等式

筆者發現將內切圓等分線長 l_a 當成不等式中的過渡量, 可簡化一些過去須繁複技巧才能證明的三角幾何不等式, 接下來證明一個重要的預備定理:

引理: 對任意 $\triangle ABC$, $m_a \ge l_a \ge t_a \ge h_a$。

證明：因爲

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+2bc+c^2-a^2+b^2+c^2-2bc} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(b+c)^2-a^2+(b-c)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)+(b-c)^2} \ge l_a \qquad (3) \end{aligned}$$

又 $$t_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}l_a \le l_a。 \qquad (4)$$

由 (3)、(4) 及 $t_a \ge h_a$ 可知:

對任意 $\triangle ABC$, $m_a \ge l_a \ge t_a \ge h_a$, 而等號成立於 $b=c$ 時,

亦即 $\triangle ABC$ 爲一等腰三角形時: $m_a = l_a = t_a = h_a$。

以上述引理爲基礎, 並以內切圓等分線長 l_a 爲過渡量, 我們可得出下列四個不等式, 分述於如下的四個定理:

定理一: $\sum m_a^2 \ge s^2 \ge \sum t_a^2 \ge \sum h_a^2$, 其中 $\sum m_a^2$ 代表 m_a^2, m_b^2, m_c^2 的迴圈和, 亦即 $\sum m_a^2 = m_a^2+m_b^2+m_c^2$, 其餘類推。

證明：因爲 $\sum l_a^2 = \sum s(s-a) = s^2$, 且由引理,

即得: $\sum m_a^2 \ge \sum l_a^2 = s^2 \ge \sum t_a^2 \ge \sum h_a^2$。

定理二: $m_a m_b m_c \ge r_a r_b r_c \ge t_a t_b t_c \ge h_a h_b h_c$。

證明：因爲

$$r_a r_b r_c = \left(\frac{\triangle}{s-a}\right)\left(\frac{\triangle}{s-b}\right)\left(\frac{\triangle}{s-c}\right) = \frac{\triangle^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = rs^2$$

又 $l_a l_b l_c = \sqrt{s(s-a)s(s-b)s(s-c)} = s\triangle = rs^2 = r_a r_b r_c$, 且由引理, 即得: $m_a m_b m_c \ge l_a l_b l_c = r_a r_b r_c \ge t_a t_b t_c \ge h_a h_b h_c$。

定理三: $\sum m_a t_a \ge \sum r_a r_b$。

證明：首先證明

$$\begin{aligned}
m_a t_a \geq l_a^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\right)\left(\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right) \geq s(s-a)\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\right)\left(\frac{1}{b+c}\cos\frac{A}{2}\right) \geq \frac{s(s-a)}{bc} = \cos^2\frac{A}{2},\\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{b+c} \geq \cos\frac{A}{2},\\
&\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2+2bc\cos A}{(b+c)^2} \geq \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2},\\
&\Leftrightarrow 2b^2+2c^2+4bc\cos A \geq (b+c)^2+(b+c)^2\cos A,\\
&\Leftrightarrow 2b^2+2c^2-(b+c)^2 \geq [(b+c)^2-4bc]\cos A,\\
&\Leftrightarrow (b-c)^2 \geq (b-c)^2\cos A\text{。等號成立於 } b=c \text{ 時,} \qquad (5)
\end{aligned}$$

又 $$r_b r_c = \left(\frac{\triangle}{s-b}\right)\left(\frac{\triangle}{s-c}\right) = \frac{\triangle^2}{(s-b)(s-c)} = s(s-a) = l_a^2, \qquad (6)$$

由 (5) 及 (6) 可知: $m_a t_a \geq l_a^2 = r_b r_c$, 同理 $m_b t_b \geq l_b^2 = r_c r_a$, $m_c t_c \geq l_c^2 = r_a r_b$; 三者相加即得: $\sum m_a t_a \geq \sum r_a r_b$。

定理四: $\displaystyle\sum \frac{a^2}{m_b^2+m_c^2} \leq 2 \leq \sum \frac{a^2}{t_b^2+t_c^2} \leq \sum \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}$。

證明：因 $\displaystyle\sum \frac{a^2}{l_b^2+l_c^2} = \sum \frac{a^2}{s(s-b)+s(s-c)} = \sum \frac{a^2}{as} = \sum \frac{a}{s} = 2$, 且由引理, 可得:

$$\sum \frac{a^2}{m_b^2+m_c^2} \leq \sum \frac{a^2}{l_b^2+l_c^2} = 2 \leq \sum \frac{a^2}{t_b^2+t_c^2} \leq \sum \frac{a^2}{h_b^2+h_c^2}\text{。}$$

註:此不等式即爲 Cordon 不等式的推廣, 在貴刊文 [3] 中曾給了繁複且技巧的證明。

參考文獻

1. 單墫, 胡大同, 數學奧林匹克高中版, 凡異出版社, 民國93年八月出版。
2. Paul Yiu, Notes on Euclidean Geometry,
   http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf (1998), pp.127-129.
3. 蔣明斌, Cordon 不等式的類比,「數學傳播」第33卷第1期。

—本文作者任教台北市立內湖高中—