數學傳播　35卷4期, pp. 62-81

美國高中數學測驗 AMC 12 之機率問題(上)

洪偉誠・李俊賢・蔡誠祐・何家興・張福春

摘要: 美國高中數學測驗 AMC 12 已有 60 年歷史 (1950-2009), 這些題目是經過專家們嚴謹的設計, 以選擇題的方式出題, 具有高度的鑑別度, 可測驗出學生在代數、幾何、數論、三角函數、離散數學及統計等科目中的觀念是否能靈活應用。在這 60 年的考試中共出現了 68 題各種型式的機率題目, 本文的目的是針對這些題目加以分類並作詳細的探討。

關鍵詞: 互斥事件、分割、二項式定理、全機率定理、貝氏定理、排容原理、條件機率、第摩根定理、幾何機率、機率公設、獨立事件。

美國數學會 2000 年分類索引 主要60A, 60D.

1. 前言

美國高中數學測驗 AMC 12 由 1950 年舉辦至今 (2009) 已有 60 年歷史, 為近幾年備受重視的世界性大型數學測驗。考試的對象是以高二和高三學生為主, 其內容涵蓋廣泛, 包含各種演算概念理解的數學題型, 透過這些具有挑戰性的問題, 刺激學生對於數學問題的興趣, 並引導學生平日自主學習的能力, 靈活應用已習得之數學知能。透過這些具有高鑑別度的題目, 讓學生能發覺其本身所具有的數學才能, 並讓相關的人員, 如老師、學校能重視這些學生知能的多面向, 以便適度的提供協助, 更能增進學生的發展。目前美國以此比賽為篩選美國國際奧林匹亞代表隊選手的第一階段測驗, 而台灣在 2001 年時開始舉辦 AMC 12 (12A 試卷) 的考試。表 1 顯示 2004 年到 2009 年台灣報考學生人數逐年提高, 所佔全球考生百分比亦逐年提高 (除 2007 年外)。

此測驗可以讓學生更能了解自己的數學能力。有關於 AMC 12 的詳細發展變革可參考 Maurer, Reiter and Schneider (2001), 及 AMC 12 的相關報考資訊可至財團法人九九文教基金會網站查詢。

表1. 2004 年到 2009 年台灣佔全球報考人數的百分比

年	2004	2005	2006	2007	2008	2009
全球	103, 237	83, 728	76, 439	93, 179	78, 560	82, 802
台灣	4, 163	5, 238	5, 432	5, 939	6, 075	6, 532
百分比	4.0%	6.3%	7.1%	6.4%	7.7%	7.9%

從 2002 年起 AMC 12 數學測驗在美國分爲 12A 與 12B 兩份不同的試卷, 在兩個不同日期舉行, 學生可由兩次的考試中任選一次參加。每一次皆有 25 題選擇題, 而題目的類型含括了代數、幾何、數論、三角函數、離散數學及統計等科目, 更詳盡的題目及說明可參考 Art of Problem Solving (AoPS) 的網頁, 其中收錄了 AMC 12 的考試題目, 並提供全世界對於此競賽有興趣的人一起討論, 有些題目已被提出解答, 而有些還在待解中。更多完整的題目與解答可參考美國數學學會所出版一系列 AMC 12 數學測驗歷屆試題暨詳解參考書 (1950-2007): Salkind (1961, 1966)、Salkind and Earl (1973)、Artino, Gaglione and Shell (1982)、Berzsenyi and Maurer (1997)、Schneider (1997)、Reiter (2006) 及 Wells and Faires (2008)。下表 2 是以十年爲一單位所計算機率佔總題數的百分比, 其中機率所佔百分比呈現逐漸增加的趨勢。

表2. 歷屆機率試題所佔百分比

	1950-1959	1960-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	2000-2009	合計
總題數	500	390	320	300	300	475	2285
機率題數	0	1	10	13	13	41	68
百分比	0%	0.3%	3.1%	4.3%	4.3%	8.6%	3.4%

本文主要介紹歷屆 AMC 12 的試題中的機率問題, 由簡單的例子循序漸進, 了解基本概念後, 再綜合應用到更爲繁雜的例子。在第二節先介紹了機率的基本定義、公設及各種原理方法 (第摩根定理、互斥事件、獨立事件、排容原理), 再提供相關的例題來熟悉其內容。第三節介紹條件機率的想法, 並將條件機率的形式做推廣得全機率定理、貝氏定理等。第四節介紹在基本定義 (個數爲有限可數) 外, 當個數爲無限不可數時, 如何利用幾何測量 (長度、面積、體積) 與定義求機率。而第五節將一特殊的路徑問題獨立做介紹, 利用這些例題的探討, 更能體會機率與日常生活密不可分的關係。在最後提供了一些 AMC 12 的 試題當作習題, 這些習題涵蓋第二節到第五節的各種觀念及計算技巧。下表 3 爲機率題型的分佈, 其中以機率所佔之百分比最高, 佔 60.3%, 其次爲幾何機率佔 20.6%, 條件機率佔 11.8%, 百分比最低的爲路徑問題, 佔 7.3%。

表3. 機率題型分佈

分類	機率	條件機率	幾何機率	路徑問題
題數	41	8	14	5
百分比	60.3%	11.8%	20.6%	7.3%

2. 機率

2.1. 樣本空間與事件

將一個實驗中所有可能出現的結果 (outcome) 所形成的集合, 稱爲一樣本空間, 記作 S。由於每一種可能的結果皆屬於樣本空間, 故亦可稱爲元素或樣本點。事件 (event) 爲一些結果所形成的集合且事件爲 S 的子集, 以大寫字母 $(A, B, C, \ldots)$ 表示, 可分爲以下兩種類型:

(1) 事件中只有包含一個元素, 稱作簡單事件 (simple event, 亦稱爲樣本點), 例如投擲一顆骰子得點數 3。

(2) 事件中包含兩個以上的元素, 稱作複合事件 (compound event), 例如投擲兩顆骰子得點數和爲 3 或 5 或 7。

若 A, B 兩事件滿足 $A \cap B = \emptyset$ 時, 則稱此 A 事件與 B 事件爲互斥事件 (disjoint events)。

2.2. 機率公設

假設 S 是某隨機實驗上的樣本空間, 而 $\mathcal{B}$ 爲 S 中某些樣本點所形成的子集合, 且定義集合函數 $P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, 若 P 滿足下列的三項機率公設, 則稱函數 P 爲機率函數:

機率公設 (axioms of probability)

一、對於任意的 A 事件皆滿足: $P(A) \geq 0$。

二、樣本空間 S 的機率等於 1, 寫作 $P(S) = 1$。

三、如果 $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ 爲一組有限或者可數的無限的事件且彼此爲互斥事件, 則這些事件所聯集的機率等於個別事件的機率和:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

上述公設是現代機率論發展的基礎, 是俄國數學家柯莫格洛夫 (Kolmogorov, 1903-1987) 於 1933 年所發表的, 因此機率公設也稱作柯莫格洛夫公設 (Kolmogorov axioms)。

以下爲利用機率公設來計算的問題。

例 1. (1985 AMC 12 #6) 在男女合班的班級中, 隨機挑選一名學生作爲班級代表, 其中每個學生都可能會被選上, 並且選到男生的機率是選到女生的機率的 $\frac{2}{3}$, 試問男生人數與全班人數比值爲多少?

(A) $\dfrac{1}{3}$ **(B)** $\dfrac{2}{5}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{3}{5}$ **(E)** $\dfrac{2}{3}$

解:(B) 設 p 爲抽到女生的機率, 則抽到男生的機率爲 $\frac{2}{3}p$, 而題意可視爲求抽到男生的機率。故由機率公設

$$p+\frac{2}{3}p=1 \qquad \text{求得} \quad p=\frac{3}{5}$$

因此抽到男生的機率爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

□

例 2. (1978 AMC 12 #19) 假設 n 爲不超過 100 的正整數, 且以下列方式選取: 若 $n\le 50$, 則選取到 n 的機率爲 p; 若 $n>50$, 則選取到 n 的機率爲 $3p$, 試問選取到完全平方數的機率是多少?

(A) 0.05 **(B)** 0.065 **(C)** 0.08 **(D)** 0.09 **(E)** 0.1

解:(C) 在 1 至 50 中的 50 個數, 每一個數的機率皆爲 p; 而 51 至 100 中的 50 個數, 每一個數的機率皆爲 $3p$, 由機率公設知

$$50\times p+50\times(3p)=1 \quad \text{則} \quad p=0.005$$

而在 1 至 50 之間共有 7 個完全平方數, 在 51 至 100 之間共有 3 個完全平方數, 則選到完全平方數的機率爲

$$7\times p+3\times 3p=16p=0.08$$

□

等機率樣本點的樣本空間

若樣本空間 S 爲一有限的集合, 且在 S 中每一個樣本點發生的可能性皆相同時 (所謂 equally likely), 則任意事件 A 發生的機率, 只需要計算該事件中樣本點個數與 S 中樣本點個數的比值, 即

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|A|$ 和 $|S|$ 分別代表 A 和 S 樣本點的個數。以下爲幾個等機率樣本點的問題。

例 3. (1976 AMC 12 #8) 在 xy 平面上一點, 其 x, y 座標皆是絕對值小於或等於 4 的整數, 且滿足此條件的點被選取之機率皆相同, 試問從這個點到原點的距離不大於 2 單位的機率是多少?

(A) $\dfrac{13}{81}$ **(B)** $\dfrac{15}{81}$ **(C)** $\dfrac{13}{64}$ **(D)** $\dfrac{\pi}{16}$ **(E)** 有理數的平方

解:(A) 此點的 x, y 座標的可能情況共有 $9\times 9=81$ 種, 而與原點距離不大於 2 的點列舉如下

(1) 當 $x=0$ 時: y 可爲 $0, \pm 1, \pm 2$, 即表示點 $(0,0),(0,\pm 1),(0,\pm 2)$, 共 5 種可能。

(2) 當 $x=\pm 1$ 時: y 可爲 $0, \pm 1$, 即表示點 $(\pm 1,0),(\pm 1,\pm 1)$, 共 6 種可能。

(3) 當 $x=\pm 2$ 時: y 只能爲 0, 即表示點 $(\pm 2,0)$, 共 2 種可能。

綜合上述情況, 與原點距離不大於 2 的點共有 $5+6+2=13$ 種可能, 故機率爲 $\frac{13}{81}$。 □

例 4. (1977 AMC 12 #17) 獨立地投擲三顆骰子 (每一點數出現的機率皆相同), 試問三個朝上的點數能排列成公差爲 1 之等差數列的機率爲多少?

(A) $\dfrac{1}{6}$ **(B)** $\dfrac{1}{9}$ **(C)** $\dfrac{1}{27}$ **(D)** $\dfrac{1}{54}$ **(E)** $\dfrac{7}{36}$

解:(B) 骰子點數爲 1 至 6, 其中三個朝上點數會產生公差爲 1 之等差數列的情況如下:

$$(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)$$

因此朝上面呈等差數列的機率爲

$$\frac{4\times 3!}{6\times 6\times 6}=\frac{1}{9}$$ □

例 5. (2003 AMC 12A #8) 隨機取出 60 的一個正因數, 試問取出此正因數會小於 7 的機率爲何?

(A) $\dfrac{1}{10}$ **(B)** $\dfrac{1}{6}$ **(C)** $\dfrac{1}{4}$ **(D)** $\dfrac{1}{3}$ **(E)** $\dfrac{1}{2}$

解:(E) 因爲 $60=2^2\times 3\times 5$, 共有 $(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$ 個正因數, 其中有

$$1,2,3,4,5,6$$

共 6 個正因數會小於 7, 故所求機率爲 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$。 □

2.3. 第摩根定理

當 A 事件的機率計算非常瑣碎, 而 A 的餘事件的機率計算相對較為容易時, 我們可藉由 A 的餘事件 (A^c) 來求出 A 事件的機率, 再搭配機率公設可推得下列定理。此定理為第摩根 (De Morgan, 1806-1871) 在古典命題邏輯中所推論出來的結果, 被廣泛的應用在數學各個領域中, 如邏輯、計數及機率。以下為其機率形式:

定理 2.1.(**第摩根定理**) 設 A^c 為事件 A 的餘事件, 則

$$P(A) = 1 - P(A^c)\,.$$

證明: 因為 A 和 A^c 為互斥事件且 $A \cup A^c = S$, 所以根據機率公設二和公設三可推得:

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

由上式可推得 $P(A) = 1 - P(A^c)$。 □

以下為利用第摩根定理來計算的問題。

例 6. (1993 AMC 12 #24) 有一個盒子裡裝了 3 個新的硬幣與 4 個舊的硬幣, 將硬幣一個接一個隨機的取出且不放回, 若第三枚新的硬幣在第四次之後 (不含第四次) 才被取出的機率為 $\frac{a}{b}$, 其中 $\frac{a}{b}$ 為最簡分數, 則 $a+b$ 為多少?

(A) 1 **(B)** 20 **(C)** 35 **(D)** 58 **(E)** 66

解:(E) $P(\text{前四次將新的硬幣取完}) = \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{1}}{\binom{7}{4}} = \frac{4}{35}$, 再由第摩根定理

$$P(\text{新硬幣於第四次之後取完}) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

所以 $a+b = 31+35 = 66$。 □

例 7. (2008 AMC 12B #22) 停車場內有 16 個停車位排成一列, 今有十二輛車抵達, 並隨機挑選一個位置停車。之後又有一台需要兩個停車位的休旅車進入停車場, 試問此休旅車能夠完全停入的機率為多少?

(A) $\frac{11}{20}$ **(B)** $\frac{4}{7}$ **(C)** $\frac{81}{140}$ **(D)** $\frac{3}{5}$ **(E)** $\frac{17}{28}$

解:(E) 首先討論此休旅車無法找到適當停車位的情況, 即當前 12 輛車停完後, 所留下來的空位並無兩個相鄰。因爲 12 輛車停完後會有4個空位, 則此 4 個空位彼此不相鄰 (此四個空位會介於 12 輛車的 13 個空隙中) 的機率爲

$$\frac{\binom{13}{4}}{\binom{16}{4}}=\frac{11}{28}$$

故由第摩根定理, 休旅車可找到適當的停車位的機率爲

$$1-\frac{11}{28}=\frac{17}{28}. \qquad \square$$

2.4. 獨立事件

設 A,B 爲兩事件, 若滿足

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

則稱 A,B 爲獨立事件 (independent events), 以下爲獨立事件在機率中的一般形式。

定義 2.1.(**獨立事件**) 設 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 爲 n 個有限事件, 若任意 $k(2\le k\le n)$ 個事件 $A_{i_1},A_{i_2},\ldots,A_{i_k}$ $(1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n)$ 皆滿足

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\times P(A_{i_2})\times\cdots\times P(A_{i_k})$$

則稱此 n 個事件爲獨立事件。

以下爲利用互斥事件及獨立事件來計算機率問題。

例 8. (1986 AMC 12 #22) 從 $\{1,2,\ldots,10\}$ 中隨機取出 6 個不同的整數, 試問在所取的數中, 第二小的數是 3 的機率爲多少?

(A) $\frac{1}{60}$　**(B)** $\frac{1}{6}$　**(C)** $\frac{1}{3}$　**(D)** $\frac{1}{2}$　**(E)** 以上皆非

解:(C) 假設 $x,3,y,z,u,v$ 爲所取到的數字, 滿足

$$x<3<y<z<u<v$$

所以 x 可爲 $\{1,2\}$ 兩種數字, 而 y,z,u,v 可爲 $4,5,\ldots,10$ 中的任意四個數字, 故有 $\binom{2}{1}\times\binom{7}{4}=70$ 種滿足條件的數字組合。又從 $\{1,2,\ldots,10\}$ 中取出 6 個整數共有 $\binom{10}{6}=210$ 種

組合, 因此所求機率爲

$$\frac{70}{210}=\frac{1}{3}.\qquad\square$$

例 9. (1971 AMC 12 #23) 有 A, B 兩隊正在進行一系列賽事, 若兩隊都有相同機會在任何一局中得勝, 且 A 隊要贏兩局或 B 隊要贏三局才能算獲勝, 試問有利於 A 隊獲勝的勝算比爲多少?

(A) 11 比 5 **(B)** 5 比 2 **(C)** 8 比 3 **(D)** 3 比 2 **(E)** 13 比 5

解:(A) A 隊獲勝的可能情況爲

比賽情況	機率
連勝兩局	
AA	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
BAA	$\frac{1}{8}$
$BBAA$	$\frac{1}{16}$
已勝一局	
ABA	$\frac{1}{8}$
$ABBA$	$\frac{1}{16}$
$BABA$	$\frac{1}{16}$

故 A 隊獲勝的機率爲

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}.\qquad\square$$

例 10. (1997 AMC 12 #10) 有兩顆公正骰子, 今將其中一個的 4 點換成 3 點, 而將另一個的 3 點換成 4 點, 若同時投擲兩顆骰子一次, 則點數和爲奇數的機率爲多少?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{4}{9}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{5}{9}$ **(E)** $\frac{11}{18}$

解:(D) 點數和爲奇數, 則此兩顆骰子所得點數必爲一奇一偶。因爲此兩顆骰子點數的奇偶機率不相同, 故以下分兩骰子來做討論

(1) 第一顆骰子點數爲 $1,2,3,3,5,6$, 所以出現奇數的機率爲 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 出現偶數的機率爲 $\frac{1}{3}$。

(2) 第二顆骰子點數爲 $1,2,4,4,5,6$, 所以出現偶數的機率爲 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 出現奇數的機率爲 $\frac{1}{3}$。

因此兩顆骰子點數和爲奇數的機率爲 $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$。 $\square$

例 11. (1979 AMC 12 #27) 隨機選取一對有序整數 (b,c), 其中 b,c 的絕對值皆小於或等於 5, 而每一對有序整數對被選取到的可能性皆相等, 試問方程式 $x^2+bx+c=0$ 沒有相異正實根的機率是多少?

(A) $\dfrac{106}{121}$　**(B)** $\dfrac{108}{121}$　**(C)** $\dfrac{110}{121}$　**(D)** $\dfrac{112}{121}$　**(E)** 以上皆非

解:(E) 由根與係數關係可知, 若方程式 $x^2+bx+c=0$ 有兩相異的正實根 α,β, 則

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-b>0\\ \alpha\cdot\beta=c>0\\ D=b^2-4c>0\end{cases}$$

所以 $b<0, c>0, b^2>4c$。因為 $|b|\le 5, |c|\le 5$, 則共有 $11\times 11=121$ 個整數對 (b,c)。以下討論滿足有兩相異正實根條件的數對 (b,c):

(1) 當 $b=-5$ 時: c 可能的值為 $5,4,3,2,1$, 即表示數對 $(-5,1),(-5,2),(-5,3),(-5,4),(-5,5)$, 共 5 個數對。

(2) 當 $b=-4$ 時: c 可能的值為 $3,2,1$, 即表示數對 $(-4,1),(-4,2),(-4,3)$, 共 3 個數對。

(3) 當 $b=-3$ 時: c 可能的值為 $2,1$, 即表示數對 $(-3,1),(-3,2)$, 共 2 個數對。

綜合上述情況, 共有 $5+3+2=10$ 種數對會使得方程式有兩相異正實根, 故使方程式沒有相異正實根的機率為

$$1-\frac{10}{121}=\frac{111}{121}$$ □

例 12. (1980 AMC 12 #20) 在盒子裡有 2 枚一分、4 枚五分和 6 枚一角的錢幣, 從中取出 6 枚硬幣, 每次取出不再放回, 且每枚硬幣被取到的機率皆相等, 試問取出硬幣的總值至少是五十分的機率是多少?

(A) $\dfrac{37}{924}$　**(B)** $\dfrac{91}{924}$　**(C)** $\dfrac{127}{924}$　**(D)** $\dfrac{132}{924}$　**(E)** 以上皆非

解:(C) 由 12 枚硬幣中任取六枚, 共有 $\binom{12}{6}=924$ 種取法。以下以所取到一角硬幣的個數來做討論:

(1) 若取到 6 枚一角硬幣 (60分): 共有 $\binom{6}{6}=1$ 種取法。

(2) 若取到 5 枚一角硬幣 (50 分): 剩餘 6 (2 枚一分、4 枚五分) 個硬幣任取 即可, 共有 $\binom{6}{5}\binom{6}{1} = 36$ 種取法。

(3) 若取到 4 枚一角硬幣 (40 分): 則需取 2 枚五分的硬幣才可滿足題目要求, 共有 $\binom{6}{4}\binom{4}{2} = 90$ 種取法。

綜合上述情況, 取出硬幣總和至少爲五十分的情況共有 $1 + 36 + 90 = 127$ 種, 故機率爲 $\frac{127}{924}$。
□

例 13. (1988 AMC 12 #12) 將整數 1 到 9 分別寫在 9 張紙片上, 再放在帽子裏, 傑克隨機取了一張又放了回去, 接著吉爾也隨機取了一張, 試問哪個數字最可能是傑克、吉爾兩個人所取數字和的個位數?

(A) 0　**(B)** 1　**(C)** 8　**(D)** 9　**(E)** 每一個數字機率相等

解:(A) 此兩人由帽子中抽取出來的數字共有 $9 \times 9 = 81$ 種組合, 以下針對可能的數字和的個位數字做討論:

(1) 數字和之個位數字爲 0 (兩數字和爲 10): 對於 1 到 9 中每個數而言, 都會有其相對應的數能使得總和爲 10, 使得其個位數字爲 0, 如

$$1 + 9 = 10, \quad 2 + 8 = 10, \quad 3 + 7 = 10, \ldots, 9 + 1 = 10$$

故共有 9 種可能, 其機率爲 $\frac{9}{81}$。

(2) 數字和之個位數字爲 1 (兩數字和爲 11): 除了數字 1 以外的每一個數, 都會有其相對應的數使得總和的個位數字爲 1 (和爲 11)

$$1 + 0 = 1, \quad 1 + 10 = 11 \quad (\text{不存在, 因在 1 到 9 中沒有數字 0 與 10})$$
$$2 + 9 = 11, \quad 3 + 8 = 11, \ldots, 9 + 2 = 11$$

故共有 8 種可能, 其機率爲 $\frac{8}{81}$。

(3) 數字和之個位數字爲 $2 \sim 9$: 如 (2) 之討論, 共有 8 種可能, 其中每一種可能 的個位數字的機率皆爲 $\frac{8}{81}$。

故所取數字和之個位數字爲 0 的發生機率最大, 即最可能的個位數字爲 0。 □

例 14. (2004 AMC 12B #20) 在一立方體的每一面塗上紅色或是藍色, 其中各面所塗的顏色彼此為獨立, 且塗紅色或藍色的機率各為 $\frac{1}{2}$。試求將此塗上顏色的立方體水平放置時, 其另外垂直的四個面顏色相同的機率為何?

(A) $\dfrac{1}{4}$　**(B)** $\dfrac{5}{16}$　**(C)** $\dfrac{3}{8}$　**(D)** $\dfrac{7}{16}$　**(E)** $\dfrac{1}{2}$

解:(B) 因並未限制垂直面為哪幾個面, 則討論立方體的六個面塗色情況:

(1) 六個面同色: 共有 $\binom{2}{1}=2$ 種可能。

(2) 五個面同色: 共有 $\binom{2}{1}\cdot\binom{6}{5}=2\cdot 6=12$ 種可能。

(3) 四個面同色: 因需垂直面有 4 個面同色, 所以同色的面必為垂直面, 則上、下兩面為另外一種顏色, 共有

$$\binom{2}{1}\cdot\underbrace{3}_{\text{3組上、下面}}=2\cdot 3=6$$

種可能。

而每一個面皆有 2 種顏色可塗, 則六個面共有 $2^6=64$ 種塗色法, 故所求機率為

$$\frac{2+12+6}{64}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$ □

例 15. (1974 AMC 12 #24) 獨立地投擲一顆公正骰子六次, 至少有五次得到五點以上的機率是多少?

(A) $\dfrac{13}{729}$　**(B)** $\dfrac{12}{729}$　**(C)** $\dfrac{2}{729}$　**(D)** $\dfrac{3}{729}$　**(E)** 以上皆非

解:(A) 可將題意視為: 若得到五點以上即稱為成功, 令成功機率 $p=\frac{1}{3}$, 反之為失敗, 則題意即為求 $P(X\geq 5)$。

所以

$$\begin{aligned}P(X\geq 5)&=P(X=5)+P(X=6)\\&=\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{13}{729}\end{aligned}$$ □

2.5. 排容原理

以下介紹排容原理, 它是一個能夠解決關於多個具有某些性質的非互斥事件其交集與聯集機率問題的有效方法。

定理 2.2.(**排容原理**) 設 S 爲樣本空間且 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 爲一組定義在 S 上的事件, 則

(a) 所有 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 的餘事件的交集的機率爲:

$$P(A_1^c A_2^c \cdots A_n^c) = P(S) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) - \cdots + (-1)^n P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

當 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 事件兩兩互斥時:

$$P(A_1^c A_2^c \cdots A_n^c) = P(S) - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(b) 所有 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 事件的聯集的機率爲:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

當 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 事件兩兩互斥時, 得公設三:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

當 $n = 2$ 時, 對於任意的兩個事件 A 和 B, 皆滿足下列的性質:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

如果 A 和 B 爲兩個互斥的事件, 則 $P(A \cap B) = 0$ 且 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

當 $n = 3$ 時, 對於任意的三個事件 A 和 B 和 C, 皆滿足下列的性質:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

以下爲利用排容原理來計算機率問題。

例 16. (2002 AMC 12B #16) Juan 擲一顆點數爲 $1\sim 8$ 的公正八面骰子, Amal 擲一顆點數爲 $1\sim 6$ 的公正六面骰子, 試問他們兩人所擲的點數乘積爲 3 的倍數的機率爲多少?
(A) $\dfrac{1}{12}$ **(B)** $\dfrac{1}{3}$ **(C)** $\dfrac{1}{2}$ **(D)** $\dfrac{7}{12}$ **(E)** $\dfrac{2}{3}$

解:(C) 兩人的點數乘積爲 3 的倍數, 即表示至少有 1 人擲出的點數爲 3 的倍數。假設 J 表示 Juan 擲出的點數爲 3 的倍數的事件, A 表示 Amal 擲出的點數爲 3 的倍數的事件, 則題意即爲求 $P(J\cup A)$。

解法一: 因爲 J, A 爲獨立事件, 所以由排容原理

$$P(J\cup A)=P(J)+P(A)-P(JA)=\frac{2}{8}+\frac{2}{6}-\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$$

解法二: 因爲 J, A 爲獨立事件, 所以 J^c, A^c 亦爲獨立事件, 故由第摩根定理

$$P(J\cup A)=1-P(J^cA^c)=1-P(J^c)\,P(A^c)=1-\frac{6}{8}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{2}$$ □

例 17. (1983 AMC 12 #26) 設事件 A 發生的機率爲 $\frac{3}{4}$, 事件 B 發生的機率爲 $\frac{2}{3}$, 且 p 爲 A 和 B 都發生的機率, 試問必定包含 p 的最小區間爲何?
(A) $\left[\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{2}\right]$ **(B)** $\left[\dfrac{5}{12},\dfrac{1}{2}\right]$ **(C)** $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$ **(D)** $\left[\dfrac{5}{12},\dfrac{2}{3}\right]$ **(E)** $\left[\dfrac{1}{12},\dfrac{2}{3}\right]$

解:(D) 假設 $P(E)$ 爲事件 E 發生的機率, 則由題意知

$$P(A)=\frac{3}{4},\quad P(B)=\frac{2}{3},\quad P(A\cap B)=p$$

再由排容原理

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

又因爲 $\frac{3}{4}=\max\{P(A)\,,P(B)\}\le P(A\cup B)\le 1$, 所以

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-1\le p\le\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$$

即爲

$$\frac{5}{12} \leq p \leq \frac{2}{3} \qquad \square$$

2.6. 機率與對數函數之應用

下列爲以對數函數相關的機率的問題。

例 18. (1975 AMC 12 #18) 隨機選取一個十進位表示的三位正整數 N, 且每個三位數被選到的機會相等, 試問 $\log_2 N$ 爲一個整數的機率爲多少?

(A) 0 **(B)** $\frac{3}{899}$ **(C)** $\frac{1}{225}$ **(D)** $\frac{1}{300}$ **(E)** $\frac{1}{450}$

解:(D) 欲使得 $\log_2 N$ 爲正整數, 則 N 需爲 2 的正整數次方數。三位正整數共有 900 個, 其中 2 的次方數有 $2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512$ 三個爲三位正整數, 所以 $\log_2 N$ 是正整數機率爲 $\frac{3}{900} = \frac{1}{300}$。 $\square$

例 19. (1985 AMC 12 #24) 隨機選取一個非零的數字, 其選取方式使得取到數隨機選取一個非零的數字, 其選取方式使得取到數字 d 的機率是 $\log_{10}(d+1) - \log_{10} d$, 而取到數字 2 的機率恰好是所取數字包含在下列某個集合中的機率的 $\frac{1}{2}$, 試問該集合爲何?

(A) $\{2,3\}$ **(B)** $\{3,4\}$ **(C)** $\{4,5,6,7,8\}$ **(D)** $\{5,6,7,8,9\}$
(E) $\{4,5,6,7,8,9\}$

解:(E) 假設 $P(d)$ 爲取到數字 d 的機率, 所以 $P(d) = \log_{10} \frac{d+1}{d}$。而 $P(d, d+1)$ 表示取到數字 d 或 $d+1$ 的機率, 所以

$$P(d, d+1) = \log_{10} \frac{d+1}{d} + \log_{10} \frac{d+2}{d+1} = \log_{10} \frac{d+2}{d}$$

由題意知所取數字包含在某個集合中的機率爲取到數字 2 的機率的 2 倍, 故

$$\begin{aligned}
2P(2) &= 2\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} \frac{9}{4} \\
&= \log_{10} \left(\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \times \frac{9}{8} \right) \\
&= \log_{10} \frac{5}{4} + \log_{10} \frac{6}{5} + \log_{10} \frac{7}{6} + \log_{10} \frac{8}{7} + \log_{10} \frac{9}{8} \\
&= P(4,5,6,7,8,9)
\end{aligned}$$

則所求集合爲 $\{4,5,6,7,8,9\}$。 $\square$

例 20. (2005 AMC 12A #23) 從集合 $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{25}\}$ 中隨機選取兩個不同的數 a 及 b, 試問 $\log_a b$ 爲整數的機率爲多少?
(A) $\dfrac{2}{25}$ **(B)** $\dfrac{31}{300}$ **(C)** $\dfrac{13}{100}$ **(D)** $\dfrac{7}{50}$ **(E)** $\dfrac{1}{2}$

解:(B) 假設 $a=2^x, b=2^y, x,y\in\{1,2,\ldots,25\}$, 因爲 $\log_a b=\frac{y}{x}$ 爲整數, 所以 x 需爲 y 的因數, 以下對 y 進行討論

(1) $y=25$ 時: x 可能值有 $1,5$, 共有 2 個。

(2) $y=24$ 時: x 可能值有 $1,2,3,4,6,8,12$, 共有 7 個。

(3) $y=23$ 時: x 可能值有 1, 共有 1 個。

以此類推 $y=22$ 有 3 個、$y=21$ 有 3 個、$y=20$ 有 5 個、...等等, 則機率爲

$$\frac{2+7+1+3+3+5+1+5+1+4+3+3+1+5+1+3+2+3+1+3+1+2+1+1}{25\times 24}$$
$$=\frac{62}{600}=\frac{31}{300}$$ $\square$

3. 條件機率

在日常生活中, 常會有已知某一事件已發生的前提下, 去尋求另一相關事件的機率, 例如一日早晨下過雨, 想知道中午出門撐傘的機率爲何? 此種類型的機率問題我們稱之爲「條件機率」(conditional probability)。

假設有一個樣本空間爲 S 的實驗, 而 A 和 B ($A\subset S$, $B\subset S$) 是兩個在實驗過程中可能會發生的事件。如果我們觀察到 B 已發生, 則在 S 的元素中, 只要考慮 B 事件已發生的元素, 故可以把事件 B 當成新的樣本空間, 再進一步討論有關 A 事件的各種結果。在給定 B 事件發生之下, A 事件的條件機率記爲 $P(A|B)$, 其定義如下:

定義 3.1.(**條件機率**) 在樣本空間 S 的實驗中, B 事件已發生之下且 $P(B)>0$, 則 A 事件會發生的條件機率爲:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

註:

(1) 上述的定義中, 已知條件的 B 事件的機率必爲正值 (即 $P(B)>0$), 因爲在計算 條件機率時, 已知 B 事件的機率置放於分母, 故其值不可爲 0。

(2) 若 $A\subset B$, 則 $P(A|B)=P(A)\,/P(B)\,, P(B|A)=1$。

(3) 若 $A\cap B=\emptyset$, 則 $P(A|B)=0$。

(4) A, B 兩事件交集的機率可經由條件機率計算求得:

$$P(A\cap B)=P(B|A)\,P(A) \tag{1}$$

下列爲條件機率的一些應用問題。

例 21. (1996 AMC 12 #16) 今投擲一公正骰子三次, 在前二次點數和等於第三次之點數的條件下, 試問至少出現一個 2 的機率爲多少?
(A) $\frac{1}{6}$　**(B)** $\frac{91}{216}$　**(C)** $\frac{1}{2}$　**(D)** $\frac{8}{15}$　**(E)** $\frac{7}{12}$

解:(D) 假設 (x,y,z) 分別表示投擲三次所出現的點數對, 共會有 $6\times 6\times 6=216$ 種可能的數對搭配, 則以下列出前二次點數和等於第三次之點數的所有可能情況:

$$\begin{array}{ccccc}(1,1,2) & (1,2,3) & (1,3,4) & (1,4,5) & (1,5,6)\\ (2,1,3) & (2,2,4) & (2,3,5) & (2,4,6) & (3,1,4)\\ (3,2,5) & (3,3,6) & (4,1,5) & (4,2,6) & (5,1,6)\end{array}$$

其中有 8 組數對至少出現一個 2, 由條件機率

$$\begin{aligned}&P(\text{至少出現一個 } 2 \mid \text{前二次點數和等於第三次之點數})\\ &=\frac{P(\text{前二次點數和等於第三次之點數且至少出現一個 } 2)}{P(\text{前二次點數和等於第三次之點數})}=\frac{\frac{8}{216}}{\frac{15}{216}}=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

□

例 22. (1983 AMC 12 #15) 將三個球分別標記上號碼 $1,2,3$ 放置在甕中, 然後從甕中抽取出一顆球記下其號碼後再放回去, 以這樣的方式進行三次, 在每一次抽取球的過程中, 任一個球被抽到的機會都是相等的。若所記下的號碼之和爲 6, 試問這三次抽到球的號碼皆爲 2 的機率是多少?
(A) $\frac{1}{27}$　**(B)** $\frac{1}{8}$　**(C)** $\frac{1}{7}$　**(D)** $\frac{1}{6}$　**(E)** $\frac{1}{3}$

解:(C) 三次抽取到球的標記和爲 6 的可能情況如下

號碼組合	排列數
$(1,2,3)$	$3!=6$ 種
$(2,2,2)$	1 種

假設 A 表示三次抽球和爲 6 之事件, B 爲三次抽球的號碼皆爲 2 的事件, 則題意即爲求 $P(B\mid A)$。由條件機率得

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3^3}}{\frac{6+1}{3^3}}=\frac{1}{7}\qquad\square$$

3.1. 分割

定義 3.2.(**分割**) 設 $A_1,A_2,A_3,\ldots,$ 爲一組有限或者可數的無限的事件且彼此互斥, 而且 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots=S$, 則稱 $A_1,A_2,A_3,\ldots,$ 爲樣本空間 S 的一分割 (partition)。

以下爲機率中的分割定理:

定理 3.1.(**分割**) 設 $A_1,A_2,A_3,\ldots,$ 爲樣本空間 S 的一分割, 則對於任意的 B 事件皆滿足下列的關係式:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+\cdots$$

註: 因爲 A 事件和 A 的餘事件爲樣本空間的一分割, 所以由上述定理可知, 任意的 B 事件的機率爲: $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^c)$。

接下來利用一例子來認識何謂分割, 及其特性。

例 23. (2002 AMC 12C #15) 在一個箱子中放有 1001 個紅色彈珠及 1001 個黑色彈珠, 令 P_s 表示自箱子中任意取出兩個彈珠是相同顏色的機率, P_d 表示取出兩個彈珠是不同顏色的機率, 試求 $|P_s-P_d|$ 的值。

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2002}$ **(C)** $\frac{1}{2001}$ **(D)** $\frac{2}{2001}$ **(E)** $\frac{1}{1000}$

解:(C) 由箱子中取出兩不同顏色彈珠的機率

$$P_d=\frac{\binom{1001}{1}\cdot\binom{1001}{1}}{\binom{2002}{2}}=\frac{1001}{2001}$$

又因爲 $P_s + P_d = 1$, 所以

$$P_s = 1 - P_d = \frac{1000}{2001}$$

註:　P_s 亦可以下列方式計算求得

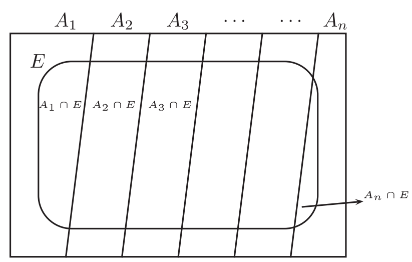
$$P_s = P(\text{取到紅色}) + P(\text{取到黑色}) = \frac{\binom{1001}{2}}{\binom{2002}{2}} + \frac{\binom{1001}{2}}{\binom{2002}{2}} = \frac{1000}{2001}$$

所以

$$|P_s - P_d| = \left|\frac{1000}{2001} - \frac{1001}{2001}\right| = \frac{1}{2001} \qquad \square$$

3.2. 全機率定理

若 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 事件分割了樣本空間, 則亦可以分割任何樣本空間中的事件 E, 如下圖所示



由上圖可知, 彼此互斥事件 $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ 的交集與聯集可以組成事件 E, 如下列式子

$$E = (A_1 \cap E) \cup (A_2 \cap E) \cup \cdots \cup (A_n \cap E)$$

再與 (1) 式可推得下列的全機率定理 (theorem of total probability):

定理 3.2.(**全機率定理**) 設 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 爲 S 的一分割且 $P(A_i) \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$, 對於任意事件 E 的機率可表示成:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap E) + P(A_2 \cap E) + \cdots + P(A_n \cap E) \\ &= P(E|A_1)\,P(A_1) + P(E|A_2)\,P(A_2) + \cdots + P(E|A_n)\,P(A_n) \end{aligned}$$

以下爲一全機率定理的應用問題。

例 24. (2005 AMC 12A #14) 隨機將一顆公正骰子上的一點抹掉, 且每個點被抹掉的機率會相同, 然後投擲這顆骰子, 試問骰子朝上那個面出現奇數點的機率是多少?
(A) $\frac{5}{11}$ **(B)** $\frac{10}{21}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{11}{21}$ **(E)** $\frac{6}{11}$

解:(D) 骰子中共有 $1+2+\cdots+6=21$ 個點, 因爲每個點被抹掉的機率相同, 則點數爲 1 上的點被移除的機率爲 $\frac{1}{21}$, 點數爲 2 上的點被移除的機率爲 $\frac{2}{21}$, 以此類推, 點數爲 6 上的點被移除的機率爲 $\frac{6}{21}$, 故

$$\begin{aligned}P(\text{出現奇數點}) &= P(\text{出現奇數點} \mid \text{移除點的面爲奇數})\cdot P(\text{移除點的面爲奇數})\\ &\quad + P(\text{出現奇數點} \mid \text{移除點的面爲偶數})\cdot P(\text{移除點的面爲偶數})\\ &= \frac{1+3+5}{21}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2+4+6}{21}\cdot\frac{4}{6}=\frac{11}{21}\end{aligned}$$ □

3.3. 貝氏定理

貝氏定理在機率論中是一個比較早發現的結果之一, 此定理是由貝氏 (Bayes, 1702-1761) 牧師的朋友在西元 1764 年替他發表, 發表迄今已超過兩百年, 此定理就以貝氏來命名。貝氏定理的統計推論的基礎是由已知的機率 (稱作事前機率), 來推得未知的機率 (稱作事後機率)。例如, 我們要計算給定 B 事件發生之下, $A_i(i=1,2,\ldots,n)$ 事件的條件機率, 當碰到計算B事件的機率且 B 與 A_i 交集事件的機率很困難時, 我們會以事前機率: $P(A_i)\,, P(B|A_i)$, 去求得事後機率: $P(A_i|B)$, 這種方式即爲貝氏定理 (Bayes' Theorem), 其定理內容描述如下:

定理3.3.(**貝氏定理**) 設 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 爲 S 的一分割且 $P(A_i)\neq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, 給定任意的 B 事件發生且 $P(B)\neq 0$ 之下, A_i 事件發生的條件機率可表示成:

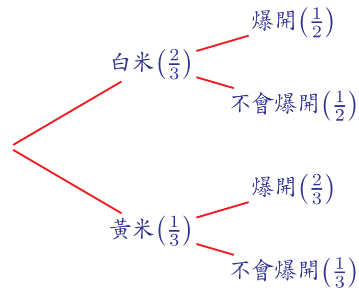
$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)\,P(A_i)}.$$

在利用貝氏定理計算機率問題時時, 通常爲一個複雜的過程, 此時可透過樹狀圖來幫助我們了解所有可能發生情形, 以下爲一貝氏定理與樹狀圖結合應用的例子。

例 25. (1994 AMC 12 #27) 有一袋爆米花, 其中白米佔 $\frac{2}{3}$, 黃米佔 $\frac{1}{3}$。只有 $\frac{1}{2}$ 的白米及 $\frac{2}{3}$ 的黃米會爆開, 若隨機從袋中挑選出一粒米, 並將它放入鍋中加熱且後來爆開了, 試問挑選出來的米爲白米的機率爲多少?

(A) $\dfrac{1}{2}$　**(B)** $\dfrac{5}{9}$　**(C)** $\dfrac{4}{7}$　**(D)** $\dfrac{3}{5}$　**(E)** $\dfrac{2}{3}$

解:(D) 利用樹狀圖說明如下



由貝氏定理可得

$$P(\text{白米} \mid \text{爆開}) = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \qquad \square$$

—本文作者於投稿時洪偉誠是國立中山大學應用數學系碩士班畢業生; 李俊賢、蔡誠祐、何家興是國立中山大學應用數學系大四學生, 張福春任教國立中山大學應用數學系—