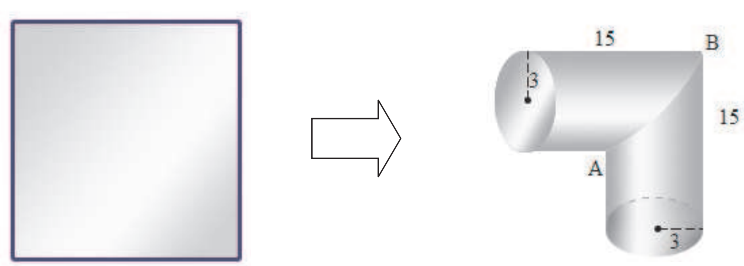
數學傳播　35卷4期, pp. 52-61

# 試論圓錐面平面截口的展開

周國定

**問題的提出**: 關於圓錐曲線, 一般我們會設計如下的一道實習作業:

煙囪彎頭是由兩個圓柱形的煙筒焊在一起做成的, 現在要用矩形鐵片做成一個直角煙囪彎頭 (如下圖, 單位: cm), 不考慮焊接處的需要, 選用的矩形鐵片至少應滿足怎樣的尺寸? 請你設計出一個最合理的裁剪方案。(在矩形鐵片上畫出的裁剪線應是什麼圖形? )




筆者感興趣的是下面的引申問題: 如果將直角煙囪彎頭一端的圓柱面改為圓錐面 (如圖 3), 則如何在矩形鐵片和扇形鐵片上設計合理的裁剪方案?

為了解決這一問題, 需將圓錐曲線與其母體——錐面、生成平面——結合起來考慮, 並研究:

(1) '截口' 曲線離心率與生成平面傾斜角之間的關係;

(2) '截口' 曲線在錐面展開圖中的曲線。

## 一、基本引理

設對頂錐面的頂點為 $O$, 軸截面頂角為 $2\beta$ $(0<\beta<\dfrac{\pi}{2})$, 過頂點 $O$ 且垂直於錐面軸的平面記為 $\Pi_0$ (如圖 1), 任作對頂錐面的截面 $\Pi_1$ ($\Pi_1$ 與 $\Pi_0$ 不平行, 且 $O\notin\Pi_1$), $\Pi_1\cap\Pi_0=l$,

$\Pi_1$ 與錐面交成的 '截口' 曲線記爲 $C \cup C_*$ (其中 $C$ 爲截口曲線在平面 $\Pi_0$ 上方的部份, $C_*$ 爲在平面 $\Pi_0$ 下方的部份), 由對頂錐面關於 $\Pi_0$ 對稱性, 不妨假設 $C$ 始終不爲空集合, 而 $C_*$ 則可以爲空集合。

設頂點 $O$ 到 $\Pi_1$ 的距離爲 $h$ $(h>0)$, 平面 $\Pi_1$ 向上方向的法向量與 $Z$ 軸的正半軸所成的角爲 $\alpha$ $(0<\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$, 稱 $\alpha$ 爲平面 $\Pi_1$ 的傾斜角)。建立如圖 1 所示的空間直角座標系, 其中, $OX//l$。

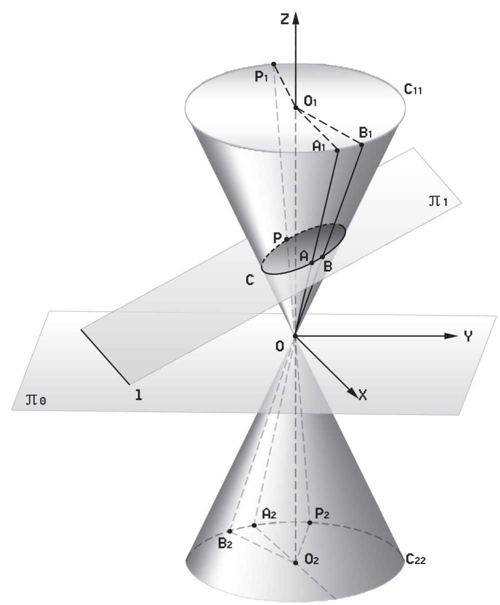


圖 1

直接計算易得, 平面 $\Pi_1$ 的方程:

$y\sin\alpha - z\cos\alpha + h = 0$

設 $P(x,y,z)$ 是三維空間 $O-XYZ$ 內的任一點, 定義點 $P$ 的球面座標如下:

設 $P$ 在平面 $XOY$ 內的投影爲 $P'$, 以 $OX$ 軸的正半軸爲始邊, 射線 $OP'$ 爲終邊的角記爲 $\varphi$ $(-3\pi\le\varphi\le 2\pi)$, 射線 $OP$ 與 $Z$ 軸正半軸的夾角記爲 $\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$, $|OP|=\rho$ $(\rho\ge 0)$, 則點 $P$ 的球面座標定義爲 $(\rho,\varphi,\theta)$。

大家熟知, 空間任一點的直角座標與球面座標有如下關係:

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \quad (\rho\ge 0,\ \ -3\pi\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi) \\ z=\rho\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

**引理**1: '截口' 曲線 $C\cup C_*$ 的直角座標方程:

$$C:\begin{cases} x=\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\cos\varphi \\ y=\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\sin\varphi\ (\varphi \text{ 爲參數}, \sin\varphi<\cot\alpha\cot\beta) \\ z=\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos\beta \end{cases}$$

$$C_*:\begin{cases} x=-\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\cos\varphi \\ y=-\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\sin\varphi\ (\varphi \text{ 爲參數}, \sin\varphi<-\cot\alpha\cot\beta) \\ z=-\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos\beta \end{cases}$$

**證明**: 平面 $\Pi_1$ 的直角座標方程: $y\sin\alpha - z\cos\alpha + h = 0$。由式 (1), $\Pi_1$ 的球面座標方程: $\rho\sin\theta\sin\varphi\sin\alpha - \rho\cos\theta\cos\alpha + h = 0$。

$\because$ 對頂錐面的軸截面頂角爲 $2\beta$, $\therefore$ 錐面的球面座標方程爲: $\theta = \beta$ 或 $\theta = \pi - \beta$。$\therefore$ '截口' 曲線 $C \cup C_*$ 的球面座標方程爲:

$$C: \begin{cases} \theta = \beta \\ \rho\sin\theta\sin\varphi\sin\alpha - \rho\cos\theta\cos\alpha + h = 0 \end{cases}$$
$$C_*: \begin{cases} \theta = \pi - \beta \\ \rho\sin\theta\sin\varphi\sin\alpha - \rho\cos\theta\cos\alpha + h = 0 \end{cases}$$

即 $C: \begin{cases} \theta = \beta \\ \rho = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi} \end{cases}$, $C_*: \begin{cases} \theta = \pi - \beta \\ \rho = -\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi} \end{cases}$

$\because$ $\rho > 0$, $\therefore$ 相對於曲線 $C$, $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi > 0$, 即

$$\sin\varphi < \cot\alpha\cot\beta \tag{2}$$

相對於曲線 $C_*$, $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi < 0$, 即

$$\sin\varphi < -\cot\alpha\cot\beta \tag{3}$$

由球面座標與直角座標的轉換公式 (1), 得到 '截口' 曲線 $C \cup C_*$ 的直角座標方程:

$$C: \begin{cases} x = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\cos\varphi \\ y = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\sin\varphi & (\varphi \text{ 爲參數}, \sin\varphi < \cot\alpha\cot\beta) \\ z = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos\beta \end{cases}$$
$$C_*: \begin{cases} x = -\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\cos\varphi \\ y = -\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\sin\varphi & (\varphi \text{ 爲參數}, \sin\varphi < -\cot\alpha\cot\beta) \\ z = -\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos\beta \end{cases}$$

(1) '截口' 曲線 $C \cup C_*$ 爲橢圓或拋物線

$\because$ $\alpha + \beta \le \dfrac{\pi}{2}$, $\therefore$ $\cot\alpha\cot\beta \ge 1$, $\therefore$ 式 (2) 有解, 式 (3)無解。

$\therefore$ $C_* = \varnothing$, 即 $C \cup C_* = C$。

(2) '截口'曲線 $C \cup C_*$ 爲雙曲線

$\because \dfrac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$, $\therefore 0 \le \cot\alpha\cot\beta < 1$, $\therefore$ 式 (2), 式 (3) 均有解。

$\therefore$ 曲線 $C$、$C_*$ 分別表示雙曲線的一支。 $\square$

**引理** 2: '截口' 曲線 $C \cup C_*$ 在 $\Pi_0$ 內的正投影曲線 $C'' \cup C''_*$ 是圓錐曲線或直線。

**證明**: 由引理 1, 曲線 $C$ 在 $\Pi_0$ 內的正投影方程爲:

$$\begin{cases} x = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\cos\varphi & (4) \\ y = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin\beta\sin\varphi & (5) \\ z = 0 \end{cases}$$

由 (5) 得:

$$\sin\varphi = \frac{y\cos\alpha\cos\beta}{(h + y\sin\alpha)\sin\beta} \tag{6}$$

由 (4)÷(5) 得: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, 即

$$\cos\varphi = \frac{x\sin\varphi}{y} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{(h + y\sin\alpha)\sin\beta} \tag{7}$$

$(6)^2 + (7)^2$ 並化簡得: $(x^2 + y^2)\cos^2\alpha\cos^2\beta = \sin^2\beta(y\sin\alpha + h)^2$, 即

$$x^2\cos^2\alpha\cos^2\beta + y^2(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) - 2hy\sin\alpha\sin^2\beta - h^2\sin^2\beta = 0 \tag{8}$$

同理, 曲線 $C_*$ 在平面 $\Pi_0$ 內的正投影 $C''_*$ 的方程也爲方程 (8)。

我們分三種情況討論

**情況** 1: $\alpha + \beta < \dfrac{\pi}{2}$

此時, 曲線 $C \cup C_* = C$ 爲橢圓。$\because$ $\cos^2\alpha\cos^2\beta \neq \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta$ 且 $\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) > 0$, $\therefore$ 方程 (8) 表示橢圓, 即 $C''$ 是橢圓。

**情況** 2: $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

此時, 曲線 $C \cup C_* = C$ 爲拋物線。方程 (8) 可化爲 $x^2\sin^2\alpha = 2hy\sin\alpha + h^2$, $C''$ 是拋物線。

**情況** 3: $\dfrac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$

此時, 曲線 $C\cup C_*$ 爲雙曲線。若 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, 則方程 (8) 可化爲 $y=-h$, $\therefore C''\cup C''_*$ 是直線; 否則由 $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)<0$ 知, 方程 (8) 表示雙曲線, 即 $C''\cup C''_*$ 是雙曲線。 □

## 二、本文主要結論

**定理**1: '截口' 曲線 $C\cup C_*$ 的離心率 $e=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}$。

**證明**: 分兩種情況討論

**情況**1: 曲線 $C\cup C_*=C$ 爲拋物線, 此時 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}=1=e$。

**情況**2: 曲線 $C\cup C_*$ 爲橢圓或雙曲線

我們僅考慮 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 的情況, 對於 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 的情況, 可由 $C\cup C_*$ 的方程直接驗證, 從略。

設曲線 $C\cup C_*$ 的長軸 (實軸) 長爲 $2a$, 短軸 (虛軸) 長爲 $2b$, 曲線 $C\cup C_*$ 在 $\Pi_0$ 內的正投影 $C''\cup C''_*$ 在 $Y$ 軸上的軸長爲 $2m$, 平行於 $X$ 軸的軸長爲 $2n$。顯然, $2a=\dfrac{2m}{\cos\alpha}$, $2b=2n$。由引理2中的方程 (8) 得:

$$
\begin{aligned}
C''\cup C''_*:\ &\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{h^2\sin^2\beta}x^2\\
&+\frac{(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)^2}{h^2\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\Big(y-\frac{h\sin\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}\Big)^2=1
\end{aligned}
$$

(1) $C\cup C_*=C$ 爲橢圓, 即 $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
&\because\ m^2=\frac{h^2\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}{(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)^2},\quad n^2=\frac{h^2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta},\\
&\therefore\ e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{n^2}{m^2}\cos^2\alpha=1-(1-\tan^2\alpha\tan^2\beta)\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta},\\
&\text{即}\ \ e=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}。
\end{aligned}
$$

(2) $C\cup C_*$ 爲雙曲線, 即 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ 且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$

$$\because\ m^2=\frac{h^2\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}{(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)^2},\quad n^2=-\frac{h^2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta},$$

$$\therefore\ e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{n^2}{m^2}\cos^2\alpha=1+(\tan^2\alpha\tan^2\beta-1)\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\beta},$$

即 $e=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}$。 □

在圖1中, 設 $O_1$、$O_2$ 爲錐面的軸 $OZ$ 上的任兩點 (分別在平面 $\Pi_0$ 的上下方), 分別過 $O_1$、$O_2$ 且平行於 $\Pi_0$ 的平面與錐面的交線記爲 $C_{11}$、$C_{22}$, 平面 $XOZ$ 與錐面的交線 $OA_1$ 與圓周 $C_{11}$、$C_{22}$ 分別相交於 $A_1$、$A_2$。錐面的一條母線 $OB_1:\begin{cases}\varphi=\varphi_0\\ \theta=\beta\end{cases}$ $\left(OB_2:\begin{cases}\varphi=\pi+\varphi_0\\ \theta=\pi-\beta\end{cases}\right)$ $(0<\varphi_0\leq 2\pi)$ 與圓周 $C_{11}$、$C_{22}$ 分別交於 $B_1$、$B_2$, 與‘截口’曲線 $C\cup C_*$ 交於點 $B$。

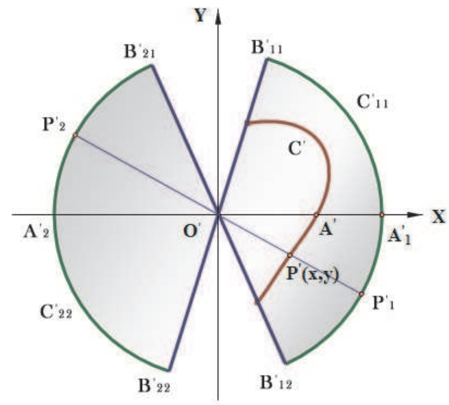
將對頂錐面沿母線 $OB_1(OB_2)$ 剪開並展開成平面 (如圖2, 利用幾何畫板繪製圖2時, $\beta$ 取值爲 $0.39426(rad)$。當 $\beta$ 較大時, ‘截口’曲線 $C\cup C_*$ 不可能在半平面上展開), 展平後, 對應的點或曲線用加 ‘$'$’ 的方法重新標記。如: 錐面的頂點 $O$ 在錐面展平後的對應點記爲 $O'$, ‘截口’曲線 $C\cup C_*$ 在錐面展平後的對應曲線記爲 $C'\cup C'_*$ 等。點 $B_1$ 變爲點 $B'_{11}$、$B'_{12}$, 點 $B_2$ 變爲點 $B'_{21}$、$B'_{22}$。有向弧 $\overparen{A'_1B'_{11}}$ 與 $\overparen{A'_1B'_{12}}$ 分別對應 $A_1$ 到 $B_1$ 的逆時針弧和 $A_1$ 到 $B_1$ 的順時針弧, 有向弧 $\overparen{A'_2B'_{22}}$ 與 $\overparen{A'_2B'_{21}}$ 分別對應 $A_2$ 到 $B_2$ 的逆時針弧和 $A_2$ 到 $B_2$ 的順時針弧。以 $O'$ 爲座標原點, 射線 $O'A'_1$ 爲 $X$ 軸的正半軸, 建立如圖 2 所示的直角座標系。

**定理** 2: 平面 $\Pi_0$ 上方的 ‘截口’ 曲線 $C$ 按母線 $OB_1$ 展平後的曲線 $C'$ 的方程爲:

$$\begin{cases}x=\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos(\varphi\sin\beta)\\ y=\dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin(\varphi\sin\beta)\end{cases}$$
$$(\varphi\ 爲參數,\ \phi_0-2\pi\leq\varphi\leq\varphi_0,\ \sin\varphi<\cot\alpha\cot\beta)$$

**證明**: 設 $P(\rho,\varphi,\theta)$ 爲曲線 $C$ 上的任一點, 直線 $OP\bigcap C_{11}=P_1$, 則 $\angle A_1O_1P_1=\varphi$。當 $P_1$ 在 $A_1$ 到 $B_1$ 的逆時針弧上時, 規定 $0\leq\varphi\leq\varphi_0$, 此時, 有向弧 $\overparen{A_1P_1}=|O_1A_1|\cdot\varphi$ 爲正; 當 $P_1$ 在 $A_1$ 到 $B_1$ 的順時針弧上時, 規定 $\varphi_0-2\pi\leq\varphi<0$, 此時, 有向弧 $\overparen{A_1P_1}=|O_1A_1|\cdot\varphi$ 爲負。在 $Rt\triangle OA_1O_1$ 中, $|O_1A_1|=|OA_1|\sin\beta$ (圖1), 所以, 有向弧 $\overparen{A_1P_1}=|O_1A_1|\cdot\varphi=|OA_1|\sin\beta\cdot\varphi$。

顯然, 對頂錐面展平前後, 有向弧 $\overset{\frown}{A_1'P_1'}$ = 有向弧 $\overset{\frown}{A_1P_1}$, $O'P' = OP = \rho$, $|O'A_1'| = |OA_1|$, 所以 $\angle A_1'O'P_1'$ = 有向弧 $\overset{\frown}{A_1'P_1'} \div |O'A_1'|$ = 有向弧 $\overset{\frown}{A_1P_1} \div |OA_1| = (|OA_1|\sin\beta\cdot\varphi)\div|OA_1| = \sin\beta\cdot\varphi$, $O'P' = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}$。




$B_{11}'B_{22}' : y = x\tan(\varphi_0\sin\beta)$,

$B_{21}'B_{12}' : y = x\tan((\varphi_0-2\pi)\sin\beta)$

圖 2

設 $P'(x,y)$, 則 $\begin{cases} x = O'P'\cos\angle A_1'O'P_1' \\ y = O'P'\sin\angle A_1'O'P_1' \end{cases}$,

即 $C' : \begin{cases} x = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos(\varphi\sin\beta) \\ y = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin(\varphi\sin\beta) \end{cases}$ ($\varphi$ 爲參數, $\varphi_0-2\pi\le\varphi\le\varphi_0$, $\sin\varphi<\cot\alpha\cot\beta$)。 □

與定理2的證明完全類似, 可證明下面的定理3。

**定理**3: 平面 $\Pi_0$ 下方的 '截口' 曲線 $C_*$ 按母線 $OB_2$ 展平後的曲線 $C_*'$ 的方程爲:

(1) 當 $0<\varphi_0<\pi-\arcsin(\cot\alpha\cot\beta)$ 時

$$C_*' : \begin{cases} x = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos((\varphi+\pi)\sin\beta) \\ y = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin((\varphi+\pi)\sin\beta) \end{cases}$$

($\varphi$ 爲參數, $\max\{-3\pi+\varphi_0, -3\pi+\arcsin(\cot\alpha\cot\beta)\}\le\varphi\le-2\pi-\arcsin(\cot\alpha\cot\beta)$)

(2) 當 $\arcsin(\cot\alpha\cot\beta)<\varphi_0\le2\pi$ 時

$$C_*' : \begin{cases} x = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\cos((\varphi-\pi)\sin\beta) \\ y = \dfrac{h}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi}\sin((\varphi-\pi)\sin\beta) \end{cases}$$

($\varphi$ 爲參數, $\pi+\arcsin(\cot\alpha\cot\beta)\le\varphi\le\min\{\pi+\varphi_0, 2\pi-\arcsin(\cot\alpha\cot\beta)\}$)

## 三、引申問題的解決

**問題**: 如圖 3 所示的直角煙囪彎頭是由一個半徑爲 $R$ 的圓柱面和一個頂角爲 $2\beta$ 的圓錐面焊接在一起做成的, 其中 $\angle O_1OO_2 = \dfrac{\pi}{2}$。試確定煙囪彎頭的 '截口' 曲線 $C$ 分別在錐面和柱面的展開圖中的裁剪線。

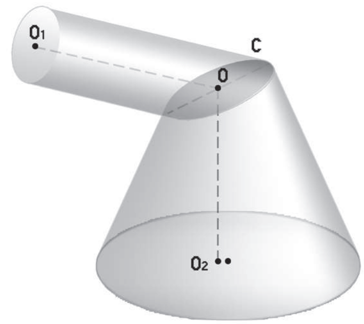



圖 3

(1) 先給出一個引理

**引理**3: 作與圓柱底面成角 $\gamma$ $(0 < \gamma < \dfrac{\pi}{2})$ 的截面 $\Pi$, $\Pi$ 與柱面交線記爲 $C$。設圓柱的底面半徑爲 $R$, 底面圓心 $O$ 到 $\Pi$ 的距離爲 $h$, 不失一般性, 假設 $h = R\sin\gamma$。記 $C_1'$ 爲 $C$ 在柱面展平後的曲線, 則

(i) 曲線 $C$ 的長軸長 $2a = \dfrac{2R}{\cos\gamma}$, 離心率 $e = \sin\gamma$;

(ii) 可通過建立適當的直角座標系, 使 $C_1'$ 的方程爲:

$$y = R\tan\gamma(\sin\frac{x}{R} + 1) \quad (0 \le x \le 2\pi R) \quad (1)'$$

**證明**: (i) 的結論顯然, 我們只證明 (ii)。

設截面 $\Pi$ 與圓柱底面所在的平面的交線爲 $l$, 建立如圖 4 所示的空間直角座標系, 其中, $OX$ 軸 $//l$。易知, 截面 $\Pi$: $y\sin\gamma - z\cos\gamma + R\sin\gamma = 0$, 柱面方程爲: $x^2 + y^2 = R^2$,

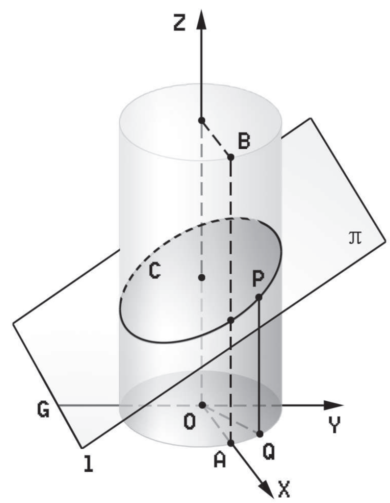



圖 4

$\therefore$ 曲線 $C$ 的方程爲:

$$\begin{cases} y\sin\gamma - z\cos\gamma + R\sin\gamma = 0 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

設 $P(x, y, z)$ 爲曲線 $C$ 上的任一點, 過 $P$ 作 $PQ \perp$ 底面, 交底面圓周於 $Q$, $OX$ 軸交底面圓周於 $A$。設 $\angle AOQ = \varphi (0 \le \varphi \le 2\pi)$, 則曲線 $C$ 的方程可簡化爲 $R\sin\varphi\sin\gamma - z\cos\gamma + R\sin\gamma = 0$, 即 $z = \dfrac{R\sin\gamma\sin\varphi + R\sin\gamma}{\cos\gamma}$,

$\therefore QP = \dfrac{R\sin\gamma\sin\varphi + R\sin\gamma}{\cos\gamma}$。

將柱面沿母線 $AB$ 剪開並展開成平面。展平後, 設點 $A$ 變爲點 $A_1$、$A_2$, 點 $B$ 變爲點 $B_1$、$B_2$, 點 $P$ 變爲點 $P_1$, 點 $Q$ 變爲點 $Q_1$, 曲線 $C$ 變爲 $C_1'$ (圖5)。顯然, $A_1Q_1 = \overset{\frown}{AQ} = R\varphi$, $Q_1P_1 = QP$。建立如圖5所示的直角座標系, 設 $P_1(x,y)$, 則曲線 $C_1'$ 的方程爲:

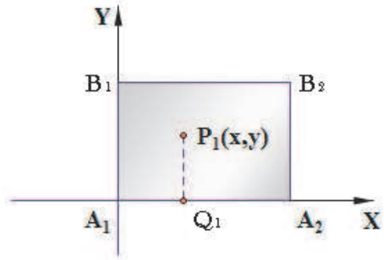



圖 5

$$\begin{cases} x = R\cdot\varphi \\ y = \dfrac{R\sin\gamma\sin\varphi + R\sin\gamma}{\cos\gamma} \end{cases}, \text{即 } y = R\tan\gamma(\sin\frac{x}{R}+1)\quad (0\le x\le 2\pi R) \qquad \square$$

(2) 求裁剪線方程

在圖3中, 設 '截口' 曲線 $C$ 所在平面與圓錐的底面成角 $\alpha$ 與圓柱的底面成角 $\gamma$, 圓錐頂點到曲線 $C$ 所在平面的距離爲 $h$, $C$ 的離心率爲 $e$, 長軸長爲 $2a$, 則由定理1和引理3(i) 得:

(I) $e=\sin\gamma,\ e=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}$;

(II) $2a=\dfrac{2R}{\cos\gamma},\ 2a=\dfrac{2m}{\cos\alpha}=\dfrac{2h\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$。

$\because\ \angle O_1OO_2=\dfrac{\pi}{2}$ (圖3), $\therefore (\dfrac{\pi}{2}-\gamma)+(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$。

由 (I), $\sin\gamma=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta}$,

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta},\ \text{即}\ \tan\alpha=\cos\beta \tag{2$'$}$$

由 (II), $\dfrac{2R}{\cos\gamma}=\dfrac{2h\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$, 即 $\dfrac{R}{\sin\alpha}=\dfrac{h\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad h &= \frac{R(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}\\ &= \frac{R(\cos^2\alpha\tan^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta)}{\sin\alpha\sin\beta\cos\beta}\\ &= R\sin\alpha\cot\beta \end{aligned}\tag{3$'$}$$

將 $(3)'$ 代入定理 2 中 $C'$ 的方程, 並取 $\varphi_0=2\pi$ 得:

$$C':\begin{cases} x=\dfrac{R\cot\beta}{1-\sin\beta\sin\varphi}\cos(\varphi\cdot\sin\beta)\\ y=\dfrac{R\cot\beta}{1-\sin\beta\sin\varphi}\sin(\varphi\cdot\sin\beta)\end{cases}\quad(\varphi\text{爲參數},\ 0\le\varphi\le 2\pi) \tag{4$'$}$$

由 (2)′, 引理 3(ii) 中的方程 (1)′ 可變爲

$$C_1' : y = \frac{R}{\cos\beta}(\sin\frac{x}{R} + 1) \quad (0 \le x \le 2\pi R) \tag{5$'$}$$

(3) 畫出裁剪線

用〈幾何畫板〉分別在頂角爲 $2\pi\sin\beta$ 的扇形 $A_1OB_1$ (假設扇形的半徑足夠長) 上畫出方程 (4)′ 的曲線 $C'$ 和長爲 $2\pi R$ 的矩形 $CC_1D_1D$ (假設矩形的寬足夠長) 上畫出方程 (5)′ 的曲線 $C_1'$, 則曲線 $C'$ 和 $C_1'$ 即爲裁剪線。圖6和圖7分別畫出了當參數 $R = 1.24874$, $\beta = 0.31164$(rad) 時的裁剪線。

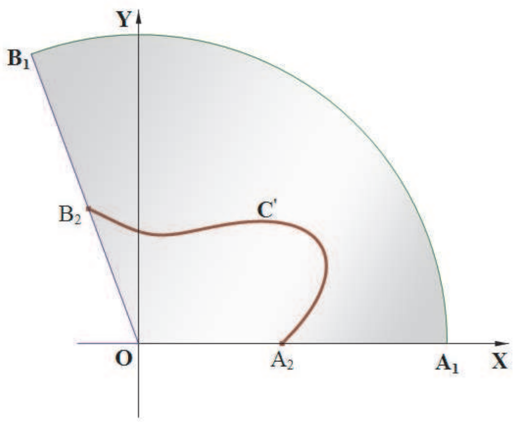



圖 6

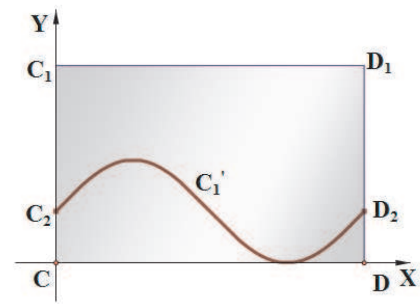



圖 7

筆者由圖 6 和圖 7 做出了如圖 4 的煙囱彎頭模型, 從而從操作層面上也證實了本文各個結論的可靠性。

## 參考文獻

1. M·克萊因著,《古今數學思想》(I), 中譯本 上海科學技術出版社, 2002。
2. 阿波羅尼斯《圓錐曲線論》朱恩科譯, 陝西科學技術出版社, 陝西, 2007, 12。
3. 科克肖克等著《圓錐曲線的幾何性質》蔣聲譯, 上海教育出版社, 上海, 2002, 11。

—本文作者任教江蘇省揚州中學—