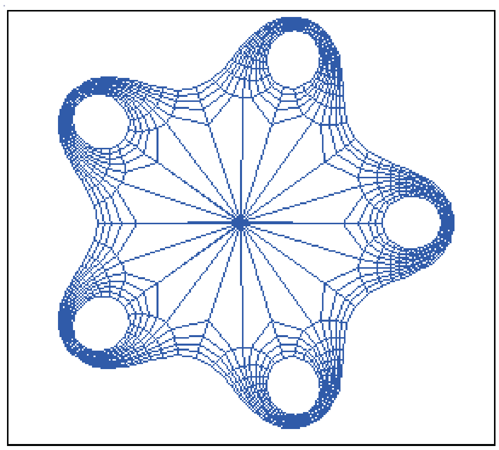
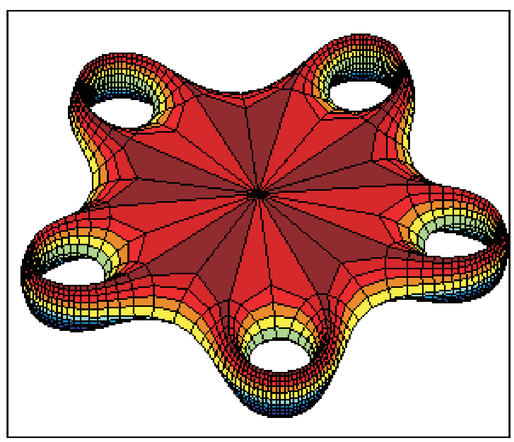
數學傳播 35卷3期, pp. 46-49

梨園數字

平斯

傳統戲的一齣“五花洞”，在戲台上有五對一模一樣的武大郎與潘金蓮, 當然其中只有一對是眞的, 其他都是妖怪變來戲弄本尊的分身, 全部戲就是一場眞假認同錯亂的胡鬧。將幾何圖形描繪在畫面上時, 觀念上好比演一齣戲：畫面提供一個舞台，圖形則是粉墨登場的演員, 以參數式當作劇本來扮演角色。演員的台詞與走位, 全依照劇本的需要, 這樣呈現的叫拉格朗日 (Lagrange) 式。下例劇本中, 有個參數座標 (u,v) 是描寫虧格五的對稱平面域。以五階雙紐線參數式 [註一] $(x+iy)^5-1=ue^{iv}$, 畫出平面圖。再加上適當高度 $z=\varepsilon-|1-u|$ 畫出立體圖。實際演出的演員是畫面座標 (p,q) 與上述空間的座標 (x,y,z) 之間, 由軸測投影關係式 $p=y-\alpha x$, $q=z-\beta x$ 相聯繫。





另外還有一種熱鬧的武打戲：旌旗蔽空, 帥字旗揮舞滿舞台的每個角落, 鑼鈸喧天, 鼓點子逼人屛息, 等到聲色稍歇, 定眼一瞧兩張花臉, 才知原來是張飛戰岳飛, 難怪滿天飛。繪圖的武打方式叫歐拉 (Euler) 式，這時畫面上的每一畫素都積極參與演出, 若非領銜, 起碼也是客串主角, 受到同樣的關注, 要等到最後劇終謝幕, 才知道究竟誰擔綱主角, 誰跑龍套。這齣荒謬劇

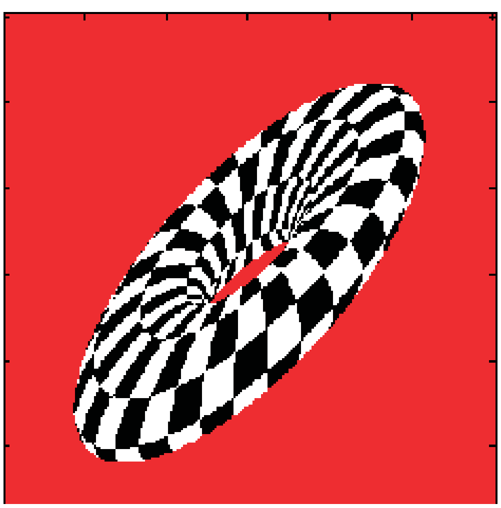
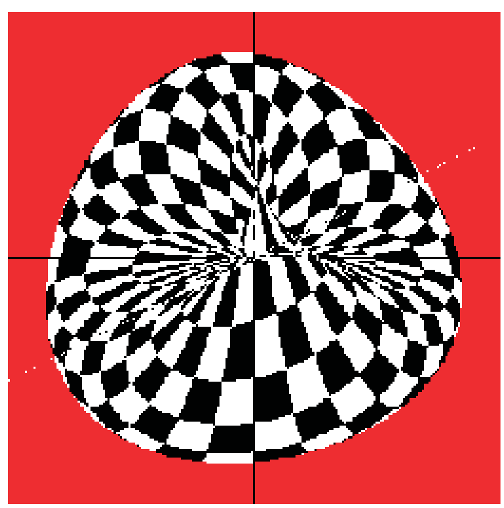
裡, 曲面由隱函數定義, 先指定畫面上的座標 (p, q), 之後固定 x, 由軸測投影關係式分別解得 $y = p + x$, $z = q + x$, 代入曲面的定義式裡, 可得座標 x 的一個方程式。若 x 無實數解時 (p, q) 是背景點, 若有實數解時, 取最大值當可見點, 其餘是隱匿點。因此最簡單的球面須要求解二次方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

如法炮製, 四次曲面可得環面

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

與羅曼面

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz$$

解四次式的方法由法拉利 (Ferrari, L) 導出, 求解過程裡得用叫做卡爾達諾法的三次式解法, 這其中卻有樁很具爭議性的傳奇故事 [註二]。

古希臘的時候, 托勒密王 (Ptolemy 367-285 B.C.) 曾經是亞歷山大麾下驍將, 苦心經營埃及, 爲了加入希臘雅典元素, 甚至不惜重金, 延攬歐基理得(Euclid) , 他問 "除了研讀幾何原本之外是否有學習幾何的捷徑呢?" 面對金主歐基理得大義凜然的回答說 : "沒有通往幾何的皇家大道"。一個徒弟方纔學會第一條幾何命題, 歐基理得就喊說: "來人啊, 拿三個銅板打賞他"。近代的行爲學派可能認爲這是加強正面, 鼓勵積極的典範。其實歐基理得是意在反諷, 這徒弟覬覦著學幾何能帶來甚麼實質的報償。自此以來數學家做的事業無非親身力行, 貧賤不移, 威武不屈, 每個人的成就點滴在心頭, 所謂 "文章千古事, 得失寸心知"。文藝復興時代的塔爾塔利亞 (Tartaglia, N 1499-1557) 因與人賭賽解題, 漏夜思索而得三次式的解法, 卻被卡爾達諾 (Cardano, G 1501-1576) 違背誓言, 發表成以他爲名的公式。讓他做了後代抄襲剽竊, 盜名欺世之輩的祖師爺, 因此歷史上要記上這一筆, 而且做老師的必定總要在課堂提這件公案。目的不在臧否古人, 而是以爲來者戒。

多項式方程式是變數的乘冪作和, 乘冪的逆運算是開方, 因此解這種方程式自然用開方, 甚至若干回不同冪次的開方, 通常叫作根式。五次及更高次的方程式, 一般不再能用根式求解。並非數學家努力不夠或是智力不及 , 而是理論上完全不可能 , 這是加羅瓦 (Galois, E 1811-1832) 理論的一項應用。

然而無根式解並非沒有公式解, 普遍一個多項式方程式, 若是沒有重根, 則可用模函數求解。梅村坦(Hiroshi Umemura) 列出了一個完整的公式 [註三]。其實這樣的模函數相當複雜而看不出實用的價值, 比方在夜市裡吃碗麵, 明明老闆吆喝每碗七十元, 但標價卻是五千開平方。兩者差別不大, 連吃十碗才差七個銅板。這如果不是生意人的商業噱頭就肯定是學術菁英的理論傲慢。以實用面來看, 即使有一個模函數公式, 往往要另外再開發這模函數的演算法, 否則這只是用一個更困難問題來取代原來的問題。因此眞正想解決難題, 必須要另闢蹊徑。

數值計算不乏各式各樣求解的演算法, 然而用線性代數的古老方法亦可輕易求解。若五次式寫做 $x^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ 則

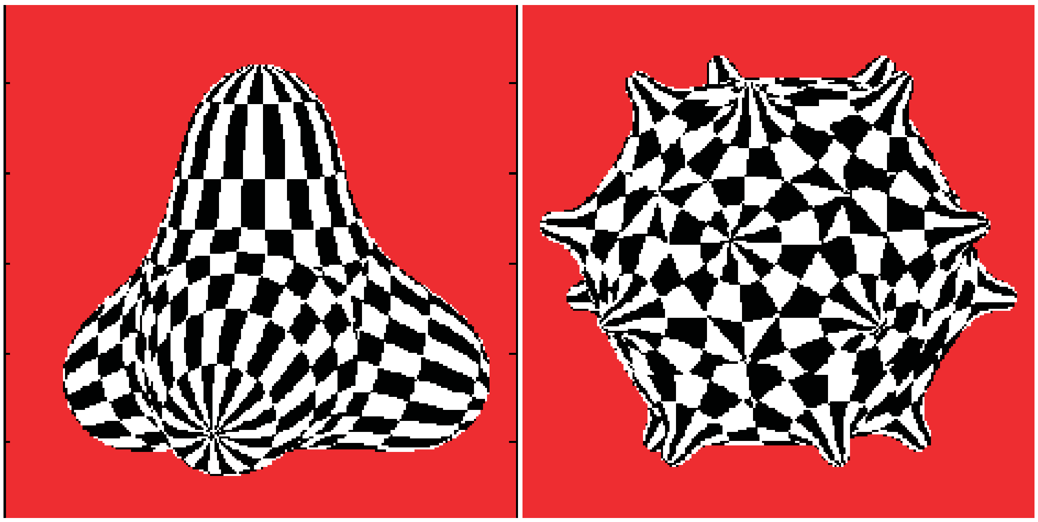
$$x\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\\x^3\\x^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a_0&a_1&a_2&a_3&a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\x^2\\x^3\\x^4\end{bmatrix}$$

此處的矩陣叫伴隨矩陣, 其特徵多項式正好是原式。因此問題就變成矩陣的特徵值問題, 其解法不是用公式而是迭代的演算法。而且不論幾次式 , 全部的根一次到位, 最重要的是很快就能

達到一定精確程度, 以滿足繪圖解析度的需要。於是再度利用雙紐線的概念： 與 $S=\{P_i=(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\mid 1\le i\le N\}$ 諸點距離平方的總乘積當定義式

$$\prod_i[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2+(z-\zeta_i)^2]=a,$$

當 S 是正四面體的四個頂點構成的集合時, 可畫出八次曲面。這是在堤壩旁常看到的消波塊。而當 S 包含正十二面體的二十個頂點時, 畫出四十次曲面, 這是叫蒺藜火的古代兵器。



[註一] Nahari, *Z Conformal Mapping*, 第272頁。

[註二] Van der Waerden, *B L A History of Algebra*, 第54頁。

[註三] Mumford, *D Tata Lectures on Theta II*, 第3.261頁。

—本文作者任教東吳大學數學系—

中央研究院 — 民國100年院區開放活動

中央研究院自民國87年以來, 每年秋天皆舉辦院區開放參觀活動。數學研究所本年提供科普演講、闖關活動、益智遊戲、電影欣賞等活動, 與大家分享探索數學的樂趣。

開放日期：2011年10月22日 (星期六)

地　　點：台北市南港區研究院路二段128號 人文社會科學館3樓

詳細情形請查詢中研院網頁 http://www.sinica.edu.tw