數學傳播 35卷3期, pp. 39-45

在足球場遇上 Regiomontanus

黃衡之 · 潘建強

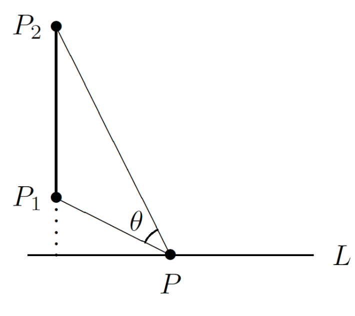
引言

本文旨在討論一個十分著名的幾何問題:Regiomontanus 問題及其在足球場上的應用。問題的解決與討論涉及圓、不等式及微積分等的數學概念, 相信能適合高中或以上的學生作爲數學解難活動與欣賞。

Regiomontanus 問題

在 1471 年, 數學家 Johann Müller 向當時 Erfurt 大學的 Christian Roder 教授提出了這樣的一道數學問題 (Dörrie, 1965):

給定一支垂直地懸掛在空中的竿, 問在平地上的哪一點這支竿看起來是最長的呢?

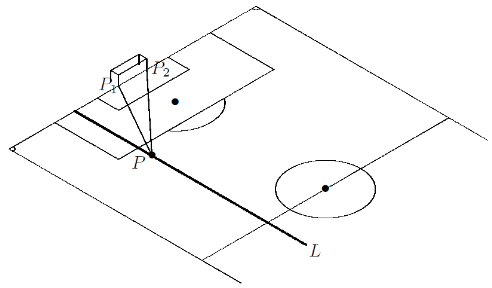


換言之, 已知 $P_1P_2 \perp L$ (其中 P_1 及 P_2 在 L 的同一邊), 求 L 上的一點 P 使得 $\theta = \angle P_1PP_2$ 爲最大的。

由於 Müller 出生在 Franconia 的 Königsberg, 故自號 Regio Monte。這個名字是德文 Königsberg 的拉丁文意譯, 於是後世便稱他爲 Regiomontanus。他提出的這道問題雖然面表上看起來很簡單, 但是卻有著特殊的意義, 因爲它是數學史上首個極值的問題 (Maor, 1998)。

Regiomontanus 問題是一個純數學的問題, 一些有趣的應用可參看 (Jones & Jackson, 2001)。2010 年是世界盃舉行的日子, 就讓我們把 Regiomontanus 問題轉化成一個足球射門

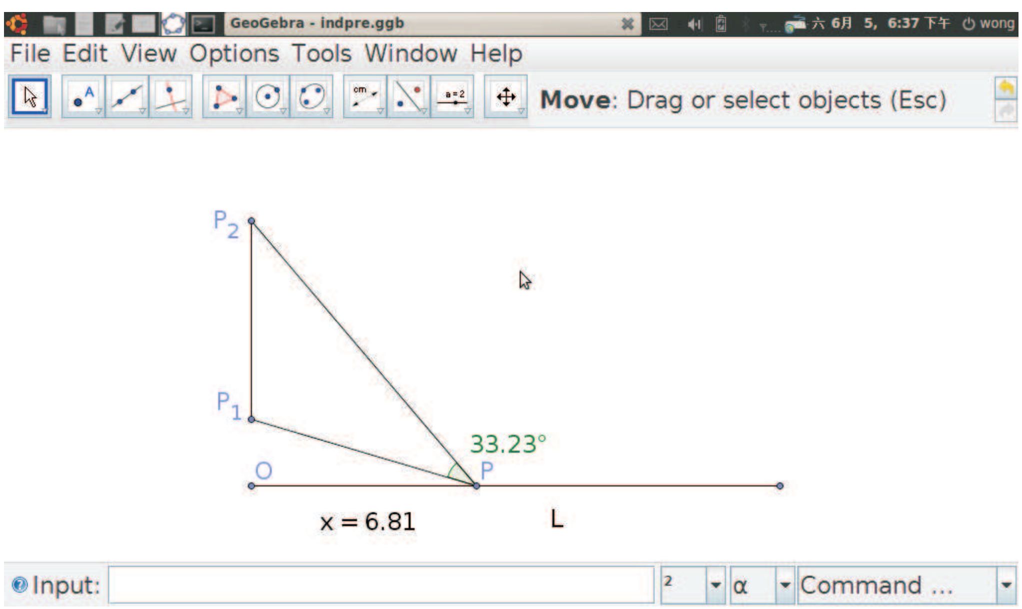
的問題。踢足球時, 我們通常都不會在中場直線推進, 而是從左路或右路進攻, 以避開對方的後衛。假設 P_1 及 P_2 是對方龍門的門柱, L 爲左 (右) 路進攻的路線。我們希望在 L 上找出一個「最佳的射門位置」P, 使得 P_1P_2 的張角 θ 爲最大的, 因爲 θ 越大, 射入的機會便越高 (假設沿直線射球)。



假若從老遠的地方遠射, 射入的機會是很微的; 同理, 若推至對方的底線才射門, 也注定不可能射入。直觀上, 我們會感受到在 L 上理應存在某點 P 可以使 θ 爲最大的。有經驗的足球教練就算沒有讀過數學, 多多少少也能憑感覺找到這個最佳的射門位置。但是, 我們能否運用數學, 準確地求得這點 P 呢?

初部了解問題

　　教師可以讓學生再透過互動幾何軟件 (例如 Sketchpad 或 Geogebra), 探究 Regiomontanus 問題。



圖中顯示以 Geogebra 作爲示範, 其中的 P 點可以在 L 上移動, 學生能在軟件中嘗試找出 P

點的位置使得 $\angle P_1PP_2$ 最大, 並量度 $OP = x$ 之距離, 其中 O 爲 P_1P_2 的延線與 L 的交點。有些軟件甚至可以繪畫出 θ 作爲 x 的函數圖像, 學生便能從圖像中找出近似值。

在過程當中, 教師可以透過提問啓發學生思考, 例如: 我們希望求得的未知量是什麼? (找出一點 P)。有什麼資料我們是知道的? (已知線段 P_1P_2 及直線 L)。有什麼條件? (條件是 $P_1P_2 \perp L$, 且 P 在 L 上使得 P_1P_2 的張角 θ 最大)。

解難過程計劃與實行

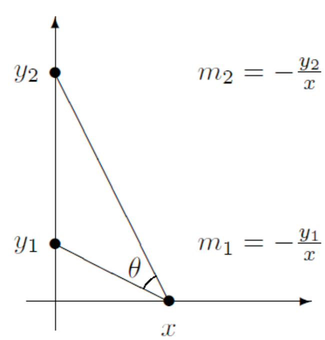
了解問題過後, 學生便能開始擬定計劃。教師在這時可以提問學生, 從前見過這類問題嗎? 是否認識一些相關的問題? 從而幫助學生理解問題的性質, 並想出對應的方法。Regiomontanus 問題是一個最大化的問題, 有什麼已知的結果與這類問題有有關呢? 學生大概會聯想到微積分或者配方法之類的計劃。若使用微積分, 我們要最大化的是哪一個變量? 這個變量會隨著什麼改變? 何時會達到最大值?

其後, 學生便可以將計劃實踐出來, 以下的解是運用微積分所得的。

引入直角坐標系統, 設 $P = (x, 0)$, $P_1 = (0, y_1)$ 及 $P_2 = (0, y_2)$。運用複角公式可知

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

由於正切函數在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 區間上是單調上升的, 我們希望知道 $\frac{d}{dx}(\tan\theta) = 0$ 何時會成立。



我們知道

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \frac{-y_1/x + y_2/x}{1 + (-y_1x)(-y_2x)} \\ &= \frac{x(y_2 - y_1)}{x^2 + y_1y_2}\end{aligned}$$

兩邊取其導數可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan\theta) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{x(y_2-y_1)}{x^2+y_1y_2}\Big)\\ &= (y_2-y_1)\cdot\frac{(x^2+y_1y_2)-x(2x)}{(x^2+y_1y_2)^2}\\ &= (y_2-y_1)\cdot\frac{y_1y_2-x^2}{(x^2+y_1y_2)^2}\end{aligned}$$

因此極點出現在 $y_1y_2-x^2=0$, 亦即 $x=\sqrt{y_1y_2}$ 時。因爲距離必須是非負, 故我們只取正平方根。換言之, 兩條門柱 P_1 和 P_2 與 L 的垂直距離的幾何平均數便是最佳的射門位置, Regiomontanus 問題得解決了!

回顧與探究

問題解決固然是高興的, 不過, 教師亦宜提問學生, 能否驗證結果? 能否以不同解法得出這結果? 這結果能應用到其他問題上嗎? 因爲, 我們總希望可以找出更好的解決方法, 或者運用這個結果解決其他問題。教師須培養學生這個力求進步的態度, 這有助學生在未來面對難題時能有更好的表現, 並建立解難者的自信。

要驗證結果並不難, 我們可以運用一階導數試驗 (first derivative test) 驗證 $x=\sqrt{y_1y_2}$ 時確是達到了最大值。當 $x<\sqrt{y_1y_2}$ 時 $\frac{d}{dx}(\tan\theta)>0$, 當 $x>\sqrt{y_1y_2}$ 時 $\frac{d}{dx}(\tan\theta)<0$, 且正切函數在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上連續, 因此以上的結果是正確的。

微積分實在是一個很強的工具, 最大化或最小化的問題很多時都會應用得到。但是, Regiomontanus 問題看起來如此的簡單, 是否眞的須要運用到這般強的結果? 有云「殺雞不用牛刀」, 我們能否避開微積分呢? 不用微積分的解法理應是存在的, 畢竟, 在 Regiomontanus 的時代, 微積分的始創人 Newton 和 Leibniz 好像還沒出世。那麼, 他是怎樣做到的呢?

讓我們回顧一下我們的結果。我們知道最佳的射門位置出現在兩條門柱與 L 的垂直距離的幾何平均數那裡, 有些什麼定理是與幾何平均數有關的呢? 學生很容易會想到算術幾何平均不等式, 亦即著名定柯西平均值定理 (Cauchy Mean Theorem)。這不等式的證明, 在 Dörrie (1965) 有論述, 在這裡我不會深入探討。

由於我們已經知道答案, 因此我們可以運用逆向思維 (Posamentier & Krulik, 1998), 嘗試找出中間的步驟。若眞的運用算術幾何平均不等式的話, 最後那一步會是怎樣呢? 那大概應該是知道了 $\tan\theta$ 的上界, 當且僅當 $x=\sqrt{y_1y_2}$ 時達到這個上界。

依循這個方向, 我們不難得到以下的解。

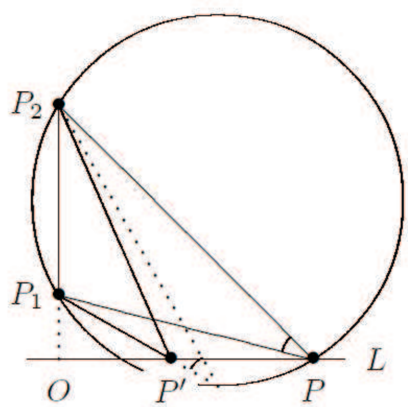
$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{x(y_2-y_1)}{x^2+y_1y_2} = \frac{x(y_2-y_1)}{2\cdot\frac{x^2+y_1y_2}{2}}\\ &\le \frac{x(y_2-y_1)}{2\sqrt{x^2y_1y_2}} = \frac{x(y_2-y_1)}{2x\sqrt{y_1y_2}}\\ &= \frac{y_2-y_1}{2\sqrt{y_1y_2}}\end{aligned}$$

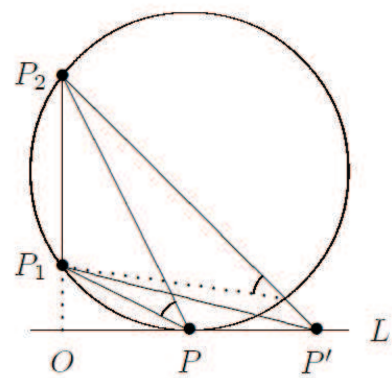
等式成立當且僅當 $x^2=y_1y_2$, 亦即 $x=\sqrt{y_1y_2}$。因此, 當 $x=\sqrt{y_1y_2}$ 時 $\tan\theta$ 確實達致最大值。

能夠避開微積分, 其實已經是很大的突破。不過, 算術幾何平均不等式對部份學生來說其實也是頗為艱深的, 有沒有更為直觀的方法呢? 答案是有的, 那是運用圓的性質, 以下的解是改編自 Pólya (1990b) 所提出的方法。

設 P 為 L 上的一點, 作 $\triangle PP_1P_2$ 的外接圓, 那只可能有以下兩個情況。

1. L 為圓的割線, 且 P 為其中一個交點
2. L 為圓的切線, 且 P 為唯一的交點



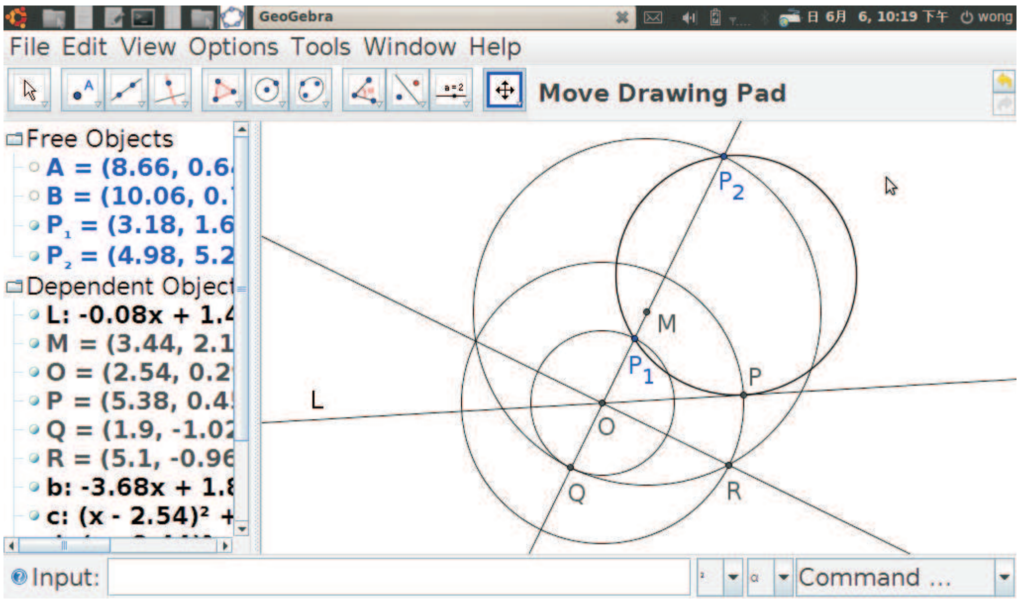


在情況 1. 中,L 與圓的兩個交點之間存在另一點 P'。運用同一弓形的圓周角及三角形外角大於內角, 可知 $\angle P_1P'P_2 > \angle P_1PP_2$。所以, 這點 P 並不是我們所須的點。

在情況 2. 中,L 與圓唯一的交點為 P。運用類似的方法, 我們不難證明對於 L 上所有其他的點 P' 均有 $\angle P_1PP_2 > \angle P_1P'P_2$, 因此 P 就是我們希望求得的那點。設 O 為 P_1P_2 的延線與 L 的交點, 則 $\triangle OPP_1 \sim \triangle OP_2P$, 故其三邊成比例 $\frac{OP}{OP_2}=\frac{PP_1}{P_2P}=\frac{OP_1}{OP}$。由此, 我們也能得到相同的結果 $OP^2=(OP_1)(OP_2)$。

因此,P 點使 θ 達致最大值, 當且僅當 $\triangle PP_1P_2$ 的外接圓與 L 相切於 P。這個方法的好處在於其並沒有利用到 $P_1P_2\perp L$ 這項條件, 因此, 能應用於較一般的情形。

此外, 我們亦能透過尺規作圖找出 P 點, 教師可鼓勵學生在互動幾何軟件中嘗試自己去作圖。$P_1P_2 \perp L$ 的情形簡單很多, 在 Dörrie (1965) 中有論及, 我們不再加以敘述了。在此只考慮一般的情形, 問題的關鍵在於構作 OP_1 及 OP_2 的幾何平均數。



圖中顯示以 Geogebra 作爲示範, 首先延長 P_1P_2 與 L 相交於 O。以 O 爲圓心,OP_1 爲半徑作圓, 並與 P_1P_2 的延線相交於 Q。然後, 作 P_2Q 的中點 M, 並以 M 爲圓心, MQ 爲半徑作圓。在 O 點作直線垂直於 P_1P_2, 與這個圓相交於 R (和另一個交點)。最後, 以 O 爲圓心, OR 爲半徑作圓, 與 L 的交點便是 P 了。由於 $OQ=OP_1$ 爲圓的半徑, 且 $\triangle OP_2R \sim \triangle ORQ$, 我們可以證明 $(OP_1)(OP_2)=OR^2$。由此可見 $OP=\sqrt{(OP_1)(OP_2)}$, 故 $\triangle PP_1P_2$ 的外接圓與 L 相切於 P。

總結

數學解難的確是很富挑戰性, 在這個有關 Regiomontanus 問題的教學設計中, 可以體現出一題多解, 和跨學科學習的精神。其實, 人生不也是一樣麼? 我們人生中遇到大大小小的問題, 多半都不只涉及一個學科, 而是錯綜複雜, 千絲萬縷的。然而, 問題的解決方法卻往往是出人意外的多。很多時候我們面對著問題, 感到無奈、沮喪, 是因爲我們被既有的思想所捆鎖著。若然從另一個角度看, 問題也許並非想像般壞。這個解難活動也希望能帶出這個信息, 讓學生可以從另一個角度去看數學, 明白到數學並非單單是一門學術, 她和日常生活也息息相關。除了機械式的試題操練外, 數學同時亦可以是十分生活化的。

雖然這個問題對一般中學生而言較爲艱深, 但是我相信教師若能給予適切的提問, 學生很有機會能想到恰當的策略。盼望學生和教師能在其中一同欣賞到數學的優雅, 並且享受到解難的樂趣。

参考文獻

1. Dörrie, Heinrich. (1965). *Trans. David Anin. 100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. New York: Dover Publications.
2. Jones, Troy and Jackson, Steven. (2001). Rugby and Mathematics: A Surprising Link among Geometry, *the Conics, and Calculus. Mathematics Teacher*. **94**(8), 649-654.
3. Maor, Eli. (1998). *Trigonometric Delights*. New Jersey: Princeton University Press.
4. Pólya, George. (1990a). *How to Solve It: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). London: Penguin Books.
5. Pólya, George. (1990b). *Mathematics and Plausible Reasoning*. New Jersey: Princeton University Press.
6. Posamentier, A. S. and S. Krulik. (1998). Problem solving strategies for efficient and elegant solutions: a resource for the mathematics teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

—本文作者黃衡之爲香港教育學院學位教師文憑學生, 潘建強博士任教香港教育學院數學與資訊科技學系—