數學傳播 35卷3期, pp. 31-38

平行四邊形的大家族

李碩彥

摘要: 平行四邊形算不算是特殊的梯形? 長方形算不算是平行四邊形? 這都是常聽到的辯論。本文從平行四邊形的特性加以探討, 結果支持肯定的一方。同時還介紹許多美妙的四邊形, 都和平行四邊形有密切的關係。它們構成一個五代同堂的大家族。

平行四邊形有六個特性: 兩組對邊平行、兩組對邊相等、兩組對角相等。通常, 一個四邊形只要滿足六者之二就足以確定是平行四邊形。問題是有哪些例外? 以下我們將兩個特性的組合歸爲七類:

(1) 兩組對邊平行

(2) 兩組對邊相等

(3) 兩組對角相等

(4) 一組對邊平行且相等

(5) 一組對邊平行, 一組對角相等

(6) 一組對邊平行, 另一組對邊相等

(7) 一組對邊相等, 一組對角相等

組合 (1)$\sim$(5) 都是等價的, 都是平行四邊形的充要條件。滿足組合 (6) 的, 可以是平行四邊形, 也可以是等腰梯形 (Isosceles trapezoid)。最有趣的組合是 (7), 可惜書本從不討論它。爲了深入探討 (6) 和 (7), 我們首先引入一些簡單的數學符號:

- 用 $ABCD$ 代表一個平面上的四邊形, 四個頂點 A、B、C、D 按順時針排列。
- 用 $|PQ|$ 代表任意兩點 P、Q 之間的距離。
- 用 $\angle$ 這個符號來表示張角。

- 若 $\angle B+\angle C=\pi$, 亦即 $\angle B$ 和 $\angle C$ 互補, 則 AD 和 BC 這兩個對邊平行 (那時, $ABCD$就會是個梯形)。

一般性的四邊形擁有五個自由度, 可以用五個參數來表達它: $|AB|$、$\angle B$、$|BC|$、$\angle C$、$|CD|$。每限定一個特性, 就會削減一個自由度。比如說, 若限定一組對邊平行, 就是梯形, 只剩四個自由度。有一組對邊相等的叫作「等對邊形」(Side quad), 有一組對角相等的叫作「等對角形」(Angle quad), 也都只剩四個自由度。滿足 (6) 或 (7) 的四邊形只有三個自由度, 可以用 $|AB|$、$\angle B$、$|BC|$ 三個參數來表達它。因爲我們不關注四邊形的大小, 所以將 $|BC|$ 設定爲單位長。剩下的兩個參數當作平面座標: $x=\angle B$, $y=|AB|$。兩個參數值的範圍是 $0<x<\pi$, $y>0$。如此一來, (6) 和 (7) 可以改寫爲:

$$\text{(6a)}\ |AD|=|BC|=1,\quad \angle B+\angle C=\pi,\quad \angle B=x,\quad |AB|=y$$

$$\text{(7a)}\ |AD|=|BC|=1,\quad \angle B=\angle D=x,\quad |AB|=y$$

任意給定範圍之內的參數值, 我們想找出滿足 (6a) 或 (7a) 的四邊形 $ABCD$。當然, 平行四邊形始終是一個解, 問題是要找出其他的解。

先考慮 (6a)。如果除了平行四邊形還有解的話, 很明顯的就只可以是等腰梯形 (Isosceles trapezoid)。當 $x>\pi/2$ 時, 這確實是另一個解。當我們減小 x 直到 $x=\pi/2$ 時, 平行四邊形和等腰梯形這兩個解就重合成爲長方形。之後, 我們繼續減小 x, 就會又得到兩個解。所以長方形是平行四邊形和等腰梯形之間的邊界形狀。當 $y<2$ 的時候, 我們進一步減小 x 直至遇到了 $y=2\cos x$ 這條曲線。那時等腰梯形那個解會退化成爲等腰三角形, 因爲 C、D 兩點重合。更進一步減小 x 以至於 $y<2\cos x$, 等腰梯形這個解會蛻變爲一個「自相交的四邊形」, 而不再是眞正的四邊形。

當 $y=2\cos x$ 時, 平行四邊形這個解有一條對角線和一個邊等長, 我們將它取名爲「對角線等邊平行四邊形」(Isosceles parallelogram), 它可以用一對相等的等腰三角形來拼成。和長方形一樣, 它也只有兩個自由度。以上的結論都歸結於圖 1。

接下來我們探討 (7a)。因爲 x 和 y 的值已經固定了 A、B、C 三點的相對位置, 我們只需要找 D 點的位置。用 $ABCD'$ 代表平行四邊形那個解。我們可以不失一般性而假設 A、C、D' 三點共圓的順序是依照順時針方向。

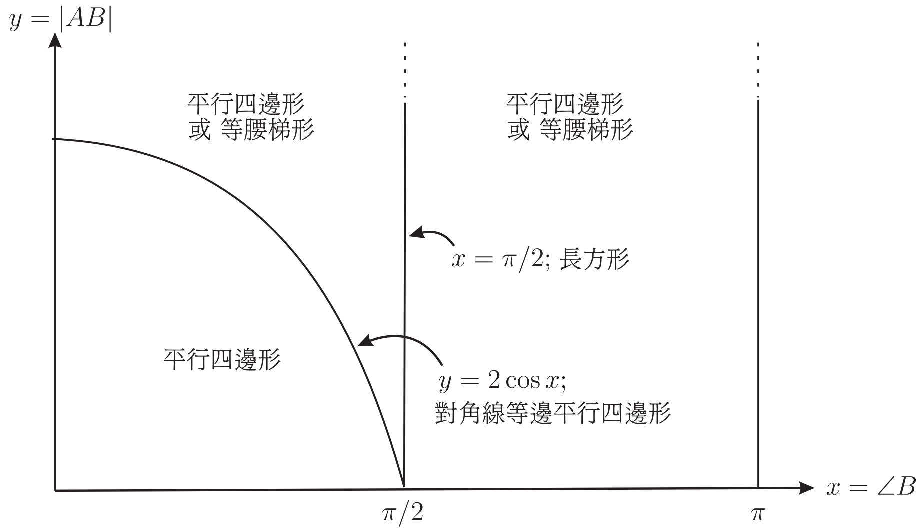

圖 1: 有一組對邊平行而另一組對邊相等的四邊形可以表達爲滿足 (6a) 的四邊形 $ABCD$。平行四邊形是一個解。當 $x \neq \pi/2$ 而 $y > 2\cos x$ 的時候, 還有另一個解, 就是等腰梯形。

在 (7a) 的假設之下, 我們作以下的分析:

(A) 一個可能的 D 點就是 D'。

(B) 因爲 $\angle AD'C = \angle ADC (= \angle B)$, 所以 D 點與 A、C、D' 共圓。另者, $AD' = AD = 1$。

- 若 $y = \cos x$, 也就是說共圓的直徑是 1 的時候, 唯一的 D 點就是 D'。那時候 $ABCD'$ 會有一條對角線垂直於一組對邊, 所以我們將它取名爲「對角線垂直平行四邊形」(Orthodiagonal parallelogram)。
- 若 $y \neq \cos x$, 有唯一個不同於 D' 的 D 點與 A、C、D' 共圓而且滿足 $AD' = AD$。如圖 2 或圖 3 所示。問題就是要確定 $ABCD$ 是個眞正的四邊形。如果是的話, 就叫它做「歪等對角邊形」(Asymmetric angle-side quad)。
- 以下, 我們就假設: $y \neq \cos x$, $D \neq D'$。

(C) D 點只能在 $CD'A$ 弧線上, 所以 $|AC| < 1$。將餘弦定理用於三角形 ABC 之上, 就發現這個不等式等價於 $y < 2\cos x$。

- 臨界情況是 $y = 2\cos x$。那時, D 點與 C 重合, 所以 $ABCD$ 退化成三角形。相應地, $ABCD'$ 會變成對角線等邊平行四邊形。
- 當 $y > 2\cos x$ 時, D 點落在 AC 弧線上, 所以 $ABCD$ 變成「自相交的四邊形」, 不是眞正的四邊形。

- 以下, 我們就假設: $D \neq D'$, $\cos x \neq y < 2\cos x$。

要想確定 $ABCD$ 是個眞正的四邊形, 還需要確定 $\angle DAB$ 和 $\angle BCD$ 都不是平角, 否則 $ABCD$ 會退化成三角形。在圓上畫一條直徑 AE 作爲輔助線, 它將 D' 和 D 分隔於兩側。有兩個情形需要分別考慮。

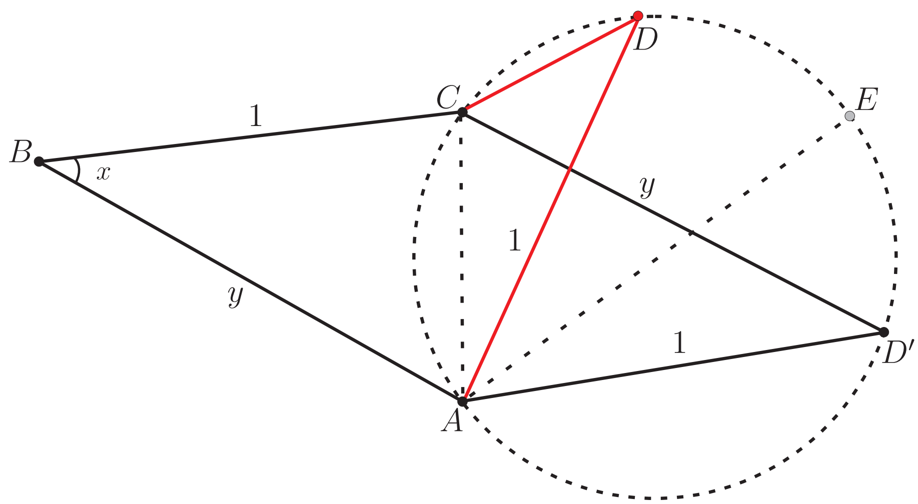

圖 2: $ABCD'$ 是一個平行四邊形, $ABCD$ 是滿足 (7a) 的四邊形, $D \neq D'$, 而且 $\cos x < y < 2\cos x$。輔助線 AE 是圓的直徑。在此情況下, A、C、D、E、D' 諸點按順時針方向排列在圓上, 我們將 $ABCD$ 取名爲「對角線等邊平行四邊形」。它可以是凹的, 也可以是凸的。

<u>第一種情形: $\cos x < y$</u>。如圖 2 所示, $\angle CAB = \angle ACD'$ 爲銳角, 所以 A、C、D、E、D' 諸點按順時針方向排列在圓上。我們觀察到 $\angle DAB < \angle D'AB < \pi$, 所以 $\angle DAB$ 不會是平角。同時:

- 只有在 $|CD'| = |AD|$ 的時候 $\angle BCD$ 才會是平角, 也就是 $y = 1$ 的時候。那時, $ABCD$ 退化成三角形, 而 $ABCD'$ 則是菱形。
- 當 $1 < y < 2\cos x$ 時, $ABCD$ 是凹的歪等對角邊形。
- 當 $\cos x < y < 1$ (而且 $y < 2\cos x$) 時, $ABCD$ 是凸的歪等對角邊形。

<u>第二種情形: $y < \cos x$</u>。如圖3所示, $\angle CAB = \angle ACD'$ 是鈍角, 所以 A、C、D'、 E、D 諸點按順時針方向排列在圓上。我們觀察到:

- 因爲 $y \neq 1$, 所以 $|CD| \neq |AD'|$, 因此 $\angle DAB$ 不會是平角。

- $\angle BCD < \angle BCD' < \pi$, 因此 $\angle BCD$ 也不會是平角。

這樣, $ABCD$ 就確實是四邊形, 一個凸的歪等對角邊形。

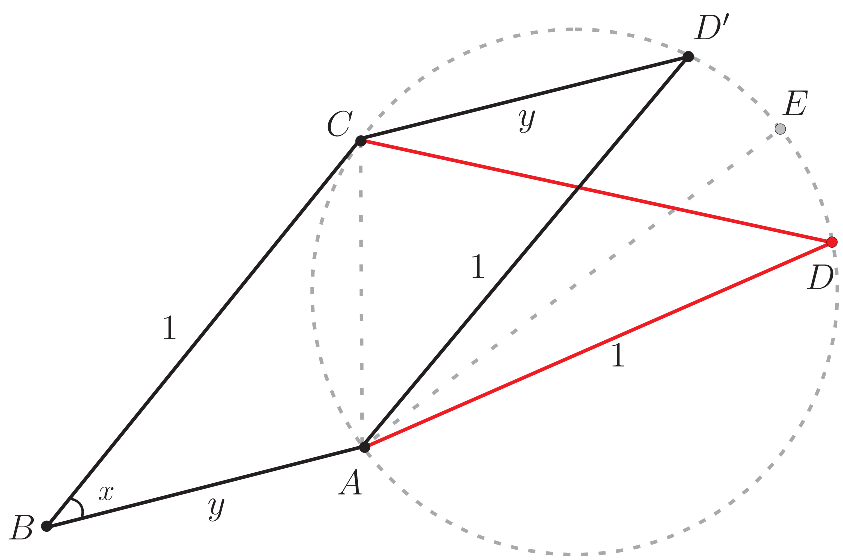

圖 3: $ABCD'$ 是一個平行四邊形, $ABCD$ 是滿足 (7a) 的四邊形, $D \neq D'$, 而且 $y < \cos x$。輔助線 AE 是圓的直徑。在此情況下, A、C、D'、E、D 諸點按順時針方向排列在圓上, $ABCD$只可以是一個凸的歪等對角邊形。

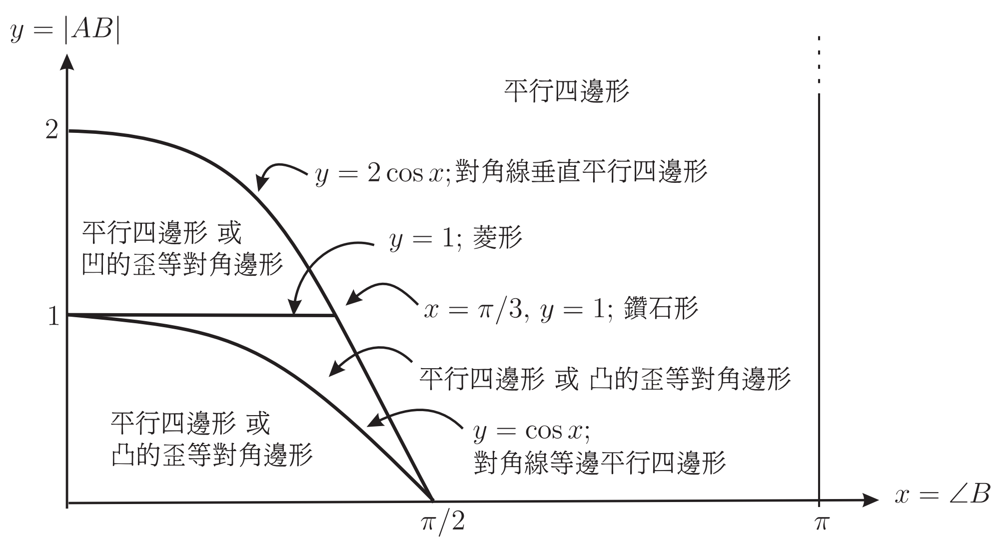

圖 4: 有一組對邊相等和一組對角相等的四邊形可以表達爲滿足 (7a) 的四邊形 $ABCD$。平行四邊形是一個解。有些時候會有另一個解, 叫做「歪等對角邊形」。當 $1 < y < 2\cos x$ 時, 歪等對角邊形是凹的。當 $\cos x \neq y < 1$ 而且 $y < 2\cos x$ 時, 歪等對角邊形是凸的。

圖 4 總結上述兩種情形的探討。當 $y=1$ 和 $y=2\cos x$ 同時成立的時候, $ABCD'$ 會變成鑽石形 (Diamond), 由一對相同的正三角形所拼成。

圖 5 展示平行四邊形的大家族, 每一個成員都是四邊形。族長是一般性的四邊形, 它的形狀大小共有五個自由度。每限定一個特性, 就會削減一個自由度。族譜中的輩分就是自由度, 每一個箭頭都是從父母指向子女。血緣關係都由對邊平行、對邊相等、對角相等這三種特性所衍生而出, 不包括諸如「兩個鄰角相等」的另類特性。

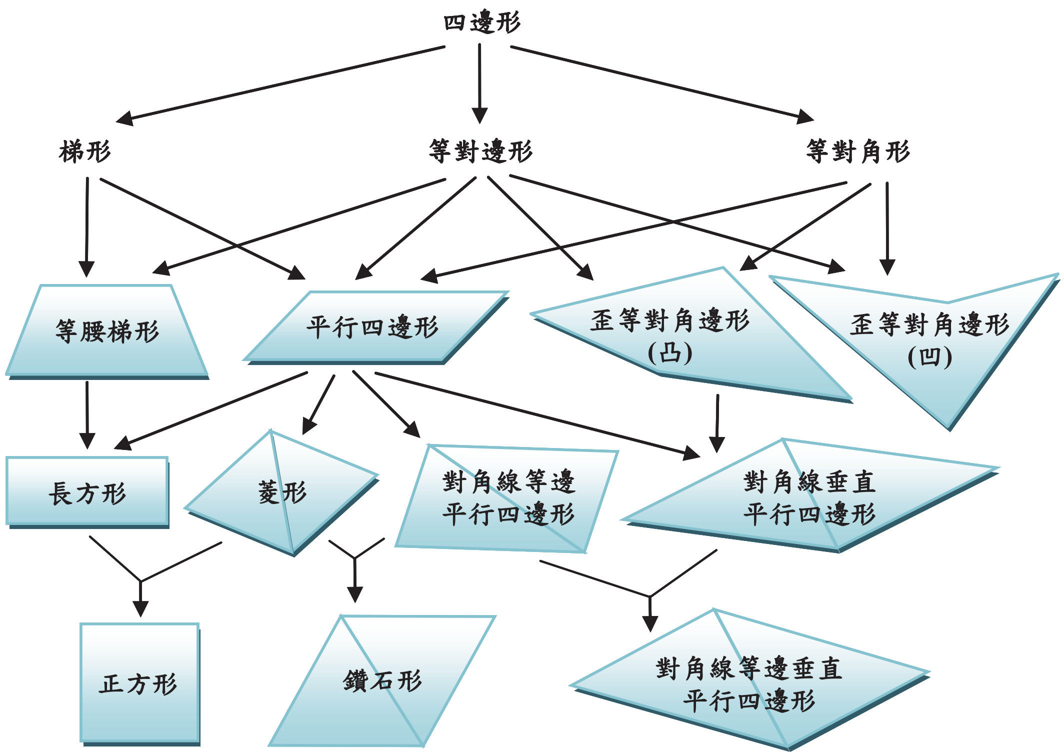

圖 5: 平行四邊形的大家族五代同堂, 每一個成員都是四邊形。族長是一般性的四邊形, 它的形狀大小共有五個自由度。每限定一個特性, 就會削減一個自由度。族譜中的輩分就是自由度, 每一個箭頭都是從父母指向子女。血緣關係皆由對邊平行、對邊相等、對角相等這三種特性所衍生而出。

構成家族中的第二代的是梯形、等對邊形、等對角形, 都只有四個自由度。屬於第三代的, 都受限於兩個特性。它們包括平行四邊形、等腰梯形、以及一凹一凸的歪等對角邊形雙胞胎。

底下的兩輩, 就都是特殊的平行四邊形。第四代包括長方形、菱形、對角線等邊平行四邊形、對角線垂直平行四邊形, 在以上都出現過。第五代中已出現的是鑽石形, 它唯一的自由度就

是它的大小。正方形既隸屬長方形又隸屬菱形, 所以也被放進族譜裏的第五代。同時隸屬對角線垂直平行四邊形和對角線等邊平行四邊形的是「對角線等邊垂直平行四邊形」(Isosceles orthodiagonal parallelogram), 它可以用一對相等的等腰直角三角形來拼成。平行四邊形的大家族就此齊全, 五代同堂。

家族中知名度較高的成員, 諸如正方形、長方形、平行四邊形、菱形、梯形、等腰梯形, 也常出現於其他關於四邊形的分類之中 [1-3]。

常有人辯論: 平行四邊形算不算是特殊的梯形? 長方形算不算是平行四邊形? 通過平行四邊形家譜的探討, 我們的回答絕對是肯定的。

後記: 以下是半個世紀前的一個小故事。寫本文的動機之一, 就是要將這個故事的數學部分說的更完整。

> 平行四邊形有六個特性: 兩組對邊平行、兩組對邊相等、兩組對角相等。通常, 一個四邊形滿足六者之二就足以確定是平行四邊形。但是等腰梯形是明顯的例外。
>
> “如果還有其他例外的話, 那就只能是一組對邊相等和一組對角相等,” 1963年底, 省立台北建國中學高一24班課堂上王景雲老師宣佈:
>
> “我教了十幾年的數學, 翻遍群書都找不到一個定理說有這兩個特性就是平行四邊形, 可是又找不出反例。今天這堂課大家就來探討這個問題, 想出答案的, 就到黑板上來講解。”
>
> 許多同學陸續上台, 有的試圖證明那個書上都遺漏的定理, 有的試舉反例, 可惜都被老師一一擊退。全班陷入深思, 有些則竊竊私語。大獲全勝的王老師耐心地等待著下一個勇士。
>
> 我躊躇再三, 終於舉手說: “凹的四邊形有反例。”
>
> 老師一聽: “凹的! 快上來畫給我看。”
>
> 於是, 一個小小的反例就解釋了爲什麼書上少了一個「定理」, 同學們都很興奮。王景雲則望著我, 一語不發。正好下課鈴響了, 他逕自離去, 留下一個我看不懂的眼神。

事隔近半個世紀, 是時候將這個數學故事說完全了。

参考文獻

1. “An extended classification of quadrilaterals,” http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/quadclassify.pdf.

2. “Quadrilateral-wikipedia,” http://en.wikipedia.org/wiki/Quadrilateral.
3. De Villiers, M., *Some Adventures in Euclidean Geometry.* University of Durban-Westville, 1996.

—本文作者任教香港中文大學—