數學傳播　35卷3期, pp. 11-21

數學的詩篇 —— Fourier分析

林琦焜

『深入研究大自然是所有數學發現最富饒的來源, 不僅對於決定良好的目標有好處, 也有助於排除含糊的問題、無用的計算。這是建立分析學本身的手段, 也協助我們發現科學裡最緊要、最應永遠維繫的概念。最基本的概念就是表現自然事件的概念。』

—《熱的解析理論》 J. Fourier (1768–1830) —

1. 聖經的詩篇

西方文明泉源之一是希伯來文明, 其主要代表則是聖經。聖經不是一本書, 而是很多書 (共66卷) 的統稱。如果把聖經從中間打開, 讀者肯定看到的是詩篇 (Psalm), 詩篇的希臘文 (stringed instrument) 是由弦樂而來。詩篇的主要作者之一: 大衛王就是豎琴高手, 聽說他的音樂可以醫治 (掃羅王) 頭痛。就希臘文的原意來看, 詩必須有音樂才足以構成詩篇。沒有音樂的詩是缺少活力的。猶太人是詩的民族, 充滿感情, 快樂時他們登爬喜悅的高峰; 痛苦時陷入失望的深淵, 而他們的文字便是他們的音樂。

『人一代一代過去, 但他們的心靈依舊。我們若夠聰明, 也應該從這些詩篇中獲得安慰。我們今天受的苦, 在我們以前的人早已受過, 我們後來的人仍舊要受。』

—《聖經的故事》 房龍 —

圖1. 少年大衛

2. 弦振動方程

Fourier 分析的起源正如詩篇的意義, 是從弦樂器也就是弦振動開始。一般我們將法國數學家 Jean d'Alembert (1717–1783) 於 1747 年發表的論文《張緊的弦振動時形成的曲線研究》視爲偏微分方程的開端。在這篇文章中 d'Alembert 藉由牛頓定律推導出第一個偏微分方程 (弦振動方程或波動方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad c^2 = \frac{\mathcal{T}}{\rho} \tag{2.1}$$

這裡 $\mathcal{T}$ 是琴弦的拉力、ρ 是密度、c 則是琴弦的傳播速度。並且只用到微積分的知識, 他就證明了弦振動方程 (2.1) 的解 $u(x,t)$可以表示爲

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \tag{2.2}$$

其中 f、g 是任意的好函數 (意思是二次可微), 通常我們稱 (2.2) 爲 d'Alembert 公式以紀念他的貢獻。在 d'Alembert 之前, 英國科學家 Brook Taylor (1685–1731) 就研究了弦振動問題, 並發表了小提琴弦的基本振動頻率公式; 它完全由琴弦的長度、拉力與密度所決定, 但是 Taylor 並沒有採用偏導數的概念, 也因此並沒有得到波動方程 (2.1)。

圖2. d'Alembert

圖3. Taylor

波動方程 (2.1) 是一個描述波形 (二階) 變化率的微分方程, 除了空間的變化率之外, 還有時間的變化率 (代表加速度), 它基本上是牛頓第二運動定律的產物, (2.1) 告訴我們「琴弦每一小段的加速度都與這一小段所受的拉力成正比」。如果把初始條件與外力 $h(x,t)$ 考慮進來

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,t), \qquad t>0, \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{(I.C.)} \qquad u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{2.3}$$

則 d'Alembert 公式 (2.2) 可以進一步推廣爲

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(f(x-ct)+f(x+ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \\ &\quad +\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} h(\xi,\tau)d\xi d\tau \end{aligned} \tag{2.4}$$

簡單的量綱 (因次) 分析 (dimensional analysis) 可以判斷 (2.4) 的合理性。首先由初始值

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x) &\quad\Longrightarrow\quad [f]=[u] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) &\quad\Longrightarrow\quad [g]=\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=[u]\mathrm{T}^{-1} \end{aligned}$$

其次方程式本身也告訴我們

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\approx c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx h(x,t) \quad\Longrightarrow\quad [c]=\mathrm{LT}^{-1},\quad [h]=[u]\mathrm{T}^{-2}$$

因此 (2.4) 每一項的量綱都是 $[u]$, 換句話說 d'Alembert 公式 (2.4) 是量綱平衡, 所以從物理的角度來看 (2.4) 這個解是合理且自然的。初始值 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$ 告訴我們初速度 $g(x)$ 基本上是 $u(x,t)$ 的一階微分, 所以 (2.4) 的第二式是函數 $g(x)$ 的一次積分。另外波動方程本身則說明非齊次項 $h(x,t)$ 是 $u(x,t)$ 的二階微分, 所以 (2.4) 最後一項是 $h(x,t)$ 的二重積分。這肯定了我們的理念:「方程式本身是會講話的。」

與 d'Alembert 同年代的瑞士數學家 L. Euler (1707–1783), 從 d'Alembert 的研究成果出發也推得波動方程 (有邊界), 並且給了一個特殊的三角級數解:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L} \\ u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \tag{2.5}$$

這就是 Fourier 級數的最初形式。在此之前瑞士 Bernoulli 家族的 Daniel Bernoulli (1700–1782) 在 1727 年也研究了波動方程, 他引進分離變數法 (separation of variables) , 根據他的理論, 最一般的解可以表示爲無窮多個正弦波的疊加 (即三角級數)。因此與 d'Alembert 及 Euler 的成果有差異, 後來法國數學家 Louis Lagrange (1736–1813) 也加入這一場爲期將近一個世紀的論戰。整個論戰的核心是那種函數才可以表示成三角函數之和, 在那個年代人們對於「函數是什麼?」仍然是非常的分歧。這個問題一直要等到法國數學家 Fourier 才解決, 而 Fourier 分析就是這場論戰的結晶, 最後歷史也還給 D. Bernoulli一個公道:

『*d'Alembert* 與 *Euler* 所提出的新曲線, 全都只是 *Taylor* 振動(三角級數)的組合而已。』

—Daniel Bernoulli (1700-1782)—

圖4. Euler

圖5. D. Bernoulli

3. 分離變數法

我們回到波動方程的初邊值問題

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0\le x\le L, \qquad 0\le t, \\ \text{(B.C.)} & u(0,t)=u(L,t)=0, \qquad 0\le t, \\ \text{(I.C.)} & u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x), \qquad 0\le x\le L \end{cases}$$

按 D. Bernoulli 的分離變數法, 我們可以假設 $u(x,t)=T(t)\varphi(x)$, 代入方程式得

$$\begin{cases} T''(t)+c^2\lambda^2 T(t)=0 \\ \varphi''(x)+\lambda\varphi(x) \quad =0, \qquad \varphi(0)=\varphi(L)=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

對 $\varphi(x)$ 而言, 這就是著名的 Sturm-Liouville 問題, 即所謂的固有值問題 (eigenvalue problem), 爲什麼呢? 顯然 $\varphi=0$ 是一個無聊解 (trivial solution)! 除了 $\varphi=0$ 之外是否有其它眞正有聊的解呢? 所以由此自然而然就衍生出微分方程的固有值問題。類似於線性代數的理論, 我們可以計算得固有值與固有函數

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \varphi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n=1,2,\cdots \tag{3.2}$$

將 λ_n 代入 T 滿足的方程式並令其解爲 T_n

$$T_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L}, \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{3.3}$$

其中 a_n、b_n 是任意的常數。所以由重疊原理 (線性), 一般解可以表示爲

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \varphi_n(x) \tag{3.4}$$

現在的問題是如何決定係數 a_n、b_n 呢?

『回到方程式!』

還好原來的問題有兩個初始值 (按牛頓定律我們需要最開始的位置與速度, 才能決定粒子的運動軌跡)。所以

$$\begin{cases} f(x) = u(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ g(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \end{cases} \tag{3.5}$$

利用垂直 (正交) 的概念可得

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \dfrac{2}{n\pi c} \displaystyle\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \tag{3.6}$$

事實上, Euler 就是利用這方法推導出 Fourier 係數a_n、b_n。

由弦振動方程的解 (3.4) 我們看到, 弦的固有振動在整個弦上具有整數個正弦半波的形式, 每個固有振動都有一定的頻率, 而且這些頻率可以按大小順序排列爲

$$\frac{c\pi}{L}, \quad 2\frac{c\pi}{L}, \quad 3\frac{c\pi}{L}, \quad \cdots, \quad n\frac{c\pi}{L}, \quad \cdots$$

頻率 $\frac{c\pi}{L}$ 稱爲基音頻率, 其它的頻率是所謂的泛音頻率。固有函數 $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$ 在區間 $0 \le x \le L$ 中改變 $n-1$ 次符號, 固有函數等於0 的點稱爲波節或節點 (node)。在弦的振動第一泛音的波節所對應的點固定不動則基音就消失, 我們只聽到第一泛音, 也就是提高了八度音。

按照我們對一般解 (3.4) 的認識, 振幅 $u(x,t)$ 與係數 a_n、b_n 必須具有相同的量綱: $[u] = [a_n] = [b_n]$, 事實上也的確是如此。簡單的量綱分析得

$$[a_n] = \frac{1}{\mathrm{L}}[f]1\mathrm{L} = [f] = [u]$$

$$[b_n] = \frac{1}{[c]}[g]1\mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{LT}^{-1}}\frac{[u]}{\mathrm{T}}\mathrm{L} = [u]$$

依三角函數的常識判斷, 有正弦波必然也有餘弦波 $\cos\frac{n\pi x}{L}$。爲何弦振動只有正弦波解? 餘弦波那裡去了呢? 這裡面有非常深刻的物理及數學內涵, 簡而言之, 就是對稱性 (symmetry)。對邊界條件 $u(0,t)=0$ 而言 (我們稱爲 Dirichlet 邊界條件), 直觀上, 可以這麼看: 一個好函數在原點 (邊界點) 的值等於0, 若要將此函數週期性平滑地擴張到整個實數軸的左邊, 那麼必然是一個奇函數, 我們稱爲奇函數擴張 (odd function extension), 因此弦振動的解只有正弦波。同理可以想像如果邊界值是 $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ (Neumann邊界條件) 則弦振動的解是餘弦波, 因爲在原點的微分等於0, 函數在原點左右兩邊差不多是對稱, 所以必定是一偶函數, 我們稱爲偶函數擴張 (even function extension), 因此弦振動的解只有餘弦波。

藉由 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 可以將波動方程的解 (3.4)–(3.6), 表示得更精簡:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) \\ c_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{L}}dx \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7) 這個漂亮的公式告訴我們 Fourier 級數眞正的主角是 $\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}$, 它扮演的角色正如連續函數中的多項式 $\{x^n\}$ 所扮演的一樣。因爲 $\{e^{i\frac{n\pi x}{L}}\}$ 是一個複數, 自然就會有如此的困惑: (3.7) 右邊的無窮級數是實數值, 那麼左邊的無窮級數眞的是實數值嗎? 這問題問得好!多少人是照單全收就如此迷糊過了一輩子。這問題的答案仍然是「對稱性」, 因爲負的足碼 $-n$ 與正的足碼 n 正好是共軛, 所以相加之後是一實數, 因此結論 (3.7) 的左式也必然是實數值。如果所取的級數不是左右對稱, 則不能肯定是否是一實數!

Fourier 級數 (3.7) 還可以藉由三角函數的和差化積 (或積化和差) 改寫爲

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi(x-\xi)}{L}d\xi \tag{3.8}$$

在這裡我們看到摺積 (convolution) 自然而然出現, 這是一個深刻的理論, 與對稱性、不變量有關, 這裡主要是平移不變 (時間或空間)。

波動方程也許是有史以來最重要的方程式, 就連愛因斯坦的質能公式 $E=mc^2$ 也比不上。這是一個極爲有趣的例子, 說明了數學是如何隱身於大自然之中。同時也是古希臘精神的重現

『大自然是依數學來設計的。』

關於熱我們是否也有同樣的論證?

4. 熱傳導方程

《熱的解析理論》— 號稱為應用解析 (分析) 的聖經, 是Fourier 最著名的著作於1822年出版, 但其中大部分的內容可追溯至1807年, 他呈送給巴黎科學院的一篇論文, 當時經過了3L(Lagrange、Laplace、Legendre) 審查後, 被科學院拒絕。在1811年才又提交修改後的論文, 並獲得巴黎科學院的大獎, 這篇文章開闢了數學史上富有成果的新篇章, 該文章主要是研究金屬棒、圓盤、立方體的熱傳導問題, 最簡單的情形是

$$\begin{cases} \text{(D.E.)} & \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t>0, \qquad 0<x<L \\ \text{(B.C.)} & u(0,t)=u(L,t)=0, \qquad t>0 \\ \text{(I.C.)} & u(x,0)=f(x), \qquad 0<x<L \end{cases} \tag{4.1}$$

仿 D. Bernoulli 的分離變數法, Fourier 也可以將熱傳導的解表示為三角級數。但是 Fourier 更將 D. Bernoulli 與 Euler 的成果發展成一般的理論, 因此今天我們稱之為 Fourier 級數而不僅僅是三角級數。在該論文中, 他做出了令人驚訝的結論: 由任意繪出的圖形且定義在有限閉區間的任何函數都可以被分解為正弦函數與餘弦函數的和。

$$f(x) \text{``}=\text{''} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \qquad 0\le x\le 2\pi$$

「函數是否真的等於其 Fourier 級數?」或者換個角度說:「函數 f 之 Fourier 級數是否收斂到函數 f?」這個問題就成為整個數學分析發展的核心。為此不同的收斂概念應運而生: 逐點收斂、一致收斂、絕對收斂、L^p-收斂, 甚至弱收斂 (weak convergence) 等等。而對應的就是函數空間 (function space) 的問題, 這些都大大地豐盛了數學的內涵而且也構成了近代分析的絕大部分。對於這個問題, 第一個突破性的發展是德國數學家 G. L. Dirichlet (1805–1859), 他在 Fourier 的影響與鼓勵下研究 Fourier 級數的收斂性, 這件工作也成為他最負盛名的成就。這件事引導他將函數的概念一般化, 並給出了一個處處不連續的函數

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0, \ x\in[0,1]-\mathbb{Q} \end{cases}$$

今天我們稱之為 Dirichlet 函數, 由於他開創性的工作, B. Riemann (1826–1866) 特別尊稱他是 Fourier 分析真正的奠基者。

圖6. Dirichlet

圖7. Riemann

眞正的不連續函數是經由 Riemann 在 Fourier 級數的收斂性上的工作才進入數學的主流。在 Fourier 的工作中已經表露了有必要讓積分對不連續函數也有意義, 所以 Riemann 在 1854年的就職演說中特別提出這個問題

$$\text{我們如何瞭解積分} \quad \int_a^b f(x)dx?$$

他的答案就是今天我們仍然沿用的 Riemann 積分。Riemann 使可積性的概念明確化, 用的是我們現在稱做 Riemann 積分的定義, 這個定義在20世紀推廣至更一般的 Lebesgue 積分。繼 Riemann 之後, 德國數學家 Cantor$\cdots$ 等等不少第一流的數學家對此問題都有重要的貢獻。1876 年 Paul du Bois Reymond (1831–1889) 造出了連續的週期函數其 Fourier 級數在某些點發散。蘇聯數學家 A. Kolmogorov (1903–1987) 更造出了一個可積函數其 Fourier 級數到處發散。所以怎樣的函數才可能收斂呢? 這個問題在1966年由瑞典數學家 L. Carleson 解決。他證明 L^2-函數 (平方可積函數) 是對的, 後來美國數學家 R. Hunt 利用插值法推廣到 $L^p(1<p)$ 函數都是對的。

5. Fourier 積分與變換

如果只有 Fourier 級數, 那麼 Fourier 就不值得稱爲 Fourier。他進一步考慮週期 $2L\to\infty$, 意思是無窮大的週期或非週期函數。藉由 Riemann 和與 Riemann-Lebesgue 引理, 得到所謂的 Fourier 積分公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\xi\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\xi(x-y)dy \tag{5.1}$$

讀者可以驗證 (5.1) 是量綱平衡, 要提醒的是圓周率 π 無法丟掉。可以稱這項是演化過程 ($L \to \infty$) 所留下來的 DNA。無論是 2π 或 $2L$ 週期函數, 基本上都是考慮在圓上的函數, 如今變成 $(-\infty, \infty)$, 必定有 π 以便留下圓的基因。

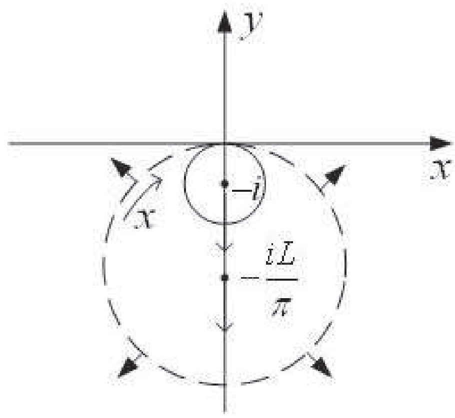

圖8. Fourier 變換

由 (5.1) 我們可以進一步得到 Fourier 變換

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{5.2}$$

實際上由 (5.1) 可以衍生其他不同的 Fourier 變換之定義, 但不管是哪一種定義, 最終 Fourier 變換與逆變換合併在一起時 π一定要出現。

Fourier 積分是研究一條無窮長的線上的熱傳導問題所發展出來, 頻率與週期的關係是

$$\text{基本頻率} = \frac{1}{\text{週期}}$$

如果一個波需要無限長的時間才能完成一個週期, 那麼它的頻率將非常接近0, 所以當週期接近無限大時, 頻率之間沒有間隙, 而頻譜就成爲連續的, 因此當週期是無限大時, 所有的頻率都會出現。

Fourier 變換比 Fourier 級數更豐富、應用更廣, 甚至有許多 Fourier 分析的書乾脆直接從這裡開始。Fourier 變換已經是現代數學分析的核心, 是解偏微分方程還有其他分析不可或缺的工具, 甚至近代物理或科技許多領域都會用到, 在量子力學中物質波是透過 Fourier 分析而具體表現。值得一提的 Heisenberg 測不準 (不確定性) 原理是可以利用 Fourier 變換來證明的, 這是 Hermann Weyl (1885–1955) 的傑作。證明的方法是 Cauchy-Schwarz 不等式而且連帶地, 當等式成立時, 就是最穩定的情形是基態 (ground state), 正是 Gaussian (高斯函數)。

圖9. Heisenberg

圖10. Weyl

6. 效法 Fourier

《熱的解析理論》是記載了 Fourier 與 Fourier 積分之誕生的重要文獻, 在數學史與科學史都公認是一部劃世代的經典著作。Fourier在這部名著中所發展的方法與解微分方程的強而有力的工具, 還有留下來待解的問題, 除了極大的推動19世紀以後數學的發展之外, 也更豐富了數學與科學的生命。

Fourier的研究成果是典型數學美的表現, 而 Fourier 分析猶如一首數學的長詩。他證明了, 所有的聲音 (複雜的或簡單的) 都可以用數學的方式加以描述, 由於 Fourier 的研究, 使得音樂的樂章也能表示成數學的形式。現代的音樂愛好者顯然應該把 Fourier 的貢獻看作與貝多芬一樣的偉大。

Fourier的理論和方法幾乎滲透到近代物理的所有部門。1826年歐姆 (Georg Simon Ohm, 1787–1854) 利用熱傳導聯想到電傳導, 用熱效應的辦法對電進行實驗研究, 從而得出著名的電傳導公式, 即歐姆定律。高斯 (1781–1840) 與 Poisson(1777–1855) 也把《熱的解析理論》裡面的方法應用到電學, 並得到豐碩的成果。著名物理學家 J. C. Maxwell (1831-1879) 曾把《熱的解析理論》稱爲一首偉大的數學的詩, 而物理學家 Lord Kelvin (1824–1907) 不但稱之爲數學的詩, 而且宣稱他自己在數學物理的全部生涯都受到這部著作的影響。隨著數學的形式化、公理化、抽象化與一般化而漸漸失去活力, 由於沒有創新的觀點、沒有新的目標, 數學可能很快在其邏輯證明的嚴格性下枯竭, 一旦實質性的東西消失, 數學的發展便停滯。不少有遠見的數學家不禁要問說:

『我們是否該回到 Fourier?』

參考文獻

1. J. C. Taylor, *Hidden Unity in Natural's Law*, Cambridge University Press, (2001)。(中譯本: 自然規律中蘊蓄的統一性; 北京理工大學出版社(中國), 2003。)
2. James W. Brown and Ruel V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 6th Edition, McGraw-Hill (2001).
3. H. Dym and H. P. Mckean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, (1972).
4. Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Brooks/Cole Publishing Company (1992).
5. Joseph Fourier, *The Analytical Theory of Heat* (Dover Phoenix Editions) (1787).
6. Enriwue A. Gonzalez-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems.* Academic Press, Inc. (1995).
7. Elias M. Stein and Rami Shakarchi, *Fourier Analysis*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press (2003).
8. Elias M. Stein and Guido Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1971).
9. Robert S. Strichartz, *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific (2003).
10. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Volumes I and II. Cambridge University Press, 2nd Edition, 1959, reprinted 1993.
11. 跨國語言交流實驗學院 (著), 葉偉文 (譯), 數學嗆聲班 (基礎班)、(進階班), 台北: 天下文化 (2007)。
12. 林琦焜, 從三角求和公式到 Fourier 級數, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 103, 11-29(2002)。
13. 林琦焜, 從量綱看世界, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 131, 13-27 (2009)。

—本文作者任教國立交通大學應用數學系—

更正啓事

本刊第35卷第2期 (138號)“複分析五講 第五講”作者張德健教授來函更正錯誤如下:

原文88頁第1行「$\leqq \|f\|\Big(\|\boldsymbol{H}f\|^2 + \|\boldsymbol{A}\|_{op}\cdot\|\boldsymbol{H}f\|\Big)$」

改為「$\leqq \|f\|\Big(\|\boldsymbol{H}^2f\| + \|\boldsymbol{A}\|_{op}\cdot\|\boldsymbol{H}f\|\Big)$」。

89頁參考文獻 1, 2, 3,「V. Ahlfors」改為「L. V. Ahlfors」。

89頁參考文獻 2,「359-36?」改為「359-364」。