數學傳播 35卷2期, pp. 66-90

複分析五講 第五講

微分幾何與 Picard 定理

龔 昇・張德健

5.1. 度量與曲率 (metric and curvature)

在這一講中, 我們將介紹一些複幾何的基礎知識並用之來處理複分析中的一些定理, 例如 Picard 定理。Picard 定理也許是複變函數論尤其是值分佈理論中最經典的定理之一, 原來的證明非常的繁複, 但如果用微分幾何的角度來討論, 就顯得簡單得多了。

若 Ω 爲 $\mathbb{C}$ 中的一個區域, 在 Ω 上定義一個非負的 C^2 函數 ρ, 稱之爲度量 (metric), 即 $ds_\rho^2=\rho^2|dz|^2$。由此得到距離函數 d, 在兩點 $z_1,z_2\in\Omega$ 之的距離定義爲

$$d(z_1,z_2)=\inf\int_\gamma \rho(z)|dz|, \tag{5.1}$$

這裡 inf 是所連接 z_1,z_2 兩點且各點全在 Ω 中的曲線 γ 上取的。

對度量 ρ, 可以定義曲率 (curvature) 如下:

$$K(z,\rho)=-\frac{\Delta\log\rho(z)}{\rho^2(z)}, \tag{5.2}$$

這裡 Δ 爲 Laplace 算子, 即

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

其中 $z=x+iy=re^{i\theta}$。我們可以證明這樣定義的曲率與一般在微分幾何中定義的 Gauss 曲率是一致的。

在複幾何中常用的度量有如下三種。

(1) **歐氏度量** (Euclidean metric)

若 $\Omega=\mathbb{C}$, 在 $\mathbb{C}$ 中取度量 $\rho(z)\equiv 1$, 對所有 $z\in\mathbb{C}$, 即 $ds^2=|dz|^2$, 這個度量稱爲歐氏度量 (Euclidean metric) 或抛物度量 (parabolic metric), 兩點 z_1,z_2 之間的距離稱爲歐

氏距離, 而

$$d(z_1,z_2)=\inf\int_\gamma |dz|=|z_1-z_2|=\text{連接}z_1,z_2\text{兩點的直線段之長度},$$

由變換 $\{w=e^{i\theta}z+a,\ \theta\in\mathbb{R},a\in\mathbb{C}\}$ 所組成的群, 即由旋轉 $w=e^{i\theta}$ 及平移 $w=z+a$ 的複合所組成的群稱爲歐氏運動群, 或剛體運動群 (Group of rigid motions), 這是 $Aut(\mathbb{C})$ 中的一個子群, 顯然, 歐氏度量是在歐氏運動群下的不變度量。而由定義 (5.2), 這時候 $K(z,\rho)=0$ 對任意的 $z\in\mathbb{C}$ 都成立, 所以稱這個度量爲抛物度量。

(2) Poincaré **度量**

若 Ω 爲單位圓盤 $D(0;1)=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$, 在 $D(0;1)$ 上取度量

$$\lambda(z)=\frac{2}{1-|z|^2},$$

即 $ds_\lambda^2=\dfrac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$。

這個度量稱爲 Poincaré 度量 (Poincaré metric) 或雙曲度量 (hyperbolic metric)。在第二講中我們已證明: $D(0;1)$ 的全純自同構群 $Aut(D(0;1))$ 由變換

$$\left\{w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\ \theta\in\mathbb{R},\ a\in D(0;1)\right\}$$

所組成, 即群由旋轉及 Möbius 變換所組成。在第二講中也證明: Poincaré度量是在 $Aut(D(0;1))$ 下的不變量。

現在我們來計算 $D(0;1)$ 中兩點 z_1,z_2 的 Poincaré 距離。先考慮 $D(0;1)$ 中兩點 $z_1=0$ 及 $z_2=R+i0$ $(R<1)$ 之間的 Poincaré 距離。這時候連接這兩個點的曲線 γ 可以寫成

$$\begin{aligned} z(t)&=u(t)+iv(t), \qquad 0\le t\le 1,\\ v(0)&=u(0)=v(1)=0, \qquad u(1)=R, \end{aligned}$$

而 $u^2(t)+v^2(t)<1$, u,v 爲 t 的 C^1 實値函數, 於是

$$\begin{aligned}\int_\gamma ds&=\int_\gamma\frac{2|dz|}{1-|z|^2}=2\int_0^1\frac{(u'(t)^2+v'(t)^2)^{\frac12}dt}{1-u^2(t)-v^2(t)}\\ &\ge\int_0^1\frac{2|u'(t)|dt}{1-u^2(t)}\ge\Big|\int_0^R\frac{2du}{1-u^2}\Big|=\log\frac{1+R}{1-R},\end{aligned}$$

而等號成立若且唯若 $v(t)=0$, $0\le t\le 1$。所以得到

$$d(0,R+i0)=\inf_\gamma\int_\gamma\frac{2|dz|}{1-|z|^2}=\log\frac{1+R}{1-R},$$

而對積分取 inf 的 γ 爲連接 0 及 $R+i0$ 的直線段。

由於 $w=e^{i\theta}z$ 是 $Aut(D(0;1))$ 中的一個元素, 故 $D(0;1)$ 中任意兩點的 Poincaré 距離經 $w=e^{i\theta}z$ 作用後是不變的。因此, 我們得到

$$D(0;e^{i\theta}R)=\log\frac{1+R}{1-R}$$

對任意 $\theta\in\mathbb{R}$ 都成立。

若 z_1,z_2 爲 $D(0;1)$ 中任意兩點, 則

$$\phi(z)=\frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1z}$$

爲 $Aut(D(0;1))$ 中的一個元素, 將 z_1 映爲 0, z_2 映爲

$$\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}.$$

於是

$$d(z_1,z_2)=d\Big(0,\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}\Big)=\log\frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}\right|}. \tag{5.3}$$

這就是 $D(0;1)$ 中任意兩點 z_1,z_2 之間的 Poincaré 距離或雙曲距離。在這個時候

$$d(z_1,z_2)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}\frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

其中取 inf 的 γ 爲曲線

$$z=\frac{z_1+\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}t}{1+\overline{z}_1\dfrac{z_2-z_1}{1-\overline{z}_1z_2}t},\qquad 0\le t\le 1,$$

即

$$z=\frac{(1-t)z_1+(t-z_1\overline{z}_1)z_2}{1-tz_1\overline{z}_1-(1-t)\overline{z}_1z_2},\qquad 0\le t\le 1.$$

從 (5.3) 式中可以看出, 當 $z_2\to z_1$ 時, $d(z_1,z_2)=0$; 當 z_1 或 z_2 趨於 $D(0;1)$ 的界點時, $d(z_1,z_2)\to+\infty$。

在第二講中我們證明了 Schwarz-Pick 引理: 若 $w=f(z)$ 爲 $D(0;1)$ 中的全純函數, 將 $D(0;1)$ 映入到 $D(0;1)$, 且 $w_1=f(z_1)$, $w_2=f(z_2)$, 則有

$$\left|\frac{w_1-w_2}{1-\overline{w}_1w_2}\right|\leqq\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\right|, \tag{5.4}$$

而等號成立的充要條件爲 $f \in Aut(D(0;1))$。

由 (5.3), 可將 (5.4) 改寫成

$$d(w_1, w_2) \leq d(z_1, z_2).$$

於是 Schwarz-Pick 引理有明確的幾何意義: 若 $w = f(z)$ 爲 $D(0;1)$ 中的全純函數, 將 $D(0;1)$ 映入到 $D(0;1)$, 則 $D(0;1)$ 中任意兩點之間的 Poincaré 距離經過映射後是不會增加的, 距離相等的充要條件爲 $f \in Aut(D(0;1))$。

由於 $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$, 故

$$-\Delta \log \lambda(z) = 2\Delta \log(1-|z|^2) = \frac{-4}{(1-|z|^2)^2},$$

故雙曲度量 $\lambda(z)$ 的曲率 $K(z,\lambda) = -1$ 對所 $z \in D(0;1)$ 都成立, 所以稱這個度量爲雙曲度量。

(3) **球度量**

若 $\Omega = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 在 $\mathbb{C}^*$ 上取度量 $\sigma(z) = \dfrac{2}{1+|z|^2}$, 即

$$ds_\sigma^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2},$$

稱這個度量爲球度量 (spherical metric) 或橢圓度量 (elliptic metric)。在第一講中我們曾介紹過球面投影 (stereographic projections), 這個投影建立了 Riemann 球面 $\mathbb{S}^2$ 上的點與 $\mathbb{C}^*$ 中的點之間的一一對應。若 $z \in \mathbb{C}^*$, 則在 $\mathbb{S}^2$ 上對應的點的座標爲

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right). \tag{5.5}$$

若 $p = (x_1, x_2, x_3)$ 及 $p' = (x_1', x_2', x_3')$ 爲 $\mathbb{S}^2$ 上的兩點, 則這兩點之間在 $\mathbb{S}^2$ 上的最短距離爲過 p 及 p' 的大圓上的弧 $\overset{\frown}{pp'}$ 的弧長。這個弧長等於

$$2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x_1x_1'-x_2x_2'-x_3x_3'}{1+x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3'}}.$$

由 (5.5), 這等於 $2\tan^{-1}\left|\dfrac{z-z'}{1+z\overline{z}'}\right|$。將這個距離作爲 $\mathbb{C}^*$ 中的一種度量, 得到 z, z' 之間的距離爲

$$d(z,z') = 2\tan^{-1}\left|\frac{z-z'}{1+z\overline{z}'}\right|.$$

顯然, 相對應的度量爲

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}.$$

這只要對 d 求微分即可得到, 也就是

$$ds^2 = \sigma(z)^2|dz|^2, \qquad \sigma(z) = \frac{2}{1+|z|^2}.$$

於是度量 $\sigma(z)$ 有十分明確的幾何意義。用度量 $\sigma(z)$ 來計算 $\mathbb{C}^*$ 中兩點的距離等於在 $\mathbb{S}^2$ 上對應的兩點之間的最短距離, 即球面距離。也就是說, 用 $\mathbb{S}^2$ 上對應兩點的球面距離爲 $\mathbb{C}^*$ 中兩點之間的距離, 於是有

$$d(z_1,z_2) = \inf_\gamma \int_\gamma \sigma(z)|dz|,$$

這裡 γ 爲連接 z_1, z_2 的任意曲線。

若 z_1, z_2 在 $\mathbb{S}^2$ 上的對應的點爲 p_1, p_2, 連接 p_1p_2 的大圓上的弧 $\widehat{p_1p_2}$, 將 $\widehat{p_1p_2}$ 經過球面投影到 $\mathbb{C}^*$ 中連接 z_1 與 z_2 的曲線 γ_0, 這 γ_0 就是使上式積分取 inf 的曲線。這是爲什麼稱度量 $\sigma(z)$ 爲球度量的原因。

不難計算得到球度量 $\sigma(z)$ 的曲率在每一點 $z\in\mathbb{C}^*$ 爲 $+1$, 所以稱這個度量爲橢圓度量。

在第三講中已經敍述過單值化定理: 任意單連通的 Riemann 曲面一定一對一地全純等價於下列三個區域之一: $\mathbb{C}$; $D(0;1)$ 以及 $\mathbb{C}^*$。這就是爲什麼要在這三個區域上來定義並討論幾何性質的原因。

若 Ω_1 及 Ω_2 爲 $\mathbb{C}$ 中的兩個區域, f 爲 Ω_1 上的全純函數, 將 Ω_1 映爲 Ω_2。若 ρ 爲 Ω_2 上的一個度量, 且 $f'\not\equiv 0$, 則

$$f^*\rho = (\rho\circ f)|f'| \tag{5.6}$$

定義了在 Ω_1 上的一個度量。這個度量稱之爲由度量 ρ 通過 $f(z)$ 拉回來 (pull back) 到 Ω_1 上的度量。要證明的是:

$$K(z, f^*\rho) = K(f(z),\rho).$$

由於

$$\Delta\log|f'(z)| = 0$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta\log(\rho_0 f(z)) &= 4\frac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}\log(\rho\circ f(z))\\ &= 4\overline{\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)}\Big(\frac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial f}\frac{\partial}{\partial \bar f}\log(\rho\circ f)\Big)\end{aligned}$$

$$= |f'(z)|^2(\Delta_f \log\rho)\circ f(z),$$

所以

$$\begin{aligned}K(z, f^*\rho) &= -\frac{|f'(z)|^2(\Delta_f \log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2|f'(z)|^2}\\ &= -\frac{(\Delta_f \log\rho)\circ f(z)}{(\rho\circ f(z))^2} = K(f(z),\rho).\end{aligned}$$

5.2. Ahlfors - Schwarz 引理

第二講中的定理 2.17給出了經典的 Schwarz 引理的解析形式。而第二講中的定理 2.19 給出了 Schwarz-Pick 引理, 這是經典的 Schwarz 引理的推廣。在上一節中, 我們給出了 Schwarz-Pick 引理的微分幾何的意義, 這是用 Poincaré 度量來刻劃的。在這一節中, 我們將討論 Schwarz 引理的另一種形式之推廣, 即 Ahlfors-Schwarz 引理, 這是用曲率來刻劃的, 而且是 Schwarz-Pick 引理的推廣。這個引理是在 1938年由 Ahlfors 所證明的 (見 [1, 2, 3]), 這個結果可以說是微分幾何進入複變函數論的開始, 也是用微分幾何的觀點來處理複分析問題的開始。

定理 5.1: (Ahlfors-Schwarz 引理) 設 $f(z)$ 爲 $D(0;1)$ 上的全純函數, f 將 $D(0;1)$ 映爲 Ω, 如果在 Ω 可以引進一個度量 ρ, 即 $ds^2_\rho = \rho^2(z)|dz|^2$, 使得曲率在 Ω 上任一點都 ≤ -1, 則

$$f^*\rho(z) \leqq \lambda(z), \tag{5.7}$$

其中 $\lambda(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$, 即 $ds^2_\rho \leq ds^2_\lambda$。

換句話說, 經過映射之後, 度量不增加。

證明: 任意固定 $r \in (0,1)$, 在以原點爲中心, r 爲半徑的圓盤 $D(0;r)$ 上定義度量

$$\lambda_r(z) = \frac{2r}{r^2 - z^2},$$

顯然, 在 $D(0;r)$ 中任一點 z 上, 其曲率均爲 -1。定義函數

$$v(z) = \frac{f^*\rho(z)}{\lambda_r(z)},$$

則在 $D(0;r)$ 上, v 是非負的連續函數。由 (5.6) 知, $f^*\rho(z) = \rho(f(z))|f'(z)|$ 在 $\overline{D(0;r)}$ 上是有界的, 且當 $|z| \to r$ 時, $\dfrac{1}{\lambda_r} \to 0$。所以當 $|z| \to 0$ 時, $v(z) \to 0$。因此 v 只能在 $D(0;r)$

中的某點 $\mathfrak{r}$ 處取到極大值 M, 如能證明: $M\leq 1$, 則在 $D(0;r)$ 上, $v\leq 1$ 成立。令 $r\to 1^-$, 即得 (5.7)。

若 $f^*\rho(\mathfrak{r})=0$, 則 $v\equiv 0$, 己無需再證。所以不妨假設 $f^*\rho(\mathfrak{r})>0$, 這時 $K(\mathfrak{r},f^*\rho)$ 是有意義的。因此, 由假設我們得到 $K(\mathfrak{r},f^*\rho)\leq -1$。由於 $\log v$ 在 $\mathfrak{r}$ 點處取極大值, 故有

$$\begin{aligned}0\geq \Delta\log v(\mathfrak{r})&=\Delta\log f^*\rho(\mathfrak{r})-\Delta\log\lambda_r(\mathfrak{r})\\&=-K(\mathfrak{r},f^*\rho)\cdot(f^*\rho(\mathfrak{r}))^2+K(\mathfrak{r},\lambda_r)(\lambda_r(\mathfrak{r}))^2\\&\geq (f^*\rho(\mathfrak{r}))^2-(\lambda_r(\mathfrak{r}))^2,\end{aligned}$$

即得

$$\frac{f^*\rho(\mathfrak{r})}{\lambda_r(\mathfrak{r})}\leq 1,$$

故 $M\leq 1$, 引理因而證畢。

若在 Ahlfors-Schwarz 引理中, $\Omega\subseteq D(0;1)$, 則可取 $\rho=\lambda$, 這樣就得到 Schwarz-Pick 引理。所以 Ahlfors-Schwarz 引理爲 Schwarz-Pick 引理的推廣。

我們還可以將 Ahlfors-Schwarz 引理寫成爲更一般的形式。

在 $D(0;1)$ 上定義度量 $(R>0)$

$$\lambda_R^\alpha(z)=\frac{2R}{\sqrt{\alpha}(R^2-|z|^2)}, \tag{5.8}$$

這裡 $\alpha>0$, 則這個度量在 $D(0;R)$ 中任一點, 其曲率均爲 $-\alpha$。

定理 5.2: (一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理) 假設 $f(z)$ 爲 $D(0;R)$ 上的全純函數, 將 $D(0;R)$ 映爲 Ω, 如在 Ω 上可以引入一個度量 ρ, 即 $ds_\rho^2=\rho^2(z)|dz|^2$, 使其曲率在 Ω 上任一點都小於等於 $-\beta$, 則

$$f^*\rho(z)\leqq\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\lambda_R^\alpha(z),$$

對每個 $z\in D(0;R)$ 都成立, 這裡 β 爲一正的常數。

定理 5.2 的證明與定理 5.1 的證明幾乎相同, 讀者可自行證明。Ahlfors-Schwarz 引理也是微分幾何中比較定理的開始之一。應用這個引理可以得到很多重要的結果, 例如: 推廣的 Liouville 定理。

5.3. Liouville 定理的推廣及值分布

第二講的定理2.8爲重要的 Liouville 定理: 任意有界整函數必爲常數。現在應用 Ahlforz-Schwarz 引理, 可以用曲率來刻劃與推廣 Liouville 定理。

定理 5.3: (推廣的 Liouville 定理) 若整函數 $f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到 Ω, 如在 Ω 上可以引進一個度量 $\rho(z)$, 使得對任意 $z \in \Omega$, 其曲率 $K(z,\rho)$ 滿足

$$K(z,\rho) \leq -\beta < 0,$$

這裡 β 爲一正的常數, 則 $f(z)$ 爲必常數。

證明: 對任意 $R > 0$, $f(z)$ 將 $D(0;R)$ 映到 Ω 之內, 由假設, 可在其上定義度量 ρ, 使得其曲率 $K(z,\rho) \leq -\beta < 0$。故由定理 5.2

$$f^*\rho(z) \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \lambda_R^\alpha(z).$$

由 (5.8) 知, 當 $R \to \infty$, $\lambda_R^\alpha(z) \to 0$, 故得 $f^*\rho(z) \leq 0$。所以 $f^*\rho(z) = 0$。由於 $f(z)$ 爲全純函數, 因此, f 必爲常數, 定理因而證畢。

由定理 5.3 可以導出古典的 Liouville 定理。

若 $f(z)$ 爲有界的整函數, 所以存在一個正常數 M, 使得 $|f(z)| \leq M$ 對所有 $z \in \mathbb{C}$ 都成立。於是全純函數 $\frac{1}{M}f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映射到 $D(0;1)$ 之內。而在 $D(0;1)$ 上, 顯然可以取度量 λ, 其曲率爲 -1, 故在定理 5.3 中取 $\beta = 1$, 即得 $\frac{1}{M}f(z)$ 必爲常數, 因而 $f(z)$ 必爲常數, 這便證明 Liouville 定理。由此可見, 定理 5.3 是 Liouville 定理的微分幾何形式之推廣。

由 Liouville 定理知道: 若整函數 $w = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到有界區域, 則 $f(z)$ 必爲常數。若整函數 $w = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到無界的區域 Ω, 如果 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 的面積 > 0, 那麼我們仍可證明 $f(z)$ 必爲常數。這可以證明如下: 若 $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, 且爲內點。作變換 $w_1 = w - w_0$, 則 $w_1 = 0$ 位於 $f(\mathbb{C}) - w_0$ 的餘集合之中。作變換 $w_2 = \dfrac{1}{w - w_0}$, 則 w_2 將 $\mathbb{C}$ 映到有界區域, 於是 w_2 爲常數 c。由 $c = \dfrac{1}{w - w_0}$, 即得 w 也是一個常數。

現在我們可以進一步的問, 若整函數 $w = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到無界區域 Ω, 而 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 的面積爲零, 即 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 是由一個曲線組成, 這時候 $f(z)$ 是否仍爲常數呢?

我們來看一看下面的例子。

若整函數 $w = u + iv = f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映爲 $\mathbb{C} \setminus \{u + i0 \mid 0 \leq u \leq 1\}$。作變換

$$w_1 = u_1 + iv_1 = \phi(w) = \frac{w}{w-1},$$

將 $\mathbb{C}$ 映爲 $\mathbb{C} \setminus \{u_1 + i0 : u_1 \leq 0\}$。作變換 $w_2 = r(w_1) = \sqrt{w_1}$, 這裡開方取主要分支 (principal branch), 則 w_2 將 $\mathbb{C}$ 映爲右半平面。再作 Cayley 變換

$$w_3 = \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1} = s(w_2),$$

將右半平面映爲單位圓盤 $D(0;1)$, 於是由 Liouville 定理知道, w_3 是常數, 這便導出 w_2, w_1 及 w 均爲常數。

由此可見, 整函數 $w=f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映到無界區域 Ω, 即使 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 是一個線段, 這個整函數仍可能爲常數, 不但如此, 顯然可見, 我們可以取這個線段的長度爲任意小的正數, 這時 $f(z)$ 仍爲常數。

接下來的問題便是: $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 是多小時, $f(z)$ 才不是常數呢? 我們先考慮另一個極端的例子。整函數 $f(z)=e^z$ 將 $\mathbb{C}$ 映到 $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 所以如果 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 爲一點的話, 就有例子存在, 使得 $f(z)$ 不是常數。那麼如果 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 爲兩個點的話, $f(z)$ 是不是常數呢? 其答案便是 Picard 小定理了!

5.4. Picard 小定理 (Picard Little Theorem)

定理 5.4: (Picard 小定理) 若整函數 $w=f(z)$ 將 $\mathbb{C}$ 映爲 Ω, 而 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含兩點, 則 $f(z)$ 必爲常數。換句話說: 非常數的整函數取到 $\mathbb{C}$ 中所有的值除了一個可能的例外點。

爲了證 Picard 小定理, 我們先證明下面的定理。

定理 5.5: 若 Ω 爲 $\mathbb{C}$ 中的開集合, $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含有兩點, 則在 Ω 上可以引進一個度量 μ, 使得曲率 $K(z,\mu)$ 在 Ω 的每一點都滿足

$$K(z,\mu)\le -\beta<0,$$

這裡 β 爲正的常數。

由定理 5.5 我們立即推出定理 5.4。這是因爲: 若 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 至少包含有兩個點, 則由定理 5.5 知道存在一個度量 μ, 使得其曲率在 Ω 上每一個點都滿足 $K(z,\mu)\le-\beta<0$, 而 β 爲正的常數, 再由推廣的 Liouville 定理知, $f(z)$ 必爲一常數函數。

定理 5.5 的證明:

在 $\mathbb{C}\setminus\Omega$ 中取兩點, 並用線性變換將這兩點變爲 0 與 1。記 $\mathbb{C}_{0,1}=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上作度量

$$\mu(z)=\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\cdot\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}},$$

則 $\mu(z)$ 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上爲正的, 光滑的函數。現在來計算 μ 的曲率, 且證明其値爲負的。

首先看到

$$\Delta(\log|z|^{5/6})=\frac{5}{12}\Delta(\log|z|^2)=0,$$

所以

$$\Delta\log\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}=\frac{1}{2}\Delta\Big(\log(1+|z|^{1/3})\Big)$$
$$=2\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left[\log\Big(1+(z\cdot\overline{z})^{1/6}\Big)\right]=\frac{1}{18|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2},$$

同樣可以得到

$$\Delta\log\left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}\right]=\frac{1}{18|z-1|^{5/3}(1+|z-1|^{1/3})^2}.$$

於是曲率

$$K(z,\mu)=-\frac{1}{18}\left[\frac{|z-1|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})^3(1+|z-1|^{1/3})}+\frac{|z|^{5/3}}{(1+|z|^{1/3})(1+|z-1|^{1/3})^3}\right],$$

可以看出

(a) $K(z,\mu)<0,\ \forall\ z\in\mathbb{C}_{0,1}$;

(b) $\lim\limits_{z\to 0}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$;

(c) $\lim\limits_{z\to 1}K(z,\mu)=-\dfrac{1}{36}$;

(d) $\lim\limits_{z\to\infty}K(z,\mu)=-\infty$;

故 $K(z,\mu)$ 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上有一個負常數 $-\beta$ 作爲其上界, 這就證明了定理 5.5。

以下我們還要證明更爲深刻的 Picard 大定理 (Picard Large Theorem), 這就是 Picard 小定理的深化。爲了證明 Picard 大定理, 我們先要推廣正規族的概念。

5.5. 正規族的推廣

在第四講中我們曾提到了正規族的概念, 並用此來證明 Riemann 映射定理。現在來推廣這個概念。

定義 5.1. 若 $\{g_n\}$ 爲區域 Ω 上的複值函數序列 (函數未必全純), 若對任給的 $\varepsilon>0$ 及 Ω 中任一緊緻集合 K, 一定存在一個只依賴於 ε 及 K 的正整數 N, 使得 $n>N$ 時

$$|g_n(z)-g(z)|<\varepsilon\qquad\forall\ z\in K$$

都成立, 則稱 $\{g_n\}$ 在 Ω 上正規收斂 (normally convergent)。

若對 Ω 中的任一緊緻集合 K, 及 $\mathbb{C}$ 中的任一緊緻集合 V, 一定存在一個只依賴於 K 及 V 的正整數 N, 使得 $n>N$ 時, $g_n(z)\notin V$ 對任意的 $z\in K$ 都成立, 則稱 $\{g_n\}$ 在 Ω 上為緊緻發散 (compactly divergent)。

即若 $\{g_n\}$ 在 Ω 上任一緊緻集合上一致發散到 ∞, 則稱 $\{g_n\}$ 為緊緻發散。

定義 5.2. 若 $\mathfrak{F}$ 為區域 Ω 上複值函數族, 如果 $\mathfrak{F}$ 中任一序列或是有子序列正規收斂, 或是有子序列緊緻發散, 則稱 $\mathfrak{F}$ 為正規族 (normal family)。

定義 5.2 是第四講中定義 4.1 的推廣。

例 5.1. $\mathfrak{F}=\{f_n\}$, $f_n=z^n$, $n=1,2,\ldots$.
(a) $\mathfrak{F}$ 在 $D(0;1)$ 上是正規族, 因任一子序列正規族收斂於零。
(b) $\mathfrak{F}$ 在 $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ 上是正規族, 因任一子序列緊緻發散。
(c) $\mathfrak{F}$ 在任一包含有單位圓周 $\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 上任一點作為內點的區域上不是正規族, 因為任一子序列在圓內的點收斂於零, 在圓外的點上發散。

由定義 5.2, 我們可得到下面的結果:

定理 5.6: (Montel 定理)

若 $\mathfrak{F}$ 為區域 Ω 上的全純函數族, 若對 Ω 中任一緊緻集合 K, 存在常數 M_K, 使得

$$|f(z)|\le M_K, \tag{5.9}$$

對每個 $z\in K$, 每個 $f\in\mathfrak{F}$ 都成立, 則 $\mathfrak{F}$ 為正規族。如果

$$|f(z)|\le M,$$

對所有 $z\in\Omega$, 每個 $f\in\mathfrak{F}$ 都成立, 則 $\mathfrak{F}$ 為正規族。

由於 $\mathfrak{F}$ 為全純函數族且滿足條件 (5.9), 故不可能有緊緻發散的情形, 所以由第四講中定理 4.3 的 Montel 定理知, 定理 5.6 成立。

為了推廣正規族的概念到亞純函數族, 我們用 $\mathbb{S}^2$ 上的球距離來替代 $\mathbb{C}$ 上的歐氏距離, 這時候 $\mathbb{C}^*$ 上的亞純函數是正規族可定義如下:

定義 5.3. 若 $\mathfrak{F}$ 為區域 $\Omega\subset\mathbb{C}^*$ 上的亞純函數族, 如果 $\mathfrak{F}$ 的任一序列一定存在一個子序列, 在 Ω 上在球距離的意義下是正規收斂的, 則稱 $\mathfrak{F}$ 為正規族。

這個定義的形式與第四講中正規族的定義 (定義 4.1) 是一致的, 只是在定義 5.3 中我們用球距離替代了歐氏距離。不難看出, 定義 5.2 相容於定義 5.3, 這也只要用球距離來替代歐氏距離。與 Montel 定理相仿, 對亞純函數族我們有如下的 Marty 定理。

定理 5.7: (Marty 定理) 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的亞純函數族, 則 $\mathfrak{F}$ 爲正規族的充要條件爲

$$\{f^*\sigma : f \in \mathfrak{F}\}. \tag{5.10}$$

在 Ω 的任一緊緻集合上一致有界, 這裡 σ 爲球度量, 即對 Ω 中任一緊緻集合 K, 存在常數 M_K, 使得

$$\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \le M_K, \tag{5.11}$$

對任意 $z \in K$, 任意 $f \in \mathfrak{F}$ 都一致成立。

證明: (5.10) 在 Ω 上的任一緊緻集合上一致有界與 (5.11) 式爲等價是顯然的。假設 (5.11) 成立, 則

$$\begin{aligned} d\Big(f(z_1), f(z_2)\Big) &= \inf \int_\gamma ds = \inf \int_{\gamma'} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz| \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}|dz| \leqq M_K \cdot |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

這裡 γ 是連接 $f(z_1)$ 與 $f(z_2)$ 且全在 K 中的曲線, γ' 爲 $f^{-1}(\gamma)$, γ_0 爲從 z_1 到 z_2 的直線段。故在球距離的意義下, f 是等度連續的, 而 $f(z)$ 是一致有界的, 故由 Arzela-Ascoli 定理 (第四講的定理 4.4), $\mathfrak{F}$ 爲一正規族。

反之, 如 $\mathfrak{F}$ 爲正規族, 我們要導出 (5.11) 式成立。我們用反證法, 如果 (5.11) 不成立, 則在 Ω 中存在緊緻集合 E 及 $\mathfrak{F}$ 中的序列 $\{f_n\}$, 使得 $\max\limits_{z\in E} f_n^*\sigma(z)$ 無界。由於 $\mathfrak{F}$ 爲正規族, 故在 $\{f_n\}$ 中存在子序列 $\{f_{n_j}\}$ 使得當 $n_j \to \infty$ 時, $f_{n_j} \to f$ 在 E 上一致成立。在 E 的每一點, 可以有一閉圓盤 $\overline{D}$, $\overline{D} \subset \Omega$, 在 $\overline{D}$ 中或者 f 是全純或者 $\dfrac{1}{f}$ 是全純。若 f 爲全純, 則在 $\overline{D}$ 上有界, 由於 $\{f_{n_j}\}$ 是在球距離意義下收斂, 所以當 n_j 充分大時, $\{f_{n_j}\}$ 在 $\overline{D}$ 內沒有極點。由第三講中的 Weierstrass 定理知, $f_{n_j}^*\sigma$ 在此 $\overline{D}$ 小一點的圓盤上一致收斂到 $f^*\sigma$。由於 $f^*\sigma$ 是連續函數, 故 $f_{n_j}^*\sigma$ 在小一點的圓盤上是有界的。同樣, 若 $\dfrac{1}{f}$ 是全純的情形, 用同樣的方法可證 $\left(\dfrac{1}{f_{n_j}}\right)^*\sigma$ 在小一點的圓盤上是有界的。但是 $\left(\dfrac{1}{f_{n_j}}\right)^*\sigma = f_{n_j}^*\sigma$ 故可以推得 $f_{n_j}^*\sigma$ 在小一點的圓盤上是有界的。由於 E 爲緊緻集合, 故可以用有限個這樣的小圓盤來覆蓋它, 這樣我們便可得到: $f_{n_j}^*\sigma$ 在 E 上是有界的, 這與假設矛盾, 定理的證明因而完畢。

由 Marty 定理, 可以導出如下的 Montel 定理。

定理 5.8: (Montel 定理) 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的亞純函數族, P, Q, R 爲三個不同的點, 如果 $\mathfrak{F}$ 中的任一函數取値於 $\mathbb{C}^* \setminus \{P, Q, R\}$, 則 $\mathfrak{F}$ 爲正規族。

證明: 用分式線性變換將 P, Q, R 三點變爲 $P=0$, $Q=1$ 及 $R=\infty$, 於是只要證明: 全純函數族中任一函數如不取 $P=0$, $Q=1$, 則此函數族爲正規族。即在 $\mathbb{C}_{0,1}=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 上取值的全純函數族成爲正規族。這只要證明: 對 Ω 中任一圓盤 $D(z_0;R)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<R\}\subseteq\Omega$ 中, $\mathfrak{F}$ 成爲正規族即可。我們不妨假設 $z_0=0$, 在上一節中我們已構造了度量 μ, 將 μ 乘以常數 c (仍記作 μ), 使得其曲率的上界爲 -1。由一般形式的 Ahlfors-Schwarz 引理得到: 對任一 $f\in\mathfrak{F}$ 我們有

$$f^*\mu(z)\le\lambda_R^\alpha(z),$$

即

$$\mu(f(z))\Big|\frac{df}{dz}\Big|\le\frac{2R}{\sqrt{\alpha}(R^2-|z|^2)},\tag{5.12}$$

對每個 $z\in D(0;R)$ 都成立。

將球度量 $\sigma(w)$ 與 $\mu(w)$ 在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 中作比較, 顯然, 當 $w\to 0$, 或是 $w\to 1$, 或是 $w\to\infty$ 時,

$$\frac{\sigma(w)}{\mu(w)}=\frac{2/(1+|w|^2)}{c(1+|w|^{1/3})^{1/2}(1+|w-1|^{1/3})^{1/2}/[|w|^{5/6}|w-1|^{5/6}]}\to 0.$$

故存在正的常數 M, 使得 $\sigma(w)\le M\mu(w)$, 於是由 (5.12) 知, 當 $z\in D(0;R)$ 時,

$$\begin{aligned}f^*\sigma(z)=\sigma(f(z))\Big|\frac{df}{dz}\Big|&\le M\mu(f(z))\Big|\frac{df}{dz}\Big|\\&=Mf^*\mu(z)\le M\lambda_R^\alpha(z)=\frac{2RM}{\sqrt{\alpha}(R^2-|z|^2)}\end{aligned}$$

成立。故 $f^*\sigma$ 在 $D(0;R)$ 的緊緻集合上有界, 且界不依賴於 $f\in\mathfrak{F}$。由 Marty 定理得知, $\mathfrak{F}$ 爲一正規族。定理因而證畢。

在證明定理 5.8 的過程中, 我們還證明了下面的結果。

定理 5.9: (Montel 定理) 若 $\mathfrak{F}$ 爲區域 Ω 上的全純函數族, 對 $\mathfrak{F}$ 中的每一個函數, 如均不取相同的兩個複數, 則稱爲正規族。

5.6. Picard 大定理 (Picard Large Theorem)

回顧在第三講所證明的 Weierstrass 定理: 若 $f(z)$ 在 $D'(0;r)=D(0;r)\setminus\{0\}$ 中全純, 而 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的本性奇異點, 則 $f(z)$ 在 $D'(0;r)$ 中能取到的值在 $\mathbb{C}$ 中是稠密的。

Picard 大定理將進一步刻劃函數在本性奇異點附近的值分佈。

定理 5.10: (Picard 大定理) 若 $f(z)$ 在 $D'(0;r)$ 中全純, 而 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的本性奇異點, 則 $f(z)$ 在 $z=0$ 點的任意鄰域中可取到 $\mathbb{C}$ 中任意值最多除去一個例外點。當然, 以任一點 z 來代替 $z=0$, 其結論依然成立。

顯然, Picard 大定理是 Weierstrass 定理的深化, 也是 Picard 小定理的推廣。在第三講中已經討論過, 若 $f(z)$ 爲整函數, 且 $f(z)$ 在無窮遠點爲極點, 則 $f(z)$ 爲多項式。由代數基本定理 (第二講定理 2.10), $f(z)$ 可以取 $\mathbb{C}$ 中任何值。若 $f(z)$ 在無窮遠處爲可去奇異點, 則 $f(z)$ 爲有界整函數, 由 Liouville 定理, $f(z)$ 必爲常數函數。若 $f(z)$ 在無窮遠處爲本性奇異點, 則由 Picard 大定理, $f(z)$ 在無窮遠點附近可以取 $\mathbb{C}$ 的任何值, 最多除去一個例外點。這就導出了 Picard 小定理。因此, Picard 小定理是 Picard 大定理的推論。現在我們應用 5.5 節中的結果來證明定理 5.10。

Picard 大定理的證明: 我們利用反證法。若 Picard 大定理不成立, 不妨假設 $f(z)$ 在 $D'(0;1)$ 上全純, f 將 $D'(0;1)$ 映到的區域不取 $0, 1$ 兩點來證明: $z=0$ 必爲 $f(z)$ 的可去奇異點或極點, 這樣便得到矛盾!

定義 $f_n(z) = f\left(\dfrac{z}{n}\right)$, $0<|z|<1$, 作全純函數族 $\mathfrak{F}=\{f_n\}$, $\mathfrak{F}$ 取值於 $\mathbb{C}_{0,1}$。由定理 5.9 (Montel 定理) 知, $\mathfrak{F}$ 爲一正規族。因此, 在 $\{f_n\}$ 中存在子序列 $\{f_{n_k}\}$, 或是正規收斂, 或是緊緻發散。若 $\{f_{n_k}\}$ 是正規收斂, 則 $\{f_{n_k}\}$ 在 $D'(0;1)$ 的任一緊緻集合上一致收斂, 所以是有界的。特別在 $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=\dfrac{1}{2}\right\}$ 上有界 M, 此即 $f(z)$ 在 $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|=\dfrac{1}{2N_k}\right\}$ 上有界 M。由最大模原理, f 在 $0<|z|<\dfrac{1}{2}$ 上有界 M, 故 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點。

若 $\{f_{n_k}\}$ 爲緊緻發散, 則用同樣的方法可證, $\dfrac{1}{f}\to 0$, 當 $z\to 0$, 即 $f\to\infty$, 當 $z\to 0$, 所以 $z=0$ 爲 $f(z)$ 的極點, 這便證明了 Picard 大定理。

儘管 Picard 大定理與 Picard 小定理是複變函數論中, 尤其是値分佈理論中最重要的結果之一, 但一般大學基礎教材中並不講這兩個定理, 原因是這些定理的證明涉及橢圓函數比較困難。自從 Picard 證明了這兩個定理之後, 有不少簡化的證明出現, 在本講中我們是選用了微分幾何的方法來證明。這是 L. V. Ahlfors [2] 於 1938 年建立起極爲重要的 Ahlfors-Schwarz 引理, 1939 年 R. M. Robinson [10] 就沿著這個想法, 用微分幾何的方法, 而不用橢圓函數來證明 Picard 定理。在此之後, 有不少進展, 如 H. Grauert 及 H. Reckziegel [5]; Z. Kobayashi [6]; L. Zalcman [11]; D. Minda 及 G. Schober [9] 與 S. G. Krantz [7, 8] 等人的工作。本講就是參考了上述的文獻, 尤其是 Minda 及 Schober 與 Krantz 的工作所寫成的。這樣寫法的優點不僅是化簡了 Picard 定理的證明, 也開始了用微分幾何的方法來處理複分析的問題; 不但如此, 這裡所用來證明 Picard 大小定理的方法, 還可以用來證明複分析中其它的重要結果, 例如 Bloch 定理, Landau 定理及 Schottky 定理, 我們在此只陳述這三個定理而不給予證明, 有興趣的讀者可以參閱上述的文獻以及 L. V. Ahlfors [3], J. B. Conway [4] 與 Gong-Gong [19] 的著作。

Bloch 定理: 若 $f(z)$ 在單位圓盤 $D(0;1)$ 上全純, 且 $f'(0)=1$, 則 $f(D)$ 一定包有一個以 δ 爲半徑的圓盤, 這裡 δ 是一個不依賴於 f 的正常數。

Landau 定理: 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ $(a_1\neq 0)$ 爲 $D(0;r)$ 上的全純函數, f 不取 0, 1 兩點, 則 $r\le R(a_0,a_1)$, 這裡 $R(a_0,a_1)$ 爲只依賴於 a_0, a_1 的常數。

Schottky 定理: 若 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ 爲 $D(0;r)$ 中的全純函數, f 不取 0, 1 兩點, 則對每個 $0<\theta<1$, 存在只依賴於 a_0 及 θ 的常數 $M(a_0,\theta)$, 使得 $|f(z)|\le M(a_0,\theta)$ 對所有 $|z|\le\theta r$ 都成立。

在證明 Picard 大小定理的過程中, 我們在 $\mathbb{C}_{0,1}$ 上構造了度量 μ, 這是證明過程中很關鍵的一步。對每個度量要求其曲率有負的上界, 且存在正的常數 M, 使得 $\sigma\le M\mu$ 成立。(這裡 $\sigma(z)=\dfrac{2}{1+|z|^2}$ 爲 $\mathbb{C}^*$ 上的球度量) 滿足這樣性質的度量當然不只本講中所給出的

$$\mu(z)=\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}}\cdot\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}}.$$

我們還可構造出其他度量也可滿足上述的要求, 有興趣的讀者可以參考 R. M Robinson [10] 的文獻。

附錄 B

在第二講定理 2.2 我們證明了在單複變中非常重要的 Cauchy 積分公式, 即 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲 Ω 的 C' 邊界, $f(z)$ 爲 Ω 上的全純函數, 且 $f(z)\in C'(\overline{\Omega})$, 則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

這個積分公式在複變函數論中的重要性已毋庸多說, 它不但有著函數論本身的重要意義, 而且是研究奇異積分, 邊界值問題等不可缺乏的工具。現在我們試著將這個公式推廣到高維去, 從而討論一下多複變函數論與單複變函數論在本質上有何差異。如同其他數學理論, 從一維推廣到高維, 其中一部分是可以沒有多大困難平行推過去的。爲簡單起見, 這裡只討論兩個複變數的情形, 即在 $\mathbb{C}^2=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中討論。下面這個定理, 我們只敍述其結果而不給予證明, 讀者只要應用兩次單複變全純函數的 Cauchy 積分公式即可證明其結果。

定理 B.1 (Cauchy 積分公式) 設 $w=(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2$, $r>0$.

$D^2(w;r)=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1-w_1|<r,|z_2-w_2|<r\}$ 爲以 w 爲中心, 以 r 爲半徑的雙圓柱 (bidisk), 若 $f(z)$ 在 $\overline{D^2(w;r)}$ 上全純, 則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(w_1;r)}\int_{\partial D(w_2;r)}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1-z_1)(\zeta_2-z_2)}d\zeta_1\zeta_2$$

對任意的 $z \in D^2(w;r)$ 都成立。

但如果我們將 $D^2(w;r)$ 換成一般的區域, 情形便不是那麼簡單! 我們現在從外微分形式的觀點來看一下單複變中的 Cauchy 核: $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z}d\zeta$. 由於當 $z \neq \zeta$ 時,

$$d\Big(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z}d\zeta\Big) = 0,$$

這裡 d 是對 ζ 作用, 所以應用 Stokes 定理, 立即可以得到 Cauchy 積分公式。

於是從外微分形式的觀點, 問題便變成: 對於 $\mathbb{C}^2$ 中的區域 Ω, 可否找到一個外微分形式滿足下列四個條件:

(1) 對在 Ω 中全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續的函數 $f(z)$, 具有再生性質 (reproducing property):

$$f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z \in \Omega \tag{B.1}$$

這裡 $d\sigma_w$ 爲 $\partial\Omega$ 上的 Lebesgue 面積元素。

(2) 式 (B.1) 當 $z \in \Omega$ 時 不是奇異積分, 而 $z \in \partial\Omega$ 時爲奇異積分。

(3) 當 $z \in \overline{\Omega}$, $w \in \partial\Omega$, $w \neq z$ 時, $H(z,w) \in C^\infty$, 對每個 $w \in \partial\Omega$, $H(z,w)$ 在 $z \in \overline{\Omega}\backslash\{w\}$ 中全純。

(4) 可以應用 Stokes 定理在這個核上。

這方面最重要的核是 Cauchy-Fantappiè 核。設 Ω 爲 $\mathbb{C}^n$ 中任意開集合, $z \in \mathbb{C}^n$ 爲固定參數, $g_1(z,w),\dots,g_n(z,w)$ 是在 $w \in \Omega$ 上的光滑的 w 複值函數。Cauchy-Fantappiè 形式 (簡稱爲 C-F form C-F 形式) 爲

$$K(z,w) \equiv \frac{c_n}{g_n}\omega dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n, \tag{B.2}$$

此處

$$\omega = g_1\overline{\partial}g_2 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}g_n - g_2\overline{\partial}g_1 \wedge \overline{\partial}g_3 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}g_n + \cdots + (-1)^n g_n\overline{\partial}g_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}g_{n-1}$$
$$C_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!(2\pi i)^{-n}.$$

$K(z,w)$ 爲 w 的 $(n,n-1)$ 形式, 以 z 爲參數, 在使 $g(z,w) \neq 0$ 的 Ω 的部分集合上定義。我們可以證明 (參看 Koppelman [15]):

若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 爲有界, 光滑的區域, 當 $z \in \Omega$, w 在 $\partial\Omega$ 的鄰域時, $K(z,w)$ 爲一 Cauchy-Fantappié 形式。若 f 在 Ω 中全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則

$$f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} K(z,w)f(w).$$

我們還可以證明 (參看 Norguet [17]), Cauchy-Fantappiè 形式 (B.2) 中的分子可以寫成

$$c_n\omega\wedge dw_1\wedge\cdots\wedge dw_n=\frac{1}{(2\pi i)^n}G\wedge(\overline{\partial}G)^{n-1},$$

這裡 G 爲 $(1,0)$ 形式

$$G=\sum_{j=1}^{n}g_j(z,w)dw_j,$$

而 ∂ 是對 w 作用的, 指數 $n-1$ 表示 $n-1$ 次外乘積。

對於 $\mathbb{C}^n$ 中的單位球 $|z|^2<1$, 我們可以選取 $g_j(z,w)=\overline{w}_j$, 於是當 $z\in\Omega$, $w\in\partial\Omega$ 時, 則

$$g=\sum_{j=1}^{n}(w_j-z_j)g_j=\sum_{j=1}^{n}(w_j-z_j)\overline{w}_j=1-z\cdot\overline{w}\neq 0.$$

此時

$$G=\sum_{j=1}^{n}\overline{w}_jdw_j=\partial\phi,\qquad \phi=|w|^2.$$

於是 (B.2) 的分子成爲

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\partial\phi\wedge(\overline{\partial}\partial\phi)^{n-1}=Cd\sigma_w.$$

由於

$$\int_{|w|^2=1}\frac{Cd\sigma_w}{(1-z\cdot\overline{w})^n}=1,$$

我們可以直接算出 $C=w_{n-1}^{-1}$, 這裡 w_{n-1} 是 $|w|^2=1$ 的表面積。

現在我們從另外一個角度來討論 Cauchy 核, 也就是用泛函分析的角度來討 Cauchy 核。考慮 $\mathbb{C}$ 中單位圓盤 $|z|<1$, 邊界爲 $w=e^{i\theta}$, 則 Cauchy 核可以寫成

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dw}{w-z}=\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{1-ze^{-i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}z^ke^{-ik\theta}d\theta.$$

顯然, $\left\{\dfrac{z^k}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $|z|<1$ 中全純函數族的完備正交系; 而 $\left\{\dfrac{w^k}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 是在 $|w|=1$ 上的連續函數族的就範正交系。這樣我們便可得到: 在 $|z|\leq 1$ 上連續, 在 $|z|<1$ 中全純的函數, 可以用 Cauchy 積分表示出來, 即 Cauchy 核對這類函數有再生性質, 從這種觀點下得到的核, 我們稱之爲 Szegö 核。我們不要把 Cauchy 核與 Szegö 核的觀念混淆; 當 $\mathbb{C}$ 中的區域不是單位圓盤時, 所得到的 Szegö 核就不再是 $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dw}{w-z}$。Szegö 核的再生性質是從泛函分析 (Hilbert 空間) 的角度來考慮, 而 Cauchy 核則以 Stokes 定理作爲出發點!

想把單複變的 Szegö 核推廣到高維度的複數空間 $\mathbb{C}^n$ 中的區域上去, 只要找到 $\mathbb{C}^n$ 中的一組函數 $\{\phi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\phi_k(z)\}$ 對 Ω 中的全純函數而言是完備正交系, 在 Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 上 (或其中一部分, 如特徵流形 Characteristic manifold 上), $\{\phi_k(z)\}$ 是就範正交的, 加上

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(w)}, \qquad z \in \Omega, \quad w \in \partial\Omega,$$

是一致收斂的條件, 我們便得到想要的 Szegö 核。

我們可以證明 (參看華羅庚的著作 [12]) 下面定理:

若 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是圓型, 有界, 單連通區域且包含原點, 而且對原點而言, Ω是星狀的。假設 Ω 的特徵流形是 $\mathcal{L}$, 且 $\mathcal{L}$ 也是圓型, 緊緻的, 則 Ω 的 Szegö 核是存在的!

在華羅庚的文章中並給出 $\phi_k(z)$ 的具體構造方法。這時 $\phi_k(z)$ 均爲 z 的齊次多項式, 從而可以得到 Szegö 核。例如, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, 且 $|z| < 1$, $|w| = 1$, 則其 Szegö 核爲

$$\omega_{n-1}^{-1}(1 - z \cdot \overline{w})^{-n} d\sigma_w.$$

$\omega_{n-1} = 2\pi^n/\Gamma(n)$ 爲 $|w| = 1$ 的表面積, 而 $d\sigma_w$ 爲 $|w|^2 = 1$ 的體積元素 (Volume element)。$\mathbb{C}^n$ 中單位球的 Szegö 核是如此簡潔, 但對這樣一個重要不可約區域, 直到華羅庚在 1958 年出版他的名著時才正式將之寫下來。

綜合以上的討論, 在 $\mathbb{C}^n$ 中的單位球面上的 Szegö 核與 Cauchy-Fantappiè 核是一樣的, 而且這個核滿足我們想要的 (1)$-$(4) 之條件。但對一般的區域而言, 這兩個核是不相同的, 事實上 Kerzman 與 Stein 證明在 Ω 上的 Szegö 核與 Cauchy-Fantappiè 核相等, 若且唯若 Ω 是單位球面。不但如此, 如果 Ω 是任意區域, 或是 $g_j(z, w)$ 任意選取, 這樣得到的 Cauchy-Fantappiè 核未必滿足所要求的條件 (1)$-$(4), 尤其是條件 (3): 對每個 $w \in \partial\Omega$, $K(z, w)$ 在 $z \in \overline{\Omega} \setminus \{w\}$ 中爲全純, 例如: Ω 爲 $\mathbb{C}^n$ 中有界光滑的區域, 取

$$g_j(z, w) = \overline{w}_j - \overline{z}_j,$$

這樣得到的 Cauchy-Fantappiè 核爲

$$\begin{aligned} K(z, w) = C \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{1}{[r(w-z)]^{2n-2}} dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_n \\ \wedge d\overline{w}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{w}_{k-1} \wedge d\overline{w}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{w}_k \end{aligned} \tag{B.3}$$

$w \in \partial\Omega$, $z \in \Omega$, 這裡 $r(w - z)$ 表示 z 與 w 兩點的歐氏距離。

(B.3) 即爲著名的 Bochner-Martinelli 核。這個核雖然有簡潔的形式, 再生性質等, 但當 $z \in \overline{\Omega} \setminus \{w\}$ 時, 它不是 z 的全純函數!

現在問題是: 對於怎樣的區域, 我們才可以找到滿足條件 (1)−(4) 的 Cauchy-Fantappiè 核? 分別在 1969 年, Henkin [12] 及 1970 年 Ramirez [13] 及在之後的 1978 年, Kerzman 與 Stein [16] 在這個問題上有了突破性的貢獻。他們對於強擬凸域 (strongly pseudoconvex domain) 分別用 $\overline{\partial}$ 問題的解及層論的方法, 給出了滿足上面提到的 (1)−(4) 條件的 Cauchy-Fantappiè 核, 現在通稱爲 Henkin-Ramirez 核及 Kerzman-Stein 核。由於這些方法不可能在此作詳細討論, 我們只作一個概括性的介紹, 有興趣的讀者可以參閱他們原來的著作。

我們先來介紹一下什麼叫強擬凸域。

定義 B.1 若 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ 爲一有界, 光滑的區域。這區域由函數 ρ 所定義, ρ 爲實值函數, 且在 $\overline{\Omega}$ 上爲光滑, $\rho(z) < 0$, 若 $z \in \Omega$; $\rho(z) = 0$, 若 $z \in \partial\Omega$; $\rho(z) > 0$, 若 $z \notin \overline{\Omega}$; $\nabla\rho(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial\Omega$, 以及

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k \geq C|w|^2, \tag{B.4}$$

對任意的 $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ 都成立, 其中 C 爲一與 $z \in \overline{\Omega}$ 無關的常數, 則 Ω 稱爲一強擬凸域。

條件 (B.4) 表示對於每個由 w 決定的複方向, ρ 爲次調和函數 (subharmonic function)。

現在我們來看一下 Henkin-Ramirez 核的構造過程。

(a) 局部的預備工作。

對 $z \in \Omega$, $w \in \partial\Omega$ 而且 z “靠近” w, 令

$$g_j(z,w) = \frac{\partial \rho}{\partial w_j}(w) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_j \partial \overline{w}_k}(w)(z_j - w_j),$$

所以在 (B.2) 式中關鍵的部分 $g(z,w) \neq 0$, 這是因爲當我們考慮 ρ 在 W 的 Tayler 展開式

$$\rho(z) = \rho(w) + 2Re\left[\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_\ell}(w)(z_\ell - w_\ell) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_j \partial w_k}(w)(z_j - w_j)(z_k - w_k)\right]$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial w_j \partial \overline{w}_k}(w)(z_j - w_j)\overline{(z_k - w_k)} + 3\text{階餘項},$$

將上式與 (B.2) 式的 $g(z,w)$ 比較, 我們便得到

$$\rho(z) = \rho(w) - 2Re\, g(w,z) + L(z,w).$$

因爲 (B.4) 式, 我們知道

$$L(z,w) \geq C|w \cdot z|^2.$$

由於 $\rho(z) < 0$ 及 $\rho(w) = 0$, 這便得到

$$Re\, g(z,w) \geq C|w-z|^2 > 0.$$

因此, $g(w,z) \neq 0$, 顯然, $g_j(z,w)$ 爲 z 的全純函數且整個構造的過程是光滑地依賴著 $w \in \partial\Omega$。

(b) 將局部函數擴展到整體。

我們將步驟 (a) 所構造的函數記作 $g_j^L(z,w)$ 及 $g^L(z,w)$, 現在要將它們 "擴展" 到一個新的整體函數 $g_j(z,w)$ 及 $g(z,w)$ 上去。這個函數 $g(z,w)$ 當 $z \in \overline{\Omega}$ 時爲全純的, 當 $z \in \overline{\Omega} \setminus \{w\}$ 時, $g(z,w) \neq 0$。"擴展" 的意思爲: 當 z 靠近 w 時,

$$g(z,w) = g^L(z,w)\phi(z,w),$$

這裡 $\phi(z,w)$ 爲局部定義的函數 (當 z 靠近 w 時), 且爲 z 的全純函數, 而且 $\phi(w,w) \neq 0$, 於是 $g(z,w)$ 與 $g^L(z,w)$ 當 z 靠近 w 時有相同的零點, 這樣得到了 $g(z,w)$ 之後, 我們可以用解除法問題 (division problem)

$$g(z,w) = \sum_{j=1}^{n} g_j(z,w)(z_j - w_j),$$

來求得 $g_j(w,z)$, 這樣求得的 $g_j(z,w)$ 是 z 的全純函數。這便是 Henkin-Ramirez 核構造的大致情形。

至於 Kerzman - Stein 核的構造過程, 我們也略述如下: 構造局部函數 $g_j^L(z,w)$ 與 Henkin-Ramirez 核的過程是一樣的, 但其將 $g_j^L(z,w)$ 直接 "擴展", 即當 z 靠近 w 時

$$g_j(z,w) = g_j^L(z,w), \qquad z \in \Omega, \quad w \in \partial\Omega,$$

這樣得到的 Cauchy-Fantappiè 形式記作 $E(z,w)$ (essential part), 而這個 $E(z,w)$ 當 z 靠近 w 時是 z 的全純函數。然後我們要加上一個 "修正" 部分 $C(z,w)$ (corrected part) 使得

$$H(z,w) = E(z,w) + C(z,w),$$

在整體是 z 的全純函數, 而且

$$C(z,w) \in C^\infty\Big(U(\overline{\Omega}) \times V(\partial\Omega)\Big),$$

其中 $U(\overline{\Omega})$ 及 $V(\partial\Omega)$ 分別爲 $\overline{\Omega}$ 及 $\partial\Omega$ 的鄰域, 即在對角線上 (i.e., $z=w$) 時, $C(z,w)$ 仍然爲光滑的。這個函數 $C(z,w)$ 由解一 $\overline{\partial}$ 問題而得到。在構造 $C(z,w)$ 過程中, 我們並不需要應用 division problem, 但另一方面, $C(z,w)$ 並不是一個 Cauchy-Fantappiè 形式, 所以我們要花些功夫去證明 $E(z,w)+C(z,w)$ 具備有對全純函數的再生性質, 這可以應用 Stokes 定理與 Cauchy-Fantappiè 形式的某些特性來完成。

由於 $E(z,w)$ 可以明確地表達出來, 一切非構造性的東西併入 $C(z,w)$ 中去, 而 $C(z,w)$ 又是一個 C^∞ 的核, 所以在應用上不會構成問題!

最後我們來討論一下 Szegö 核與 Kerzman-Stein 核的關聯。首先定義什麼叫 Szegö 核, 對 $\mathbb{C}^n$ 中任一個有界光滑的區域 Ω (不一定是擬凸域), 考慮 Hilbert 空間 $L^2(\partial\Omega)$ 的閉子空間 $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 是所有 Ω 上全純函數的邊界值且

$$\int_{\partial\Omega}|f(z)|^2 d\sigma_z<+\infty.$$

則對任何 $u\in\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$, 我們有

$$u(z)=\int_{w\in\partial\Omega}S(z,w)u(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega,$$

這裡 $u(w)$ 是 $u(z)$ 的邊界值。不難看出 $S(z,w)$ 是 $z\in\Omega$ 的全純函數, 而且對任一 $z\in\Omega$, $\overline{S}(z,w)\in\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 是一 w 的函數。

由 $u\mapsto u(z)$, $z\in\Omega$ 是在 $\mathcal{H}^2$ 上有界及 Riesz 表示定理 (Riesz's representation theorem) 知 $S(z,w)$ 這個核是存在的! 但一般而言, 在絕大多數情況下, $S(z,w)$ 沒有辦法很明確地寫出來。我們甚至不知道當 $z\in\Omega$ 固定 $S(z,w)$ 對 $w\in\partial\Omega$ 是否光滑!

但當 Ω 是強擬凸時, C. Fefferman [14] 及 Boutet de Monvel-Sjöstrand [18] 證明了下面這個漂亮的結果。

定理 B.2 假設 Ω 爲一光滑有界的強擬凸區域, 則 $S(z,w)$ 對 $z\in\overline{\Omega}$ 及 $w\in\partial\Omega$, $w\neq z$ 爲光滑函數, 且

$$S(z,w)=F(z,w)\psi^{-n}(z,w)+G(z,w)\log\psi(z,w),$$

其中 $F,G,\psi\in C^\infty(\overline{\Omega}\times\partial\Omega)$。函數 $\psi(z,w)$ 可以明確地被構造, 且當 $z\neq w$ 時, $Re(\psi(z,w))>0$; 函數 F 及 G 並不明確, 不過 $F(w,w)\neq 0$ 對 $w\in\partial\Omega$ 成立!

在 [14] 一文中, C. Feffesman 非常巧妙地運用複值 phase function 的 Fourier 積分算子來證明定理 B.2, 因此, $S(z,w)$ 在 $z=w$ 的奇異點能準確地被刻劃。一般而言, $G(z,w)\neq 0$, 至於說什麼樣的區域, 對數項不會出現 (即 $G(z,w)\equiv 0$), 到現在仍是一個沒有被解決的問題!

函數 $\psi(z,w)$ 與 Henkin-Ramirez 核或 Kerzman-Stein 核中的函數 $g(z,w)$ 有密切關係, 且其奇異點相同。Szegö 核與 Kerzman-Stein 核的關係, 在 [16] 文中有詳細討論。我們現在概略地討論如下:

Szegö 核定義了由 $L^2(\partial\Omega)$ 到 $\mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 上的一個正交投影:

$$\mathbb{S}f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} S(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega.$$

證明: 將 f 分解成 $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in \mathcal{H}^2$, $f_2 \perp \mathcal{H}^2$。利用 $S(z,w) = \overline{S}(w,z)$ 的性質便可證出 $\mathbb{S} : L^2(\partial\Omega) \to \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 爲一正交投影算子。

另一方面, Kerzman-Stein 核也定義了一個 (非正交) 的投影算子

$$\boldsymbol{H}f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega.$$

在 [16] 一文中, 他們證明了下面的定理。

定理 B.3 :假設 $\Omega \subset C\mathbb{C}^n$ 是一個有界且光滑的強擬凸域。若 $f \in L^2(\partial\Omega)$ 並設

$$\boldsymbol{H}f(z) = \int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w, \qquad z\in\Omega.$$

則 $\boldsymbol{H}f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$ 且其邊界值 (也記作 $\boldsymbol{H}f$) 爲

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}f(z) &= \frac{1}{2}f(z) + P.V.\int_{w\in\partial\Omega} H(z,w)f(w)d\sigma_w \\ &= \frac{1}{2}f(z) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{w\in\partial\Omega\setminus B(z;\varepsilon)} H(z,w)f(w)d\sigma_w.\end{aligned}$$

這裡 $B(z,w) = \{w \in \partial\Omega : |g(z,w)| < \varepsilon\}$。

由奇異積分的理論, 我們知算子 $\boldsymbol{H} : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ 爲有界, 而且

$$\boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{H}. \tag{B.5}$$

它的對偶算子 $\boldsymbol{H}^* : L^2(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ 是

$$\boldsymbol{H}^*f(w) = \frac{1}{2}f(w) + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{z\in\partial\Omega\setminus B(w;\varepsilon)} \overline{H}(w,z)f(z)d\sigma_z.$$

證明: 由 $H(z,w)$ 的再生性, 我們知道 (B.5) 成立。關鍵的步驟是要證明 $\boldsymbol{H}f \in \mathcal{H}^2(\partial\Omega)$。我們可用奇異積分的結果來看這性質或用直接的證明:

$$\|\boldsymbol{H}f\|^2 = <\boldsymbol{H}f, \boldsymbol{H}f> = < f, (\boldsymbol{H}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{H}f >$$

$$\leqq \|f\|\Big(\|\boldsymbol{H}^2 f\| + \|\boldsymbol{A}\|_{op}\cdot\|\boldsymbol{H}f\|\Big) = \|f\|\cdot\|\boldsymbol{H}f\|\cdot(1+\|\boldsymbol{A}\|_{op}),$$

所以, $\boldsymbol{H}$ 是在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界且 $\|\boldsymbol{H}\|_{op}\leqq 1+\|\boldsymbol{A}\|_{op}$。至於 $\|\boldsymbol{A}\|_{op}<\infty$ 是因爲 $\boldsymbol{A}$ 是一個由核 $A(z,w)$ 所定義的算子, 其核爲

$$A(z,w)=\overline{H}(w,z)-H(z,w)$$

我們可以證出

$$\int_{w\in\partial\Omega}|A(z,w)|d\sigma_w<\alpha(\Omega)<+\infty,\quad z\in\Omega,$$

及

$$\int_{z\in\partial\Omega}|A(z,w)|d\sigma_z<\alpha(\Omega)<+\infty,\quad w\in\Omega.$$

因此 $\boldsymbol{A}:L^2(\partial\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ 爲有界, 詳細討論請參看 [16] 一文。

現在我們要將 Szegö 算子 $\mathbb{S}$ 用 $\boldsymbol{H}$ 算子表示出來, 因爲 $S(z,w)$ 及 $H(z,w)$ 對全純函數都有再生性質, 因而得出

$$\boldsymbol{H}\mathbb{S}=\mathbb{S},\qquad \mathbb{S}\boldsymbol{H}^*=\mathbb{S},$$

及

$$\mathbb{S}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H},\qquad \boldsymbol{H}^*\mathbb{S}=\boldsymbol{H}^*,$$

是 $L^2(\partial\Omega)$ 上的有界算子。(這裡我們用到 $\mathbb{S}^*=\mathbb{S}$ 是正交投影算子的性質)。因此

$$\mathbb{S}(\boldsymbol{H}^*-\boldsymbol{H})=\mathbb{S}-\boldsymbol{H}\Rightarrow\mathbb{S}\boldsymbol{A}=\mathbb{S}-\boldsymbol{H}.$$

算子 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}^*-\boldsymbol{H}$ 不但在 $L^2(\partial\Omega)$ 上有界, 而且它是一個具有 “光滑” (Smoothing) 性質的算子, 因此可以疊代的方法得到

$$\mathbb{S}=\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}^k+\mathbb{S}\boldsymbol{A}^{k+1},\tag{B.6}$$

或

$$\mathbb{S}=\boldsymbol{H}(I-\boldsymbol{A})^{-1}.$$

(算子 $(I-\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在是因爲 $\sqrt{-1}\boldsymbol{A}$ 爲對稱且緊緻在 $L^2(\partial\Omega)$ 上)。

(B.6) 式子告訴我們 $\mathbb{S}$ 算子的主要部分爲 $\boldsymbol{H}$, 而且有一逼近的級數, 當 k 愈來愈大其餘項 $\mathbb{S}\boldsymbol{A}^{k+1}$ 會愈來愈光滑! 我們因此有如下定理:

定理 B.4 假設 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一個光滑的強擬凸區域, 令 $E(z,w)$, $z \in \Omega$, $w \in \partial\Omega$ 爲 Ω 上的積分核 (Henkin-Ramirez 核或 Kerzman-Stein 核), 設 $K(z,w) = E(z,w) - \overline{E}(w,z)$, $z \in \partial\Omega$, $w \in \partial\Omega$, $z \neq w$, 則 Ω 上的 Szegö 核可寫成

$$S(z,w) = E(z,w) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (E \circ K^{(j)})(z,w) + R_{k+1}(z,w), \quad z \in \Omega, \quad w \in \Omega,$$

其中餘項 $R_{kH}(z,w)$ 對每一固定 $w \in \partial\Omega$ 而言是 z 的 $C^{\beta}(\overline{\Omega})$ 函數且 $\beta = \beta(k) \to \infty$ 當 $k \to \infty$。而合成核 $E \circ K^{(j)}$ 定義爲

$$\begin{aligned} E \circ K^{(j)}(z,w) = &\int_{u_1 \in \partial\Omega} \cdots \int_{u_j \in \partial\Omega} E(z,u_1)K(u_1,u_2)\cdots K(u_{j-1},u_j)K(u_j,w) \\ &\times d\sigma(u_1)\cdots d\sigma(u_j). \end{aligned}$$

詳細的討論可參看 Kerzman 的文章 [15] 及 Kerzman-Stein 的原文 [16], 我們在此只作概略性的介紹!

参考文獻

1. L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1979.
2. L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's Lemma*, Tran. Amer. Math. Soc., 43(1938), 359-364.
3. L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, 1973.
4. J. B. Conway, *Function of One Complex Variable*, Springer-Verlay, 1986.
5. H. Grauert and H. Reckziegel, *Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen*, Math. Z., 89(1956), 108-125.
6. S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomerphic Mapings*, Marrel Dekker, 1970.
7. S. G. Krantz, *Complex Analysis: The Geometric Viewpoint*, MAA, 1990.
8. S. G. Krantz, *Theory of Several Complex Variables*, 2nd ed., John Wiley and Sons.
9. D. Minda and G. Schober, *Another elementary approach to the theorems of Landau, Montel, Picard and Schottky*, Complex Variables, 2(1983), 157-164.
10. R. M. Robinson, *A geveralization of Picard's and related theorems*, Duke Math. J., 5(1939), 118-132.
11. L. Zaleman, *A heuristic princeple in complex function theory*, Amer. Math. Soc. Monthly, 82(1975), 813-817.
12. G. Henkin, *Integral representation of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains*, Soviet Math. Dolk., 14(1973), 858-862.
13. E. Ramirez de Arellano, *Ein Divisions problem and Randintegralclasstellungen in der komplexeu analysis*, Math. Amm., 184(1970), 172-187.

14. C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomurphic mappings of strictly pseudo convex domains*, Inventiones Math., 26(1974), 1-66.
15. N. Kerzman, *Singular Integrals in complex analysis*, Proc. Symp. Pure Math., 35(1979), 3-41.
16. N. Kerzman and E. M. Stein, *The Szegö kernel in terms of Cauchy-Fantappiè kernels*, Duke Math. J., 45(1978), 197-224.
17. F. Norguet, *Sur les domains d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes*, Bull. Soc. Math. France, 82 (1954), 137-159.
18. L. Boutet de Monvel, *Comportement d'un opérateur pseudo-differentiel sur une variété à bord*, I, II, J. Analyse Math. 17(1966), 241-304.
19. S. Gong and Y. Gong, Concise Complex Analysis, (Revised Version), World Scientific, 2007.

—本文作者龔昇(1930~2011) 逝世前任教中國科技大學,張德健任教美國 Georgetown University 數學系—