數學傳播 35卷2期, pp. 59-65

對〈疊書問題〉一文的回響

周　雲・王彥青

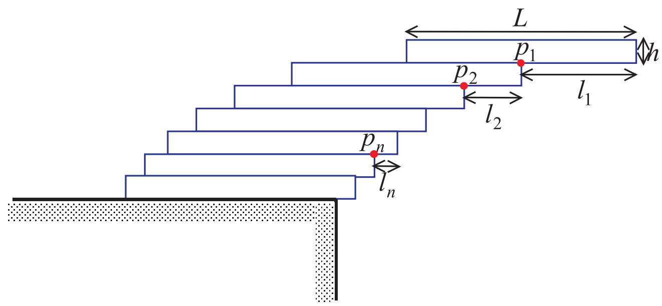
一、前言

學測考後, 到書鄉林走一趟, 想買回最近幾期的《數學傳播》, 尤其是第134期 (99年7月), 在目錄上看到有討論所謂的「疊書問題」, 我看到的當時心裡暗忖: 是那個疊書問題嗎? 因爲高二在物理課學到靜力平衡的單元時也討論過一種疊書不能倒, 問怎麼疊突出最多的問題。買得一看, 該文竟在頭一篇, 果然就是那個疊書問題! 我很佩服該文作者, 因爲一個在物理課本中的小習題如斯, 竟然可以推擴成完整一文如彼, 再看作者竟然是高一屆的學長 —— 好久沒有看到高中生的文章了。以在學校圖書館翻覽《數學傳播》的印象所及, 有高中生文章的時代大抵是甫創刊的民國六十幾七十年代, 最近看到《數學傳播》上關於高中數學的討論也少了很多, 難怪在第128期的〈徵求最簡答案的回響〉一文中葉東進老師會說「回應情況雖算不上熱烈, 也足堪欣慰, 令人想起季刊創刊初期興起的那股問題的討論熱潮。」

在高中物理課程中主要會碰到的疊書問題只有該文討論的四種情況中的第一種, 也就是「等大小、等質量之書本堆疊」問題。高二碰到這個問題的時候其實給了我很大的困擾, 關鍵是題目中不等式的解法, 很多詳解在此處都作了一個理所當然的取值處理而得到答案, 然則我卻以爲此一理之所當者並不是那麼直觀, 乃欲另求一法以處理該問題, 當時就已和彥青有相當的討論, 直到前幾天讀到〈疊〉文時, 特別注意其中這個部份的處理, 發現似乎也有類似的盲點, 故撰就本文提出該題碰到的不等式組之一較合乎邏輯順序的解法。

二、重新處理〈疊〉文的問題

我們先重述所欲討論的問題:



圖一

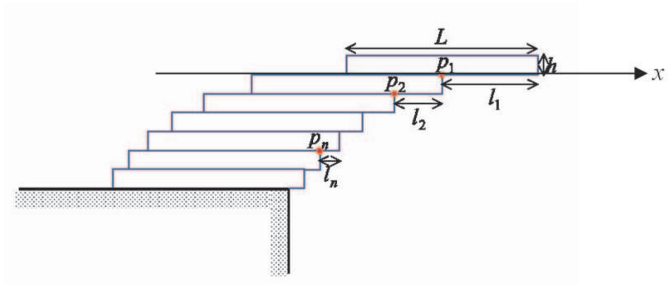
如圖一(就是〈疊〉文的圖三), 假設共有 N 本書堆疊於桌面邊緣, 書本長度爲 L、質量爲 m、l_n 爲從最上層往下數第 n 層書相對於第 $n+1$ 層書之突出量 (l_N 則代表第 N 本書相對於桌緣的突出量), 則問此 N 本書的最大突出量 (也就是 $l_1+l_2+\cdots+l_N$ 的最大值) 爲何? 又此時的 l_n 爲何?

首先, 同〈疊〉文的處理, 自上而下 —— 欲使第1本書不倒則條件爲:

$$l_1-\frac{L}{2}\le 0$$

此式的由來可以有兩種看法: 其一是用所謂的「重心必須落在下面一本書的邊緣內」的想法 (註一), 蓋如不然則第 2 本書對第 1 本書所施的向上的正向力不能與第 1 本書所受重力 (作用於其重心, 蓋物體各部份所受重力的合力之作用點乃是重心, 我們假設書本均勻故重心在長方形書本的中心處) 在同一直線上, 則第1本書所受合力矩不能爲 0, 必然傾倒。以是我們取 p_1 爲 x 軸原點 (如圖二), 則第1本書之重心坐標要在第 2 本書的邊緣內的意思就是 $\frac{(l_1-\frac{L}{2})mg}{mg}\le 0$; 其二是直接用「力矩平衡 (轉動平衡)」的條件, 即直接從以 p_1 爲支點而合力矩必須爲 0 這件事出發, 則第 1 本書所受的重力對 p_1 造成的力矩必須要可以由第 2 本書的正向力平衡, 則有 $(l_1-\frac{L}{2})mg\le 0$ 的條件, 意味著重力造成的力矩必須爲 0 或者是逆時鐘方向。兩者想法基本上是一樣的, 惟前者強調坐標而列式稍煩, 故似乎後者方便些, 之後的討論將逕用之。此處還必須指出的是〈疊〉文在這點上有一個小錯, 它說「要使書本突出量能達到最大而且不會掉落的條件爲 p_1 處所受力矩爲零」, 由以上的討論我們知道只要書本「不會掉落」那就是「p_1 處所受力矩爲零」的時候, 未必是突出量最大時。我們回到第 1 本書不要倒的條件, 經整理後我們得到:

$$l_1\le\frac{1}{2}L \tag{1}$$



圖二

我們繼續討論在第1本書已經不倒了的情況下 (亦即符合 (1) 式的情況下, 不然上面要載的人都不見了還有什麼好玩的), 移動第 2 本書所應該符合的條件 (我們心裡面當然是希望求其總的突出量爲最大, 但在處理此問題時, 此一目標似乎並不是那麼顯明而可一蹴幾的, 不妨只先求個「不會倒的條件」或說可行解吧):

$$(l_2+l_1-\frac{L}{2})mg+(l_2-\frac{L}{2})mg\le 0$$

這是以 p_2 爲支點所得的要使第1本及第2本書不倒的條件, 意義是第 1 本書所受重力造成的力矩加上第 2 本書所受重力造成的力矩此一合力矩必須爲 0 或者是逆時鐘的 (如此才可能被第 3 本書提供的向上正向力造成的順時鐘力矩平衡), 整理得:

$$2l_2+l_1\le\frac{2}{2}L \tag{2}$$

在第 1 本、第 2 本書已經不倒的情況下, 我們繼續討論移動第 3 本書時, 此三本書之欲不倒的條件, 同理可得:

$$(l_3+l_2+l_1-\frac{L}{2})mg+(l_3+l_2-\frac{L}{2})mg+(l_3-\frac{L}{2})mg\le 0$$

整理而有:

$$3l_3+2l_2+l_1\le\frac{3}{2}L \tag{3}$$

由 (1)、(2)、(3) 式我們可以歸結出, 當堆疊 N 本書時, 共會產生 N 個不等式要符合以使此 N 本書在突出之際不致傾倒, 我們或許可以這樣表示此一不等式組:

$$\sum_{k=1}^{n}kl_k\le\frac{n}{2}L\quad 其中\ n=1,2,\ldots,N \tag{4}$$

得到這個不等式組, 則可以放心不會把這些書「疊倒」了! 只剩下怎麼使 $l_1+l_2+\cdots+l_N$ 最大了!

〈疊〉文的關鍵疏漏正在於此, 其處理方法不同於本文之處乃在於先將不等式組中的每一條不等式推到它的臨界狀況, 也就是等號成立時 (其實我們不知道〈疊〉文作者是誤以爲最大突出時需「p_n 處所受力矩爲零」(這是不倒者之當然, 非最大者之必然, 已在前文述及) 而將我們的不等式都先畫上等號, 抑或是他認爲必然是每一條不等式的等號都成立時會得到總的最大突出量, 而有了等號, 關於後者說法的缺失下文馬上會提及), 我們的不等式組遂成了:

$$\sum_{k=1}^{n} kl_k=\frac{n}{2}L \quad \text{其中 } n=1,2,\ldots,N$$

這使〈疊〉文作者很自然的說「要解出第 n 本書所能突出的最大長度可以由下列式子求得:

$$\sum_{k=1}^{n} kl_k-\sum_{k=1}^{n-1} kl_k=\frac{nL}{2}-\frac{(n-1)L}{2}\text{」}$$

而有 $nl_n=\dfrac{L}{2}$ 遂得 $l_n=\dfrac{L}{2n}$, 此當其所謂「第 n 本書所能突出的最大長度」, 所以將這些「最大們」加總起來所得的 $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{2n}$ 就是我們所要求的 $l_1+l_2+\cdots+l_N$ 的最大值了。其實這個把「最大們加起來會得到總的最大」的想法是有瑕疵的, 蓋第 n 本書所能突出的最大長度絕不是 $\dfrac{L}{2n}$, 因爲只要上面書本堆疊的方式不是不等式的等號成立時, 那麼這第 n 本書的突出長度絕對是大於 $\dfrac{L}{2n}$。以 (1)、(2) 式舉例說, $l_1\le\dfrac{L}{2}$ 故取 $l_1=\dfrac{L}{4}$ 而 $2l_2+l_1\le\dfrac{2}{2}L$ 則取 $2l_2+l_1=\dfrac{2}{2}L$, 此時緣 $l_1=\dfrac{L}{4}$ 故 $l_2=\dfrac{3L}{8}>\dfrac{L}{2\times 2}=\dfrac{L}{4}$。

所以〈疊〉文得到結論最大突出總長 ($l_1+l_2+\cdots+l_N$ 的最大值) 的方法是有瑕疵的, 因爲其方法等於說不等式組中的每一個等號都要同時成立才是 $l_1+l_2+\cdots+l_N$ 最大時, 以堆疊時的實際意義說就是要從上而下依序以不會倒的臨界條件疊起才會得到最大突出 (意即先有 $l_1=\dfrac{L}{2}$ 繼而再 $2l_2+l_1=\dfrac{2}{2}L$ 故有 $l_2=\dfrac{L}{4}\cdots$), 這應該不是一件很直觀自明的事實, 蓋我們會想 l_1 不要緊繃則 l_2 就可以大一些啊, 如此的一消一長間哪來的「把最大們加起來得到總的最大」? 其實如果保留不等式的形式就會在將「不等式相減」的過程中有所遲疑了。

所以我們提出以下的解法:

想法是從不等式組出發, 以得到 $l_1+l_2+\cdots+l_N$ 的最大值。

首先寫出不等式組:

$$
\begin{aligned}
l_1 &\leq \frac{1}{2}L & (4.1)\\
2l_2 + l_1 &\leq \frac{2}{2}L & (4.2)\\
3l_3 + 2l_2 + l_1 &\leq \frac{3}{2}L & (4.3)\\
&\vdots\\
Nl_N + (N-1)l_{N-1} + \cdots + 2l_2 + l_1 &\leq \frac{N}{2}L & (4.N)
\end{aligned}
$$

我們試圖藉由「不等式相加」的方式得到 $l_1 + l_2 + \cdots + l_N$ 的最大值, 方法是將 (4.1) 式乘以 a_1、(4.2) 式乘以 a_2、$\cdots$、$(4.N)$ 式乘以 a_N, 其中 a_i 是正實數 $i = 1, 2, \ldots, N$, 由此而有:

$$
\begin{aligned}
a_1(l_1) &\leq a_1(\frac{1}{2}L)\\
a_2(2l_2 + l_1) &\leq a_2(\frac{2}{2}L)\\
a_3(3l_3 + 2l_2 + l_1) &\leq a_3(\frac{3}{2}L)\\
&\vdots\\
a_N(Nl_N + (N-1)l_{N-1} + \cdots + 2l_2 + l_1) &\leq a_N(\frac{N}{2}L)
\end{aligned}
$$

將此 N 式相加我們希望得到不等式的左邊是 $l_1 + l_2 + \cdots + l_N$, 故得:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = 2\sum_{i=2}^{N} a_i = 3\sum_{i=3}^{N} a_i = \cdots = (N-1)\sum_{i=N-1}^{N} a_i = Na_N = 1 \tag{5}$$

此代表了 N 個等式, 可以整理得每一條等式的通式是:

$$\sum_{i=n}^{N} a_i = \frac{1}{n} \quad \text{其中 } n = 1, 2, \ldots, N$$

故有:

$$a_m = \sum_{i=m}^{N} a_i - \sum_{i=m+1}^{N} a_i = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} > 0 \quad \text{其中 } m = 1, 2, \ldots, N-1$$

至於 a_N 的情況, 用看的可以知道 $a_N = \dfrac{1}{N} > 0$。

特別注意到 a_i 有解且 a_i 皆爲正數, 此保證了我們這 N 個不等式的相加是有可能的 (若 a_i 解不出來, 當然是加不出我們要的 $l_1 + l_2 + \cdots + l_N$, 而若 a_i 中有人不合群不爲正的話, 則

似乎又是一個要另行討論的問題, 幸而此處不用), 故我們得到:

$$l_1+l_2+\cdots+l_N\le\frac{L}{2}(a_1+2a_2+\cdots+Na_N)$$

其中將解得的 a_i 代入化簡不等式右邊如下:

$$\begin{aligned}&\frac{L}{2}(a_1+2a_2+\cdots+Na_N)\\&\quad=\frac{L}{2}\Big[(1-\frac{1}{2})+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(N-1)\Big(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\Big)+N\Big(\frac{1}{N}\Big)\Big]\\&\quad=\frac{L}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\Big)\end{aligned}$$

(第二步到第三步是因爲每一個小括號中的後項可以和下一個小括號中的前項作化簡)
以求和記號表示則是:

$$l_1+l_2+\cdots+l_N\le\frac{L}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{2n}$$

與〈疊〉文的結論是一樣的, 此時也可以發現等號成立時亦即 $l_1+l_2+\cdots+l_N$ 最大時確是不等式組中 N 個不等式的等號都成立時!

三、結語

這個疊書問題的不等式眞的是太特殊了, 它逐條增加可變數, 將式子寫出來那個排列是很有層次感的, 而且係數的安插也那麼有規則, 由 (5) 式可見這讓我們解 a_i 時恰有一組解, 且都是正數解, 試想只要一點的更動這個「不等式相加」的方法大概就失效了吧, 然則這是我們現在能想到的最完整方法了, 或許眞有那麼一點的特殊性, 然而我們確是未能想到更「通盤」的手法了。我們檢驗過一般情況下的二元一次不等式組, 甚至是三元的, 發現只要不等式一多就不知道同樣手法要如何切入了 (當然有些目標函數的本身是沒有極値的), 而至於等號成立在不等式組中的每一個不等式其等號都成立時, 也是很具特殊性的, 其中不等式的數目似乎有很重要的角色。也難怪在高三上學期第五册選修數學的第三章二元一次不等式的課程中不見這種「不等式相加」的手法, 而逕入線性規劃的畫圖世界, 顯然問題沒那麼簡單。事實上, 查諸「經濟數學」相關書籍確有見得此類問題的一般化作法於線性規劃的章節, 僅此一記, 因爲本文目的只是希望能以所學的高中數學爲高中物理課程中碰到的問題提供一個完整的解法而已。

至於作爲答案的式子 $\frac{L}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\Big)$ 則是令我們難忘非常, 蓋 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}$ 者乃是高一上學期數列與級數課程中討論到無窮等比級數時老師必會補充的級數式, 因爲我們都會以爲只要數列最後收斂到0則級數就會收斂, 殊不知是大錯特錯 (又是一個直觀的障蔽!),

當時對這個式子可是印象深刻, 畢竟是老師少數舉出的反例, 然則到了高三才更是讓人忘卻不了, 為什麼呢? 原來隔了兩年早把這件事忘的乾乾淨淨, 寫模擬題 (註二) 時錯得渾然不覺而且還覺得受了委曲, 看了詳解才覺彷彿若有此事!其實如果高三時數學老師能重提這個高二物理中暗藏的神奇式子該會是很有趣的 (「看我們數學老師補充的多有用!」)。

最後, 有一個感想是: 有所欲則有所蔽 —— 我們處理問題的時候目標總在心頭上, 一在心頭上我們有許多眞實的情況很容易就看不清了。王邦雄教授講老莊時常說要「無」了才看得見, 或可用在此。

註一: 這個觀念在高二上學期的物理課本都有提及, 例如南一書局《物理》上册 p.123 (97年8月修訂版)

註二: 例如有一份「台中一中 97 學年度第一學期三年級第一次數學科複習考」的考卷就問了無窮級數「$\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\frac{4}{15}+\cdots+\frac{n}{n^2-1}+\cdots$」是否收斂, 用到 $\frac{n}{n^2-1}>\frac{1}{n}$ 故該級數大於 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$, 而後者既已發散則前者也只好發散了。

—本文作者周雲現爲國立台灣師範大學附屬高級中學三年級學生, 王彥青現爲台北市立建國中學三年級學生—

更正啓事

本刊第35卷第1期 (137號) 第3頁“有朋自遠方來 -專訪陳恕行教授”一文中的簡介中有幾處錯誤, 幸蒙陳恕行教授來函指正如下。特此更正, 並謝謝陳先生的指正。

原文「1965年研究所畢業」改爲「1965年研究生畢業」。

原文「獲中國國家自然基金二等獎」改爲「獲中國國家自然科學二等獎」。

原文「多維截波理論的研究」改爲「多維激波理論的研究」。