數學傳播 35卷2期, pp. 45-50

神奇的冪和三角形

簡若竹 · 柯明錦 · 胡豐榮

一、引言

在「妙不可言的數學證明」一書第 113 頁處, 筆者們第一次獲知下面三角形:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1_1 & & & & \\
 & & & 1_1 & & 1_2 & & & \\
 & & 1_1 & & 3_2 & & 2_3 & & \\
 & 1_1 & & 7_2 & & 12_3 & & 6_4 & \\
1_1 & & 15_2 & & 50_3 & & 60_4 & & 24_5 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

上述三角形 (本文稱其爲「冪和三角形」) 中, 小足碼表示同一列 (row) 從最左邊算起是第幾個數, 例如: 3_2 中之小足碼 2, 表示 3 所在之列, 當從此列最左邊算起時, 是第 2 個數。此三角形中, 若仔細端倪上下兩列數字間與小足碼的關係時, 可以發現其與巴斯卡 (Pascal) 三角形有極類似的地方, 例如第五列最左邊算起第三個數 50, 可以看成是第四列第二個數乘上它的下標, 加上同列第三個數乘上它的下標之和, 即 $50 = 7\times 2 + 12\times 3$, 同理, $60 = 12\times 3 + 6\times 4$ ([8])。除此以外, 更讓人驚嘆的地方, 乃冪和三角形中之係數, 竟然與連續整數冪次和有關, 其對應關係如下:

$$
\begin{aligned}
&1^0+2^0+3^0+\cdots+n^0 = 1\cdot\tbinom{n}{1},\\
&1^1+2^1+3^1+\cdots+n^1 = 1\cdot\tbinom{n}{1}+1\cdot\tbinom{n}{2},\\
&1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = 1\cdot\tbinom{n}{1}+3\cdot\tbinom{n}{2}+2\cdot\tbinom{n}{3},\\
&1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = 1\cdot\tbinom{n}{1}+7\cdot\tbinom{n}{2}+12\cdot\tbinom{n}{3}+6\cdot\tbinom{n}{4},\\
&1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = 1\cdot\tbinom{n}{1}+15\cdot\tbinom{n}{2}+50\cdot\tbinom{n}{3}+60\cdot\tbinom{n}{4}+24\cdot\tbinom{n}{5},
\end{aligned}
$$

其中, 二項式係數 $\tbinom{n}{i}=\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$。

然而, 正因爲過去有非常多的文獻, 關注於連續整數冪次和之主題 ([3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [11], [12], [13]), 加上「妙不可言的數學證明」一書中, 對冪和三角形中之係數, 可以透過連續整數冪次和來求得的證明, 並未加以著墨。基於此, 本文企圖揭開冪和三角形之神秘面紗, 並藉由過去既知的結果, 求解冪和三角形中之係數。另外, 在連續整數冪次和相關研究之風向球的指引下, 期待能夠利用冪和三角形中之係數, 刻畫一些重要的結果。

二、冪和三角形中之係數 $d(k,i)$

爲了嚴謹的求解冪和三角形中之係數, 本節定義冪和三角形中, 第 k 列最左邊算起第 $i+1$ 個係數, 爲滿足下式之非負整數 $d(k,i)$:

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} d(k,i)\tbinom{n}{i+1}. \tag{1}$$

不難發現 (1) 式中之 $d(k,i)$, 因設限爲非負整數, 所以是唯一決定, 且

$$\begin{aligned}
&d(0,0)=1,\\
&d(1,0)=1,\ d(1,1)=1\\
&d(2,0)=1,\ d(2,1)=3,\ d(2,2)=2,\\
&d(3,0)=1,\ d(3,1)=7,\ d(3,2)=12,\ d(3,3)=6,\\
&d(4,0)=1,\ d(4,1)=15,\ d(4,2)=50,\ d(4,3)=60,\ d(4,4)=24.
\end{aligned}$$

另外, 爲了描述方便起見, 對任意給定之自然數 k 與 i, 當 $k<i$ 時, 令 $d(k,i)=0$。

性質 2.1. 對任意給定之自然數 k, 以及非負整數 i, $0\le i\le k$, 恆有

$$d(k,i)=id(k-1,i-1)+(i+1)d(k-1,i). \tag{2}$$

性質 2.2. 對任意給定之自然數 k, 以及非負整數 i, $0\le i\le k-1$, 恆有

$$\begin{aligned}
d(k,i)&=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(i-j)^k\tbinom{i}{j}+\sum_{j=0}^{i+1}(-1)^j(i-j+1)^k\tbinom{i+1}{j},\\
d(k,k)&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j(k-j)^k\tbinom{k}{j}.
\end{aligned} \tag{3}$$

因性質 2.1−2.2 之證明, 可以一併處理, 且兼顧文章先整理出重點, 以方便讀者閱讀之故, 茲將證明置至於後記。

三、刻畫 Bernoulli 數 B_i

計算 Bernoulli 數, 在數學研究裡, 是個古老的課題, 舉凡從純粹的代數到統計的應用, 可以說到處都有 Bernoulli 數的蹤影 [12]。特別是, 利用 Bernoulli 數, 來表徵連續整數冪次和 [1] [2] [3] [9]。由於 Bernoulli 數之定義與相關性質, 在數學傳播第 12 $\sim$ 13 卷中, 已有詳細報導 [1] [2] [9], 因此, 本節不再冗述。另外, 爲了方便起見, 若將二項式係數 $\binom{n}{i}$ 中之 n, 擴充至實數 x 時, $\binom{x}{i}$ 即爲 x 的多項式之型態, 也就是當 $x\in\mathbb{R}$ 時, 定義 $\binom{x}{i}=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$, 此時, 不難發現數學傳播第 31 卷 3 期中, 蘇益弘、胡豐榮、許天維 (2005) 所定義之連續整數冪次和擴充函數 $S_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 具有下列性質: 對任意實數 x,

$$S_k(x)=\sum_{i=0}^{k}d(k,i)\binom{x}{i+1}. \tag{4}$$

再者, 根據鍾逸修、劉志璿、王道明、胡豐榮 (2007) 之論文第 6 頁, Bernoulli 數 B_i 與連續整數冪次和擴充函數 $S_k(x)$ 之間, 有下列關係:

$$\begin{aligned} &B_{2k}=S'_{2k}(-1),\ \ k\in\mathbb{N}; \\ &B_0\ =S'_0(-1)=1,\quad B_1=S'_1(-1)=-\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中, $S'_k(x)$ 是連續正整數次方和之擴充函數 $S_k(x)$ 的一階導函數。

因此, 將 (4) 式代入 (5) 式後, 即可得到下面的性質。

性質 3.1. 對任意自然數 k,

$$B_{2k}=\sum_{i=0}^{2k}d(2k,i)\,\frac{d}{dx}\binom{x}{i+1}\bigg|_{x=-1},$$

且 $B_0=d(0,0)$, $B_1=-\frac{1}{2}d(1,1)$。

性質 3.1 之證明, 請讀者參考 [12], 謹以下例說明使用冪和三角形中之係數 $d(k,i)$, 來計算 Bernoulli 數時之便利性。

例 3.2. 計算 B_4 時, $d(4,i)$, $0\le i\le 4$ 之值, 請參考本文第二節。另外, 不難算出

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\binom{x}{1}\bigg|_{x=-1}=1,\quad \frac{d}{dx}\binom{x}{2}\bigg|_{x=-1}=-\frac{3}{2},\quad \frac{d}{dx}\binom{x}{3}\bigg|_{x=-1}=\frac{11}{6}, \\ &\frac{d}{dx}\binom{x}{4}\bigg|_{x=-1}=-\frac{50}{24},\quad \frac{d}{dx}\binom{x}{5}\bigg|_{x=-1}=\frac{274}{120}. \end{aligned}$$

根據性質 3.1 可得 $B_4=-\frac{1}{30}$。

由於 $\frac{d}{dx}\binom{x}{i}\Big|_{x=-1}$, $0\le i\le 2k$ 之值, 可以利用 Maple 或 Matlab 等軟體來計算, 故根據性質 3.1, Bernoulli 數 B_2, B_4, $\cdots$, B_{2k} 可以表成下式

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \\ \cdots \\ B_{2k} \end{pmatrix} = \Big[d(2l,i)\Big]_{1\le l\le k,\ 0\le i\le 2k} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \cdots \\ \frac{d}{dx}\binom{x}{2k+1}\Big|_{x=-1} \end{pmatrix}.$$

因此, 利用冪和三角形中之係數所成的矩陣 $[d(2l,i)]_{1\le l\le k,\ 0\le i\le 2k}$, 來計算 Bernoulli 數 B_2, B_4, $\cdots$, B_{2k} 之値時, 可以快速算出來。

四、結語

冪和三角形也許不是一個大家都耳熟能詳的概念, 且相較於巴斯卡三角形, 亦或楊輝三角形的相關性質, 冪和三角形鮮少被一般數論之書籍所廣泛論述。本文利用連續整數冪次和之求和公式的技巧, 求解出 $d(k,i)$ 的遞迴關係, 以及給出 $d(k,i)$ 之值, 此爲本研究的成果之一。另外, 藉由筆者們過去在連續整數冪次和的研究上之心得, 建構了冪和三角形中, 係數 $d(k,i)$ 與 Bernoulli 數之間的關係, 此爲本研究的成果之二。

由於現有套裝軟體, 例如 Maple 或 Matlab 非常普遍, 因此, 利用這些套裝軟體, 先建置冪和三角形中之係數所成的矩陣, 然後利用本文第三節文末之矩陣乘積, 來設計程式計算 Bernoulli 數時, 亦不失爲是計算 Bernoulli 數的另一種有中生新的新思維。

後記

首先, 筆者們先證明性質 2.2。根據 Brualdi (1977) [14], 對任意實數 x 與自然數 k, 存在係數 $c(k,0)$, $c(k,1)$, $c(k,2)$, $\cdots$, $c(k,k)$, 使得

$$x^k=\sum_{i=0}^{k}c(k,i)\tbinom{x}{i}, \tag{6}$$

其中 $\binom{x}{i}$ 爲本文第三節所述之 x 的多項式。則對任意自然數 k, 不難證明 $c(k,0)=0$ 且

$$c(k,i)=ic(k-1,i)+ic(k-1,i-1),\ \text{當 } 1\le i\le k-1. \tag{7}$$

根據 (7) 之遞迴公式, Brualdi (1977) [14] 解出

$$c(k,i)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(i-j)^k\tbinom{i}{j}. \tag{8}$$

今將 (6) 式中之實數 x, 侷限於非負整數, 並將其視爲 j 來求和時, 可得下式:

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{k} c(k,i)\tbinom{j}{i} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{n} c(k,i)\tbinom{j}{i} = \sum_{i=0}^{k} c(k,i)\sum_{j=1}^{n}\tbinom{j}{i}. \tag{9}$$

又因爲 $\sum_{j=1}^{n}\binom{j}{i} = \binom{n+1}{i+1}$, 所以 (9) 式變成

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} c(k,i)\tbinom{n+1}{i+1}. \tag{10}$$

再加上使用巴斯卡公式 $\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i}$, 此時 (10) 式變成

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \sum_{i=0}^{k} c(k,i)\tbinom{n+1}{i+1} = c(k,k)\tbinom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\left\{c(k,i)+c(k,i+1)\right\}\tbinom{n}{i+1}. \tag{11}$$

另外, 由於 (1) 式之解 $d(k,i)$ 爲唯一, 因此, 可得

$$d(k,k) = c(k,k), \quad \text{且當 } 0 \le i \le k-1 \text{ 時}, d(k,i) = c(k,i) + c(k,i+1). \tag{12}$$

結合 (8) (12) 兩式, 即可證明性質 2.2。最後關於性質 2.1 之證明, 因爲當 $0 \le i \le k-1$ 時, 根據 (7) (12) 兩式可得

$$\begin{aligned} d(k,i) &= c(k,i) + c(k,i+1) \\ &= i\left\{c(k-1,i) + c(k-1,i-1)\right\} + (i+1)\left\{c(k-1,i+1) + c(k-1,i)\right\} \\ &= id(k-1,i-1) + (i+1)d(k-1,i). \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} d(k,k) &= c(k,k) \\ &= k\left\{c(k-1,k) + c(k-1,k-1)\right\} \\ &= kd(k-1,k-1) + (k+1)d(k-1,k). \end{aligned}$$

上式中, 請留意本文第二節處, 有定義 $d(k-1,k) = 0$。

謝誌

本研究榮獲國立台灣大學與國立台灣科學教育館, 共同合作辦理之青少年科學人才培育計畫, 編號 ISGR130 的經費支持, 在此獻上最深的謝意。

參考文獻

1. 余文卿 (1992)。Bernoulli 數與 Bernoulli 多項式 (上)。數學傳播, 第 16 卷 2 期, 頁 37-45。
2. 余文卿 (1992)。Bernoulli 數與 Bernoulli 多項式 (下)。數學傳播, 第 16 卷 3 期, 頁 1-8。
3. 李宗元 (1979)。閒話 $1^k+2^k+\cdots+n^k$。數學傳播, 第 2 卷 4 期, 頁 12-14。
4. 李育杰 (1989)。有限冪級數的遞迴關係與史特林數。數學傳播, 第 13 卷 4 期, 頁 90-92。
5. 李政豐 (2002)。連續整數冪次和公式的另類思考。數學傳播, 第 26 卷 2 期, 頁 73-82。
6. 何景國 (1982)。求 $\sum_{i=1}^n i^k$ $(k=1,2,3)$ 的幾種方法。數學傳播, 第 6 卷 4 期, 頁 93-97。
7. 吳松霖、李國寧、胡豐榮、許天維 (2007): 連續整數冪次和公式之指數生成函數。數學傳播, 第 31 卷 3 期, 頁 13-16。
8. 胡守仁譯 (2006)。妙不可言的數學證明。天下遠見文化事業群出版。
9. 郭嘉南 (1988)。黎曼 Zeta-函數與 Bernoulli 數。數學傳播, 第 12 卷 2 期, 頁 47-48。
10. 陳國裕 (1999)。如何求出 $1^2+2^2+\cdots+n^2$。數學傳播, 第 23 卷 1 期, 頁 76-84。
11. 傅海倫 (2000)。再談如何求出 $1^2+2^2+\cdots+n^2$。數學傳播, 第 24 卷 2 期, 頁 62-64。
12. 鍾逸修、劉志璿、王道明、胡豐榮 (2007): 另一種計算伯努利數的方法, 東海科學, 第 9 卷, 頁 1-8。
13. 蘇益弘、胡豐榮、許天維 (2005): 從連續整數冪次和公式引發之擴充想法。數學傳播, 第 29 卷 2 期, 頁 30-33。
14. Richard A. Brualdi (1977): Introductory Combinatorics. North-Holland, page 119-125.

—本文第一作者爲台北市立中山女子高級中學一年級學生、第二作者爲台北市立中山女子高級中學專任數學教師、第三作者爲國立台中教育大學數學教育系專任教授—