數學傳播 35卷2期, pp. 23-31

Bernoulli多項式與連續冪次和探討

鍾承道

1. 引言

在數學傳播 29 卷 2 期, 蘇益弘等三人 [5], 由探討連續整數冪次出發, 定義

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

並將其推廣到非正整數的狀況

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1}\Big\{(x+1)^{k+1} - (x+1) - \sum_{i=2}^{k} \binom{k+1}{i} S_{k-i+1}(x)\Big\}, \quad k \geq 2$$

以下, 我們將用指數生成函數, 從 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 與 Bernoulli 數 b_n 的觀點出發, 證明 $S_k(x) = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1) - b_{k+1})$, 將其結果的證明簡化。同時介紹 Bernoulli 多項式與 Bernoulli 數之其他性質。

在此之前我們先簡介 Bernoulli 數與 Bernoulli 多項式的由來。Bernoulli 數列最早是由瑞士數學家 Jacob Bernoulli (1654-1705) 在逝世後 (1713) 被發表的著作 *Ars Conjectandi* 中, 求 n 個連續正整數的 p 次方和時被引進。他以 $\int$ 符號表示連續整數和。

Summae Potestatum

$$\begin{aligned}
\textstyle\int n &= \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n \\
\textstyle\int nn &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n \\
\textstyle\int n^3 &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn \\
\textstyle\int n^4 &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
\textstyle\int n^5 &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn \\
\textstyle\int n^6 &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n
\end{aligned}$$

$$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$$
$$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$
$$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$$
$$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

若以今日表示法觀之則前三式爲:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

而 Bernoulli 將多項式 $B_n(x)$ 則定義爲

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = k! \int_0^n B_k(x)dx$$

其中 $B_n(x)$ 要滿足

$$B_0(x) = 1$$
$$B_n'(x) = B_{n-1}(x)$$
$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \quad n \geq 1$$

$B_n(x)$ 即是後人所稱的 Bernoulli 多項式而當 $x = 0$ 時的值 b_n 即爲 Bernoulli 數。以下爲 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 與 Bernoulli 數 b_n 的前幾項

n	$B_n(x)$	b_n
0	1	1
1	$x - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$	0
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$

請參閱 [1],[4]

2. 從 Bernoulli 多項式觀點看 $S_k(x)$

由於接下來的證明要用到指數生成函數及 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 與 Bernoulli 數 b_n, 我們在這邊介紹其定義 (請閱 Wilf [3]) 給定任一數列 $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ 其指數生成函數 $f(t)$ 定義為

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

Bernoulli 多項式的指數生成函數為

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$$

Bernoulli 數的指數生成函數為

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}$$

定理1:

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} b_i (x+1)^{k+1-i}, \quad k \geq 1$$
$$S_0(x) = x$$

證明: 這個定理的證明需要用到下面兩個式子 (見 [6])

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1}\{(x+1)^{k+1} - (x+1) - \sum_{i=2}^{k} \binom{k+1}{i} S_{k-i+1}(x)\}, \quad k \geq 2 \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x) \frac{t^k}{k!} = \frac{e^{t(x+1)} - e^t}{e^t - 1} \tag{2}$$

因為兩個數列相等若且唯若它們擁有相同的指數生成函數, 所以我們考慮:

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x) \frac{t^k}{k!} = \frac{e^{t(x+1)} - e^t}{e^t - 1} = \frac{e^{t(x+1)} - 1}{e^t - 1} - 1$$

且

$$\frac{e^{t(x+1)} - 1}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1} \frac{e^{t(x+1)} - 1}{t} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} (x+1)^{m+1} \frac{t^m}{(m+1)!}\Big)$$

右式兩個指數生成函數的乘積可得

$$k![t^k] \frac{e^{t(x+1)} - 1}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} b_i \frac{(x+1)^{k+1-i}}{k+1-i} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} b_i (x+1)^{k+1-i}$$

再將扣掉的1考慮進來

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x)\frac{t^k}{k!}\Big)+1=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i(x+1)^{k+1-i}\Big)\quad\frac{t^k}{k!}$$

故有

$$S_k(x)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i(x+1)^{k+1-i},\ k\geq 1,\ S_0(x)=x$$

故得證。

預備定理:

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_ix^{n-i}$$

證明:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}=\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\frac{t}{e^t-1}e^{xt}&=\Big(\sum_{i=0}^{\infty}b_i\frac{t^i}{i!}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}x^j\frac{t^j}{j!}\Big)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_ix^{n-i}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

定理2:

$$S_k(x)=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1)-b_{k+1})$$

證明: 由預備定理 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 爲

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b_ix^{n-i}$$

因爲

$$\begin{aligned}B_{k+1}(x+1)&=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}b_i(x+1)^{k+1-i}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i(x+1)^{k+1-i}+b_{k+1}(x+1)^0\end{aligned}$$

即

$$B_{k+1}(x+1)-b_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}b_i(x+1)^{k+1-i}$$

由定理 1 知

$$S_k(x) = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1) - b_{k+1})$$

故得證。

註: 這個結果與當 x 爲正整數時的狀況 $\sum_{j=0}^{k} j^n = \frac{1}{n+1}(B_{k+1}(n+1) - b_{k+1})$ 是一致的即 $S_k(n) = \frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1) - b_{k+1})$

3. 用 Bernoulli 多項式證明 $S_k(x)$ 的性質

在數學傳播 29 卷 2 期, 蘇益弘等三人 [5], 對於 $S_k(x)$ 得到了以下性質, 我們將用定理 1 將其重新整理。

定理 3:

$$\frac{d}{dx}S_k(x) = kS_{k-1}(x),\ k \text{ 爲大於等於 3 之奇數。}$$

證明: 左式:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}S_k(x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1) - b_{k+1})\\ &= \frac{1}{k+1}(\frac{d}{dx}B_{k+1}(x+1) - \frac{d}{dx}b_{k+1}) = B_k(x+1)\end{aligned}$$

右式:

$$\begin{aligned}kS_{k-1}(x) &= B_k(x+1) - b_k\\ &= B_k(x+1)\end{aligned}$$

故得證。

定理 4:

$$\frac{d^2}{dx^2}S_k(x) = k\frac{d}{dx}S_{k-1}(x),\ k \text{ 爲大於等於 2 之整數。}$$

證明: 左式:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}S_k(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1) - b_{k+1})\\ &= \frac{1}{k+1}(\frac{d^2}{dx^2}B_{k+1}(x+1) - \frac{d^2}{dx^2}b_{k+1}) = \frac{d}{dx}B_k(x+1)\end{aligned}$$

右式:

$$\begin{aligned}
k\frac{d}{dx}S_{k-1}(x) &= k\frac{d}{dx}\frac{1}{k}(B_{k+1}(x+1)-b_{k+1}) \\
&= \frac{d}{dx}(B_k(x+1)-b_k) \\
&= \frac{d}{dx}B_k(x+1)
\end{aligned}$$

故得證。

4. Bernoulli 多項式及 Bernoulli 數與 Stirling 數的關係

Stirling 數第二類 $S(n,k)$ 的指數生成函數爲

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t-1)^k}{k!}$$

$S(n,k)$ 在組合及有限差分中應用廣泛, 讀者可參閱 [2]。以下, 我們將用到兩個數列相等若且唯若它們擁有相同的指數生成函數的性質。利用這個性質我們可以證明一些 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 與 Bernoulli 數列 b_n 與 Stirling 數第二類 $S(n,k)$ 數列的關聯性。

定理 5:

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}k!S(n,k).$$

證明:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_n\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t-1} = \frac{\log(e^t-1+1)}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(e^t-1)^k}{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k!\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{t^n}{n!}}{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}k!S(n,k)\frac{t^n}{n!} \\
b_n &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}k!S(n,k)
\end{aligned}$$

故得證。

定理 6:

$$B_n(x) = b_n + n\sum_{k=0}^{n-1}S(n-1,k)k!\binom{x}{k+1}.$$

證明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(B_n(x)-b_n)\frac{t^n}{n!}=\frac{t(e^{xt}-1)}{e^t-1}=t\frac{(e^t-1+1)^x-1}{e^t-1}=t\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}(e^t-1)^k-1}{e^t-1}$$
$$=t\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k+1}(e^t-1)^k=t\sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k+1}k!\sum_{n=0}^{\infty}S(n,k)\frac{t^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}S(n,k)k!\binom{x}{k+1}\frac{t^{n+1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{k=0}^{\infty}S(n-1,k)k!\binom{x}{k+1}\frac{t^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}n\sum_{k=0}^{n-1}S(n-1,k)k!\binom{x}{k+1}\frac{t^n}{n!}$$
$$B_n(x)-b_n=n\sum_{k=0}^{n-1}S(n-1,k)k!\binom{x}{k+1}$$

故得證。

5. Bernoulli 多項式與 $S_k(n+\frac{1}{2})$ 的性質

以下, 我們將介紹廣義的公式

$$\sum_{i=0}^{n}(x+i)^k=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1+x)-B_{k+1}(x))$$

在特殊狀況下的推論。

定理 7:

$$B_{2n+1}(\frac{1}{2})=B_{2n+1}(1)=B_{2n+1}(0)=b_{2n+1}=0,\quad n\geq 1.$$

證明:由於

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(0)\frac{t^n}{n!}=\frac{te^{0t}}{e^t-1}=\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{t^n}{n!}$$

顯然

$$B_n(0)=b_n,\quad n\geq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}(x)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{(-t)^n}{n!}\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{te^xt}{e^t-1}-\frac{-te^{-xt}}{e^{-t}-1}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{te^{xt}}{e^t-1}-\frac{te^{(1-x)t}}{e^t-1}\Big)=\frac{t}{2}\frac{(e^{xt}-e^{(1-x)t})}{e^t-1}$$

當 $x=\frac{1}{2}$, $x=0$, $x=1$ 時我們有

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(\frac{1}{2})\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(0)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{-t}{2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}(1)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{t}{2}$$

故知 $B_1(\frac{1}{2})=0$, $B_1(0)=-\frac{1}{2}$, $B_1(1)=\frac{1}{2}$

$$B_{2n+1}(\frac{1}{2})=B_{2n+1}(0)=B_{2n+1}(1)=b_{2k+1}=0, \qquad n\geq 1$$

故得證。

註: 事實上 $B_n(1)=B_n(0)=b_n$, $n\geq 2$ 爲其更強的性質。

推論: k 爲偶數時

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(i+\frac{1}{2}\Big)^k=S_k\Big(n+\frac{1}{2}\Big)$$

證明: 由

$$\sum_{i=0}^{n}(x+i)^k=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1+x)-B_{k+1}(x))$$

當 $x=0$ 時

$$\sum_{i=0}^{n} i^k=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n+1)-b_{k+1})$$

當 $x=\frac{1}{2}$, k 爲偶數時

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\Big(i+\frac{1}{2}\Big)^k&=\frac{1}{k+1}\Big(B_{k+1}\Big(n+1+\frac{1}{2}\Big)-B_{k+1}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)\\&=\frac{1}{k+1}\Big(B_{k+1}(n+1+\frac{1}{2})-b_{k+1}\Big)\end{aligned}$$

而又由定理 2

$$S_k(x)=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(x+1)-b_{k+1})$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(i+\frac{1}{2}\Big)^k=S_k\Big(n+\frac{1}{2}\Big)$$

故得證。

註: 這個公式與

$$\sum_{i=0}^{n} i^k = S_k(n)$$

爲同一個形式。

舉例來說:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\Big(\frac{3}{2}\Big)^2+\cdots+\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^2 &= S_2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{6}\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)\Big(\frac{2n+3}{2}\Big)\Big(\frac{4n+4}{2}\Big)\\ &=\frac{1}{6}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)+1\Big)\Big(2\Big(n+\frac{1}{2}\Big)+1\Big)\end{aligned}$$

這跟

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=S_2(n)=\frac{1}{6}(n)(n+1)(2n+1)$$

的公式爲同一個形式。

致謝

感謝薛昭雄教授的指導與中央研究院數學所的暑期研習生計畫之資助, 及其所提供的研究環境, 此篇文章得以完成。同時感謝審查者之細心建議及附加文獻 [4]使得此文章更完整。

参考文獻

1. T. M. Apostol, A primer on Bernoulli numbers and polynomials, *Mathematics Magazine*, vol 81, no. 3(2008), 178-190.
2. L. Comtet, *Advanced combinatorics*, Reichel, Dordrecht, The Netherlands, 1974.
3. H. Wilf, *Generatingfuntionology*, (second edition), Academic Press, 1994.
4. R. M. Young, *Excursions in Calculus: An Interplay of the Continuous and the Discrete*, The Mathematical Association of America, 1992.
5. 蘇益弘、胡豐榮、許天維(民94), 從連續整數冪次和公式引發之擴充想法, 數學傳播, 第二十九卷第二期, 30-33。
6. 吳松霖、李國寧、胡豐榮、許天維(民96), 連續整數冪次和公式之指數生成函數探討, 數學傳播, 第三十一卷第三期, 13-16。

—本文作者目前就讀國立臺灣大學電機工程學系三年級—