數學傳播 35卷1期, pp. 84-88

# 邊長為正整數且有一個角是 60° 或 120° 的三角形

鄭有志

## 一、前言

當三角形的三邊長爲 $2mn, m^2-n^2, m^2+n^2$ ($m$、$n$ 爲一奇一偶的互質正整數且 $m>n$), 即三邊長爲勾股數組時, 我們清楚的知道, 此三角形必爲直角三角形, 並且, 奇數斜邊長 $m^2+n^2$ 所對角爲 90°。

此著名的勾股數組讓筆者進一步想去瞭解, 是否有其他的正整數邊長數組, 其中的某一邊的對角, 必定爲某固定角。

## 二、預備知識

定理 1. 設 $\theta=r\pi$, 其中 $r$ 爲有理數, 則 $\cos\theta=0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ 或爲無理數。[1][2]

推論 1. 二銳角爲有理度數的直角三角形中, 此二銳角的餘弦值中有有理數的三角形必爲 30°–60°–90° 且三邊長中必至少有一邊長爲無理數。

證: 由定理 1 得此有理銳角的餘弦值必爲 $\frac{1}{2}$ 故此銳角爲 60°, 所以, 三角形必爲 30°–60°–90°, 其邊長比爲 $1:\sqrt{3}:2$, 因此, 三邊長中必至少有一邊長爲無理數。

定理 2. 設三角形三邊長分別爲 $a,\ b,\ \sqrt{a^2-ab+b^2}$ 則其第二大角度量爲 60° 且其對邊 $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ 爲第二長邊。

證: $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ 所對角的餘弦值爲 $\dfrac{a^2+b^2-(a^2-ab+b^2)}{2ab}=\dfrac{1}{2}$ 得此角爲 60° 而此角一定是第二大角, 再由「大角對大邊定理」得知此第二大角所對邊 $\sqrt{a^2-ab+b^2}$ 一定是第二長邊, 故得證。

問題 1. 試找出所有的有理數 $x$, 使得 $\sqrt{x^2+x+1}$ 也是有理數。[3]

結果: 對所有的 $|t|<1$, $t\in Q$, 若 $x=\dfrac{2t-1}{1-t^2}$, 則 $\sqrt{x^2+x+1}$ 亦爲一有理數, 而有理數 $\sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{t^2-t+1}{1-t^2}$

## 三、主要內容

若 $\triangle ABC$ 的三邊長 $a$, $b$, $c$ 皆爲正整數且三個角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的角度皆爲有理數度數, 由餘弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 爲有理數。

應用定理 1 與推論 1 得 $\cos C=\pm\frac{1}{2}$(餘弦值 $\pm1$ 使 $\triangle ABC$ 爲退化的三角形) 故 $\angle C=60^\circ$ 或 $120^\circ$。

若 $\angle C=120^\circ$, 則三邊長爲 $a$, $b$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$, 故問題至此階段變爲

問題 2. $a$, $b$ 必須代入哪些正整數才會使得 $a^2+ab+b^2$ 爲一完全平方數。

將三正數 $a$, $b$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ 同時除以 $b$ 得 $\dfrac{a}{b}$, $1$, $\sqrt{(\dfrac{a}{b})^2+\dfrac{a}{b}+1}$ 則以 $1$, $\dfrac{a}{b}$, $\sqrt{(\dfrac{a}{b})^2+\dfrac{a}{b}+1}$ 爲三邊長的三角形必爲 $\triangle ABC$ 的相似三角形且 $\sqrt{(\dfrac{a}{b})^2+\dfrac{a}{b}+1}$ 的對角必爲 $120^\circ$。

此時, 問題 2 可轉化爲

問題 3. 試找出所有的正有理數$\dfrac{a}{b}$使得$\sqrt{(\dfrac{a}{b})^2+\dfrac{a}{b}+1}$ 也是有理數。應用問題 1 的結果, 可得設 $t=\dfrac{m}{n}$ 爲介於 $\dfrac{1}{2}$ 與 1 之間的最簡分數, 分別代入 $x=\dfrac{2t-1}{1-t^2}$ 與 $y=\dfrac{t^2-t+1}{1-t^2}$ , 得

$$x=\frac{\frac{2m}{n}-1}{1-\frac{m^2}{n^2}}=\frac{n(2m-n)}{n^2-m^2},\qquad y=\frac{\frac{m^2}{n^2}-\frac{m}{n}+1}{1-\frac{m^2}{n^2}}=\frac{m^2-mn+n^2}{n^2-m^2},$$

由 $1$, $\dfrac{n(2m-n)}{n^2-m^2}$, $\dfrac{m^2-mn+n^2}{n^2-m^2}$, 三邊長中最長邊 $\dfrac{m^2-mn+n^2}{n^2-m^2}$ 所對角爲 $120^\circ$, 得 $n^2-m^2$, $n(2m-n)$, $m^2-mn+n^2$ 三邊長中最長邊 $m^2-mn+n^2$ 所對角爲 $120^\circ$, $m$、$n$ 爲二互質正整數且 $m<n<2m$。

以下分別討論 $n=3,4,5$ 時, 可產生那些三角形。

若 $n=3$ 則 $m=2$ 得三邊長爲 5, 3, 7 且皆爲個位數, 96 學年指考數甲非選擇題一, 就是以此三數爲三邊長。

若 $n=4$ 則 $m=3$ 得 7, 8, 13。

若 $n=5$ 則 $m=3$ 或 4 得 16, 5, 19 或 9, 15, 21 (相似於 5, 3, 7 三角形)。

接著, 討論三邊長 $n^2-m^2$, $n(2m-n)$, $m^2-mn+n^2$ 的奇、偶性,

| $m$ | $n$ | $n^2-m^2$ | $n(2m-n)$ | $m^2-mn+n^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 奇 | 偶 | 奇 | 偶 | 奇 |
| 偶 | 奇 | 奇 | 奇 | 奇 |
| 奇 | 奇 | 偶 | 奇 | 奇 |

由上表可得結論: 任一個三角形至少有一個相似形, 其 $120^\circ$ 所對邊長 $m^2-mn+n^2$ 必爲奇數。

對於 $\angle C=60^\circ$ 的情形, 三邊長爲 $a$, $b$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$。因爲 $a=b$ 時, 得到正三角形, 所以, 以下的討論就排除此一明顯的情形。

仿照前面有關 $\angle C=120^\circ$ 的處理模式: 問題2 $\rightarrow$ 問題 3 $\rightarrow$ 應用問題 1 的結果, 筆者先提出與問題 1 相當類似的問題。

問題 4. 試找出所有的正有理數 $x$, 使得 $\sqrt{x^2-x+1}$ 也是有理數。

解答: 模仿問題 1 所提供的解答 [3],

解 $\begin{cases} y=tx+1,\ t\in Q \\ y=\sqrt{x^2-x+1} \end{cases}$

$(tx+1)^2=x^2-x+1 \Rightarrow x[(t^2-1)x+(2t+1)]=0 \Rightarrow x=\dfrac{2t+1}{1-t^2}$

而 $y=\dfrac{2t^2+t}{1-t^2}+1=\dfrac{t^2+t+1}{1-t^2}$ 而 $-\frac{1}{2}<t<1$

而類似「問題2 $\rightarrow$ 問題3」步驟的文字部分省略, 直接進入「應用問題 4 的結果」。應用問題 4 的結果, 可得

設 $t=\dfrac{m}{n}$ 爲介於 0 與 1 之間的最簡分數, 分別代入 $x=\dfrac{2t+1}{1-t^2}$ 與 $y=\dfrac{t^2+t+1}{1-t^2}$, 得

$$x=\frac{\frac{2m}{n}+1}{1-\frac{m^2}{n^2}}=\frac{n(2m+n)}{n^2-m^2},\qquad y=\frac{\frac{m^2}{n^2}+\frac{m}{n}+1}{1-\frac{m^2}{n^2}}=\frac{m^2+mn+n^2}{n^2-m^2},$$

由 1, $\dfrac{n(2m+n)}{n^2-m^2}$, $\dfrac{m^2+mn+n^2}{n^2-m^2}$, 三邊長中第二長邊 $\dfrac{m^2+mn+n^2}{n^2-m^2}$ 所對角爲 $60^\circ$,

得 $n^2-m^2$, $n(2m+n)$, $m^2+mn+n^2$ 三邊長中第二長邊 $m^2+mn+n^2$ 所對角爲 60°, $m$、$n$ 爲二互質正整數且 $m<n$。(「第二長邊」是由

$$m^2+mn+n^2=\sqrt{(n^2-m^2)^2-(n^2-m^2)[n(2m+n)]+[n(2m+n)]^2}$$

與定理 2 所得的)。

以下同樣分別討論 $n=2,3$ 時, 可產生那些三角形。

若 $n=2$ 則 $m=1$ 得三邊長爲 3, 8, 7。

若 $n=3$ 則 $m=1,2$ 得三邊長爲 8, 15, 13 與 5, 21, 19。

接著, 同樣討論三邊長 $n^2-m^2$, $n(2m+n)$, $m^2+mn+n^2$ 的奇、偶性,

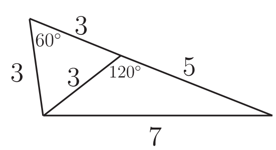
| $m$ | $n$ | $n^2-m^2$ | $n(2m+n)$ | $m^2+mn+n^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 奇 | 偶 | 奇 | 偶 | 奇 |
| 偶 | 奇 | 奇 | 奇 | 奇 |
| 奇 | 奇 | 偶 | 奇 | 奇 |

由上表可得結論: 任一個三角形至少有一個相似形, 其60°所對邊長$m^2+mn+n^2$必爲奇數。最後, 將邊長數對 (3,5,7) , (7,8,13) , (5,16,19) 分別與 (3,7,8) , (8,13,15) , (5,19, 21) 配對比較, 發現

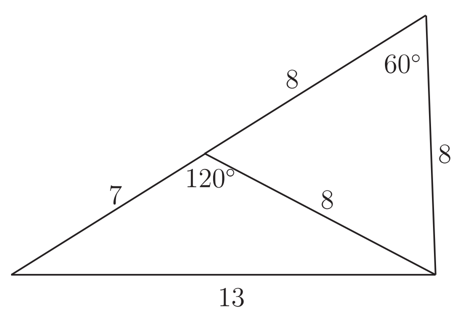
(3,5,7) 與 (3,7,8) 皆有 (3,7) 且$8=3+5$;

(7,8,13) 與 (8,13,15) 皆有 (8,13) 且 $15=7+8$;

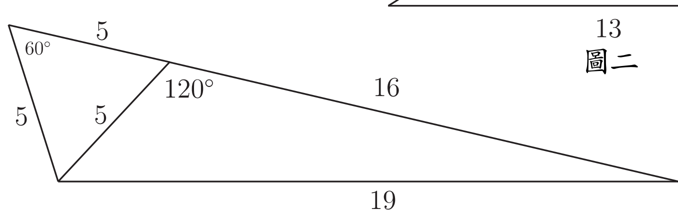
(5,16,19) 與 (5,19,21) 皆有 (5,19) 且 $21=5+16$, 故可得下列三圖。




圖一




圖二




圖三

圖一中, (3,5,7) 三角形, 邊長 7 所對角為 120°。接著, 以邊長3為底邊向外做一正三角形, 由於 120° 的外角為 60°, 故加入此邊長 3 的正三角形等於將邊長 5 向左上延長為 8, 並且將原邊長 3 繞左端點逆時針旋轉 60°, 最終得到 (3,7,8) 三角形, 且邊長 7 所對角必為 60°。圖二與圖三亦傳達了相同的作法。

## 參考文獻


1. 蔡聰明, $\sqrt{2}$ 為無理數的證明, 數學傳播季刊, 89, pp.12-23, (1999)。
2. Jörg Jahnel, When is the (co)sine of a rational angle equal to a rational number? http://www.uni-math.gwdg.de/jahnel/Preprints/cos.pdf
3. 雙週一題網路數學問題徵答網站 http://www.math.nsysu.edu.tw/∼problem/


—本文作者任教於陳立文教機構—