數學傳播 35卷1期, pp. 54-76

複分析五講 第四講

Riemann 映射定理

龔 昇 · 張德健

4.1. 共形映射

複變函數論中另一個重要組成部分是 Riemann 共映射理論, 這個理論的基本觀點是將全純函數 $w=f(z)$ 看作爲將 z 平面上的區域到 w 平面上的區域的映射。也就是說, 從幾何觀點來看待與處理全純函數。在第一講中我們已經提過, 若 $f'(z)\neq 0$, 則 $w=f(z)$ 看作一個映射是有共形性, 故稱之爲共形映射, 或全純映射。

首先觀察下面這個事實: 若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 爲一個區域, 經過全純映射 $w=f(z)$ 後得到 $f(\Omega)$, 則 $f(\Omega)$ 仍是一個區域。

我們只要證明 $f(\Omega)$ 爲連通開集合。若 w_1, w_2 爲 $f(\Omega)$ 中任意兩點, 在 Ω 內有 z_1, z_2 使得 $w_1=f(z_1)$, $w_2=f(z_2)$。因爲 Ω 爲連通區域, 故在 Ω 中有 $r(t)$ 連接 z_1 及 z_2, 而顯然 $f(r(t))\subset f(\Omega)$ 連接 w_1, w_2, 故 $f(\Omega)$ 爲連通集合。

設 w_0 是 $f(\Omega)$ 中任一點, 由第二講中的定理2.15, 對於充分小的 $\rho>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $D(w_0;\delta)$ 內任一點 w, 在 $D(z_0;\rho)$ 內存在一點 z, 使得 $f(z)=w_0$ 即 $D(w_0;\delta)\subset f(\Omega)$, 故 $f(\Omega)$ 爲開集合。上述的結果也稱爲開映射 (open mapping) 定理: f 將開集合映爲開集合。

在第一講中我們已經定義過在區域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上定義的函數 $f(z)$ 稱爲單葉 (univalent), 如果 $f(z_1)=f(z_2)$ 若且唯若 $z_1=z_2$。於是可以有如下的結果。

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上單葉且全純, 則任一點 $z\in\Omega$, 有 $f'(z)\neq 0$。反之, 若在點 $z_0\in\Omega$, $f'(z_0)\neq 0$, 則在點 z_0 的一個鄰域內 $f(z)$ 是單葉的。

對這個結果的證明並不困難, 我們現在略述如下。若 $f(z)$ 在區域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上單葉且全純, 但是有 $z_0\in\Omega$, 使得 $f'(z_0)=0$ 於是 z_0 是函數 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 階零點, 而 $m\geq 2$。由第二講中的定理2.15, 對於 $w_0=f(z_0)$ 的鄰域內的 w, $f(z)-w$ 在 z_0 的鄰域內恰有 m 個零點。這與 $f(z)$ 在 Ω 上單葉的假設相矛盾。反之, 若 $f'(z_0)\neq 0$, 則 z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的

簡單零點, 由第二講中的定理2.15 知道, 對充分小的 ρ, 存在 $\delta > 0$, 使得 $D(f(z_0);\delta)$ 中任一點 w, $f(z) - w$ 在 $D(z_0;\rho)$ 中只有一個零點, 即只有一個 z 使得 $f(z) = w$。取 $\rho_1 < \rho$, 使得 $f(D(z_0;\rho_1)) \subset D(w_0;\delta)$。故 $f(z)$ 在 $D(z_0;\rho_1)$ 上是單葉的。

此外我們也很容易證明下面的結果: 若 $w = f(z)$ 在 Ω 上單葉全純, 將 Ω 映爲 U 則反函數 $z = g(w)$ 在 U 上單葉全純, 將 U 映爲 Ω, 因此, 單葉全純映射也稱爲 雙全純映射 (biholomorphic mapping)。

下面的事實是直觀的, 但它的證明卻是十分複雜, 故述而不證。

Jordan 定理: 一條簡單封閉曲線 γ 把複平面分成兩個區域, 其中一個是有界的, 稱爲 γ 的內部, 另一個是無界的, 稱爲 γ 的外部, γ 是兩個區域的共同邊界。

現在我們來證明下面定理。

定理 4.1: 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲一區域, γ 爲 Ω 內可求長簡單封閉曲線。其內部 $U \subseteq \Omega$。若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 把 γ 雙方單值地映爲簡單封閉曲線 Γ, 則 $w = f(z)$ 在 U 上單葉, 將 U 映爲 Γ 的內部 V。

證明: 若 w_0 不在 Γ 上, 由幅角原理函數知道 $f(z) - w_0$ 在 γ 內的零點個數 N 等於

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}dz = \pm\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dw}{w - w_0}.$$

當 w_0 在 Γ 的外部時,

$$\oint_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = 0,$$

所以 $N = 0$, 即 $f(z) - w_0$ 在 U 內無零點。當 w_0 在 Γ 的內部時, 則

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dw}{w - w_0} = 1,$$

所以 $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz = \pm 1$。因爲 N 爲非負整數, 故 $N = 1$ 即 $f(z) - w_0$ 在 U 內只有一個零點。當 z 沿 γ 正方向繞一圈時, $w = f(z)$ 沿 Γ 正方向繞一圈。當 w_0 在 Γ 上時, 則 $f(z) - w_0$ 在 U 內無零點。如果不是這樣, 那我們可以找到 $z_0 \in U$ 使得 $f(z_0) = w_0$ 於是有 $D(w_0;\delta) \subset f(U)$。對於 $D(w_0;\delta)$ 中每一點 w_1, $f(z) - w_1$ 在 U 內有零點。取 $w_1 \in D(w_0;\delta)$ 且位於 Γ 之外, 則與 $f(z) - w_1$ 在 U 內無零點相互矛盾, 定理之證明因而完畢。

下面我們舉一些最簡單的雙全純映射的例子。

例 4.1: 在第二講中我們已證明, 將單位圓盤 $D(0;1)$ 映爲自己的單葉全純映射有而且只有

$$w = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}; \qquad a \in D(0;1), \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

例 4.2: 將上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映爲單位圓盤 $D(0;1)$ 的單葉全純映射有而且只有

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{z-\bar{a}},\qquad \mathrm{Im}(a)>0,\quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{4.2}$$

很明顯的, 這個變換將 $\mathrm{Im}(z)=0$ 映爲 $|w|=1$。(4.2) 也可以表示爲

$$z=\frac{\bar{a}w-e^{i\theta}a}{w-e^{i\theta}},$$

將 $|w|=1$ 映爲 $\mathrm{Im}(z)=0$。由定理 4.1 知道, 此映射將 $D(0;1)$ 單葉全純地映爲 $\mathrm{Im}(z)>0$。反之, 如有 $w=f(z)$ 將 $\mathrm{Im}(z)>0$ 單葉地映爲 $D(0;1)$。已知 (4.2) 將 $\mathrm{Im}(z)>0$ 單葉全純地映爲 $D(0;1)$, 記此映射爲 $\psi(z)$, 則 $f\circ\psi^{-1}$ 將單位圓盤映爲單位圓盤。由例 4.1 知道, $f\circ\psi^{-1}$ 必爲 (4.1) 的形式, 記作 ϕ, 即 $f\psi^{-1}=\phi$。故 $f=\phi\circ\psi$, 而此仍爲 (4.2) 的形式。

同樣可以證明:

例 4.3: 將上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$ 映爲上半平面 $\mathrm{Im}(w)>0$ 的單葉全純映射有而且只有

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 而且 $ad-bc>0$。

在第三講中我們提到, 所有分式線性變換

$$\left\{w=\frac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{C},\quad ad-bc=1\right\}$$

所組成的群是擴充複平面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 的亞純自同構群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^*)$。這個群與二階特殊線性群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\leftrightarrow\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\quad \text{對應下相互一一對應}$$

假設 $z=\frac{aw+b}{cw+d}$ 爲任意分式線性變換, 如將直線看成是半徑爲 ∞ 的圓, 則對於分式變換, 有如下的性質: 分式線性變換將圓變爲圓。這可證明如下:

若 $z=x+iy$, 則任意圓可以寫成

$$\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0,$$

且可取 α, β, γ, δ 均爲實數。這方程式也可寫成

$$\alpha z\bar{z}+\frac{1}{2}\beta(z+\bar{z})+\frac{1}{2i}\gamma(z-\bar{z})+\delta=0,$$

或可寫成

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0 \tag{4.3}$$

這裡 $A = \alpha$, $C = \delta$ 爲實數, $B = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2i}\gamma$ 爲複數。若 $\alpha = 0$, 即 $A = 0$, 則 (4.3) 表示一條直線, 否則 (4.3) 表示一個圓。而任一分式線性變換 $z = \frac{aw+b}{cw+d}$ 是由平移 $z = w + b$, 伸縮 $z = aw$ 及 $z = \frac{1}{w}$ 等三種變換所組成, 而這三種變換都是將圓變爲圓的, 這只要一一驗證便可得知。若將 $z = w + b$ 代入 (4.3) 中, 我們便得到

$$Aw\bar{w} + (A\bar{b} + B)w + (Ab + \bar{B})\bar{w} + Ab\bar{b} + Bb + \bar{B}\bar{b} + C = 0,$$

這仍是 (4.3) 的形式。若將 $z = aw$ 代入 (4.3) 式中, 得

$$Aa\bar{a}w\bar{w} + Baw + \bar{B}\bar{a}\bar{w} + C = 0,$$

這也是 (4.3) 的形式。最後若將 $z = \frac{1}{w}$ 代入 (4.3) 式中, 得

$$Cw\bar{w} + \bar{B}w + B\bar{w} + A = 0,$$

這仍是 (4.3) 的形式, 故分式線性變換將圓映爲圓。

若 z_1, z_2, z_3, z_4 爲 $\mathbb{C}^*$ 中的四個點, 至少有三個點是不相同的, 我們稱

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

爲這四個點的 交比 (cross ratio) 。若這四個點中有任一點爲 ∞, 則用極限來定義交比。例如

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)}$$

於是可以證明, 在分式線性變換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$下, 將 z_1, z_2, z_3, z_4 變爲 w_1, w_2, w_3, w_4, 則

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

即交比在分式線性變換下是不變的, 也就是: 交比在分式線性變換群下是個不變量。這個證明是容易的, 只要將 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ 直接代入 (w_1, w_2, w_3, w_4), 經過計算便可得出結果。

反過來, 如果有一個函數 $f(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 在分式線性變換群下是個不變量, 則 f 只是交比的一個函數。即在這種意義下在分式線性變換群下的不變量本質上只有交比。這可證明如下, 若 T 表示分式線性變換, 由假設

$$f(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = f(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

對任意 T 都成立。取 $T_1=z-z_4$, 則

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f(z_1-z_4,,z_2-z_4,z_3-z_4,0);$$

取 $T_2=\frac{1}{z}$ 則

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f(\frac{1}{z_1-z_4},\frac{1}{z_2-z_4},\frac{1}{z_3-z_4},\infty);$$

取 $T_3=z-\frac{1}{z_3-z_4}$ 則

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f\Big(\frac{z_3-z_1}{(z_1-z_4)(z_3-z_4)},\frac{z_3-z_2}{(z_2-z_4)(z_3-z_4)},0,\infty\Big);$$

取 $T_4=\frac{(z_1-z_4)(z_3-z_4)}{(z_3-z_2)}z$ 則

$$f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f\Big(\frac{(z_3-z_1)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_3-z_2)},1,0,\infty\Big)=f((z_1,z_2,z_3,z_4),1,0,\infty)$$

這便完成了證明。

4.2. 正規族 (Normal Family)

在 Riemann 共形映射理論中, 最重要也是最深刻的定理便是 Riemann 映射定理, 我們現在就來討論這個定理。

定理 4.2(Riemann 映射定理): 若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 爲單連通區域, 其邊界點多於一點, z_0 爲 Ω 中任意一點, 則在 Ω 上存在唯一的單葉全純函數 $f(z)$, 將 Ω 映到單位圓盤 $D(0;1)$ 上, 且 $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$。

在這個定理中要求邊界點多於一點是十分自然的。如果 Ω 的邊界點只有一點, 我們不妨假設這個點是 ∞, 若 $f(z)$ 將它映到單位圓盤, 則由 Liouville 定理知道, 這個函數是常數。

由 Riemann 映射定理我們立即得到 : 在 $\mathbb{C}$ 中任意兩個邊界多於一點的單連通區域都有單葉全純函數將一個映爲另一個。

若 Ω_1, Ω_2 爲 $\mathbb{C}$ 中的兩個區域, 且存在一個單葉全純函數, 將 Ω_1 映到 Ω_2 上, 則稱 Ω_1, Ω_2 是 全純等價 (holomorphic equivalent) 的。於是 Riemann 映射定理表明 : 任意邊界點多於一點的單連通域都是全純等價的。任意單連通區域是相互拓樸等價的, 即可以經過連續變換將一個區域變到另一個區域, 這是顯然的。而 Riemann 映射定理告訴我們: 拓樸等價導出全純等價, 這當然是十分深入的定理。在下一講中我們還可以看到這個定理在高維情形是不成立的 (Poincaré 定理), 這就更突出這個定理在單複變函數論中的特殊地位。

這個定理的證明要依賴全純函數的正規族 (normal family) 的概念。正規族的概念是函數論中的一個基本概念在某種意義上與集合論中的緊緻 (compact) 集合相當。在下一講中我們將作進一步討論。

定義 4.1: 在區域 Ω 上的函數族 $\mathscr{F}$ 稱爲正規的, 如果 $\mathscr{F}$ 中任一序列中一定有子序列在 Ω 的任一緊緻部分集合上一致收斂, 即在 Ω 上內閉一致收斂。

定理 4.3(Montel 定理): 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲一區域, $\mathscr{F}$ 爲 Ω 上的全純函數族, 若存在正的常數 M 使得

$$|f(z)| \leq M$$

對所有的 $z \in \Omega$, $f \in \mathscr{F}$ 都成立, 則 $\mathscr{F}$ 是一個正規族。

爲了要證明 Montel 定理, 我們要先證明定理 4.4 (Arzelà-Ascoli 定理), 這是一個有廣泛應用的定理, 在第五講中我們仍會用到。

定義 4.2: 若 $\mathscr{F} = \{f\}$ 爲區域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函數族, 若對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得對滿足 $|z - w| < \delta$ 的任意兩點 $z, w \in V$, 及任意 $f \in \mathscr{F}$,

$$|f(z) - f(w)| \leq \varepsilon$$

成立, 則稱 $\mathscr{F}$ 爲 等度連續 (equicontinuous)。

定義 4.3: 若 $\mathscr{F} = \{f\}$ 爲區域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函數族, 若存在一個正數 $M > 0$, 使得任意 $z \in V$, $f \in \mathscr{F}$

$$|f(z)| \leq M$$

成立, 則稱 $\mathscr{F}$ 爲 一致有界 (uniformly bounded)。

定理 4.4(Arzelà-Ascoli 定理) : 設 K 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的緊緻集合。若函數族 $\mathscr{F} = \{f_\nu\}$ 是等度連續及一致有界的則 $\mathscr{F}$ 中有子序列在 K 上一致收斂。換句話說, 在緊緻集合上等度連續及一致有界可導出一致收斂。

證明 : 在 K 上存在一個到處稠密的序列 $\{\xi_k\}$, 例如取具有有理座標的點的全體集合。由於 $\mathscr{F}$ 在 K 上一致有界, 故對 ξ_1, 在 $\{f_\nu(\xi_1)\}$ 中可以找到一個收斂的子序列 $\{f_{\nu_{1k}}(\xi_1)\}$。然後在 $\{f_{\nu_{1k}}(\xi_2)\}$ 中可以找到一個收斂的子序列 $\{f_{\nu_{2k}}(\xi_2)\}$, ..., 這樣一直進行下去, 就得到陣列

$$\begin{array}{l} \nu_{11} < \nu_{12} < \cdots < \nu_{1j} < \cdots, \\ \nu_{21} < \nu_{22} < \cdots < \nu_{2j} < \cdots, \\ \quad\vdots \\ \nu_{k1} < \nu_{k2} < \cdots < \nu_{kj} < \cdots, \\ \quad\vdots \end{array} \tag{4.4}$$

這裡每一行是前一行的子序列, 且 $\lim\limits_{j\to\infty} f_{\nu_{kj}}(\xi_k)$ 對所有的 k 都存在。顯然 ν_{jj} 是嚴格遞增序列, 也是 (4.4) 中每一行的子序列。因此 $\{f_{\nu_{jj}}\}$ 是 $\{f_\nu\}$ 的一個子序列, 在所有的點 ξ_k 上收斂, 爲簡單起見, 記 ν_{jj} 爲 ν_j。

由於 $\mathscr{F}$ 在 K 上等度連續, 故給定 $\varepsilon>0$, 可取到 $\delta>0$, 使得對任意兩個點 $\xi,\xi'\in K$ 及 $f\in\mathscr{F}$, 只要 $|\xi-\xi'|<\delta$, 即可導出

$$|f(\xi)-f(\xi')|<\varepsilon/3.$$

由於 K 爲緊緻集合, 故可以用有限個半徑爲 $\delta/2$ 的鄰域來覆蓋 K。在每一個這樣的鄰域中取一點 ξ_k, 於是存在一個 N, 使得當 $\ell,j>N$ 時

$$|f_{\nu_\ell}(\xi_k)-f_{\nu_j}(\xi_k)|<\varepsilon/3$$

成立, 對於每一點 $\xi\in K$, 一定可以找到一個點 ξ_k, 使得 $|\xi_k-\xi|<\delta$。於是

$$\begin{aligned} &|f_{\nu_\ell}(\xi)-f_{\nu_\ell}(\xi_k)|<\varepsilon/3\\ \text{及}\qquad &|f_{\nu_j}(\xi)-f_{\nu_j}(\xi_k)|<\varepsilon/3 \end{aligned}$$

成立。因此當 $\ell,j>N$ 時

$$\begin{aligned} |f_{\nu_\ell}(\xi)-f_{\nu_j}(\xi)| &\le |f_{\nu_\ell}(\xi)-f_{\nu_\ell}(\xi_k)|+|f_{\nu_\ell}(\xi_k)-f_{\nu_j}(\xi_k)|+|f_{\nu_j}(\xi_k)-f_{\nu_j}(\xi)|\\ &<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon \end{aligned}$$

成立。由於 K 爲緊緻集合, 故 $\{f_{\nu_j}\}$ 在 K 上一致收斂, 定理之證明完畢。

在這裡我們還要注意兩點:

(1) 定理 4.4 中的條件, 等度連續及一致有界不僅僅是一致收斂的充分條件, 而且也是必要條件, 讀者不妨自行證之。

(2) 定義 4.2 及定理 4.4 中的等度連續的概念, 用的是歐氏空間度量, 如果改用其他的度量, 這個定理依然成立。這在第五講中會用到, 我們在此不再重證此定理。

現在我們用 Arzelà-Ascoli 定理來證明 Montel 定理。

定理 4.3 的證明: 對於 $z_0\in U$, 一定存在 $R>0$ 使得 $\bar{D}(z_0;R)\subset U$。由於 U 爲一開集合, 故其餘集 U^C 爲閉集合。由於 $\bar{D}(z_0;R)\cap U^C=\emptyset$, 故在這兩個集合之間有一正的距離, 即存

在 $\rho > 0$, 當 $z \in \bar{D}(z_0; R)$, $w \in U^C$ 時, $|z-w| > \rho$。對任意 $z \in \bar{D}(z_0; R)$, 任意 $f \in \mathscr{F}$, 在圓盤 $\bar{D}(z;\delta)$, 上用 Cauchy 不等式, 得到

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\rho}$$

記 $\frac{M}{\rho} = C$ 於是對任意 z, $z' \in \bar{D}(z_0; R)$, 我們有

$$|f(z) - f(z')| \leq C|z - z'|$$

這表明 $\mathscr{F}$ 在 $\bar{D}(z_0; R)$ 上是等速連續的。事實上, 任給 $\varepsilon > 0$, 只要取 $\delta = \varepsilon / C$ 即可!

若 K 爲 U 上任意一個緊緻部分集合, 我們可以用有限個 $\bar{D}(z_0; R)$ 來覆蓋它, 故 $\mathscr{F}$ 在 K 上也是等速連續的。由 Arzelà-Ascoli 定理, $\mathscr{F}$ 中任意序列 $\{f_\nu\}$, 可以找到一個子序列 $\{f_{\nu_k}\}$ 在 K 上一致收斂, 所以可以用證明定理 4.4 中已用過的對角線方法證明在 $\{f_\nu\}$ 中存在這樣的子序列 $\{f_{\nu_k}\}$, 在 U 中所有的緊緻部分集合上一致收斂。定理的證明因而完畢。

4.3. Riemann 映射定理

現在我們將應用 Montel 定理來證明 Riemann 映射定理。

定理 4.2 的證明：不妨假設 U 爲一有界區域。固定一點 $z_0 \in U$, 記 $\mathscr{F} = \{\sigma(z)\}$ 爲單葉全純函數族, 這裡 $\sigma(z)$ 爲單葉全純函數將 U 映入 $D(0;1)$ 之中, 且 $\sigma(z_0) = 0$。這樣的函數族 $\mathscr{F}$ 是非空的, 這是因爲 U 是有界的, 故存在 $R > 0$, 使得 $U \subseteq D(0; R)$。函數 $\sigma(z) = \frac{1}{2R}(z - z_0)$ 將 z_0 映爲 0, 全純且單葉, 且滿足 $|\sigma(z)| < \frac{1}{2R}(R + R) = 1$, 故 $\sigma \in \mathscr{F}$ 由此得出 $\mathscr{F} \neq \emptyset$。由於 $\mathscr{F}$ 中的函數爲全純且有界 (上界爲 1), 故由 Montel 定理, $\mathscr{F}$ 爲正規族。定義

$$M = \sup\{|\sigma'(z_0)| : \sigma \in \mathscr{F}\}$$

若 $\bar{D}(z_0; r)$ 爲一個能夠包含在 U 中的以 z_0 爲中心, r 爲半徑的閉圓盤, 於是由 Cauchy 不等式 $|\sigma'(z_0)| \leq \frac{1}{r}$。故 $M \leq \frac{1}{r}$, 現在我們要證明在 $\mathscr{F}$ 中存在 σ_0 使得 $\sigma_0'(z_0) = M$。由 M 的定義, 知道在 $\mathscr{F}$ 中存在一個序列 σ_j, 使得 $|\sigma_j'(z_0)| \to M$。由於 $\mathscr{F}$ 爲正規族, 故序列 $\{\sigma_j\}$ 中有子序列 $\{\sigma_{j_k}\}$ 在 U 中任一個緊緻集合上一致收斂到 σ_0。由於 $|\sigma_j'(z_0)| \to M$, 故 $|\sigma_0'(z_0)| = M$。將 σ_0 乘以模爲 1 的複數, 得到一個新的 σ_0 使得 $|\sigma_0'(z_0)| = M$。

現在我們來證明：σ_0 在 U 上爲單葉的。這裡我們要應用到幅角原理。若 Q, R 爲 U 中兩個不同的點, 且 $0 < S < |Q - R|$。在 $\bar{D}(R; S)$ 上, 考慮函數 $\psi_k(z) = \sigma_{j_k}(z) - \sigma_{j_k}(Q)$。由於 σ_j 爲單葉的, ψ_k 在 $\bar{D}(R; S)$ 上不等於零, 由 Hurwitz 定理, 其極限函數 $\sigma_0(z) - \sigma_0(Q)$ 或是恆等於零, 或是在 $\bar{D}(R; S)$ 上恆不等於零。由於 $\sigma_0'(z_0) = M > 0$, 故 σ_0 不可能恆等於

零。因此, 對所有 $z \in \bar{D}(R;S)$ 有 $\sigma_0(z) \neq \sigma_0(Q)$, 特別有 $\sigma_0(R) \neq \sigma_0(Q)$。由於 R, Q 爲在 U 上任意選取的兩個點, 故 σ_0 爲單葉的。

最後我們要證明 σ_0 將 U 映到 $D(0;1)$ 爲一映成函數。由於 U 爲單連通區域, 如果 F 爲 U 上不等於零的全純函數, 則可在 U 上定義 $\log F$ 爲

$$\log F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} d\xi + \log F(z_0),$$

這裡 γ_z 爲從 z_0 到 z 的逐段 C^1 曲線。由於 U 是單連通的, 故這樣定義的 $\log F(z)$ 是不依賴於路徑 γ_z 的選取! 定義了 $\log F(z)$, 就可以定義 $F(z)$ 的 α 次方。

$$F^\alpha(z) = \exp(\alpha \log F(z)), \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

如果 σ_0 不是將 U 映成 $D(0;1)$, 則存在點 $\beta \in D(0;1) \backslash \sigma_0(U)$。令

$$\varphi_\beta(\xi) = \frac{\xi - \beta}{1 - \bar{\beta}\xi},$$

於是 $\mu(\xi) = (\varphi_\beta \circ \sigma_0(\xi))^{1/2}$ 是在 U 上定義的全純函數。若 $\tau = \mu(z_0)$, 令

$$\varphi_\tau(\xi) = \frac{\xi - \tau}{1 - \bar{\tau}\xi}$$

及

$$\nu(\xi) = \frac{|\mu'(z_0)|}{\mu'(z_0)} (\varphi_\tau \circ \mu(\xi)),$$

於是 $\nu \in \mathscr{F}$。但是 $\nu(z_0) = 0$ 及

$$|\nu'(z_0)| = \frac{1 + |\beta|}{2|\beta|^{1/2}} M > M,$$

這與 σ_0 的定義相互矛盾。故 σ_0 必須是映成函數。這樣的 σ_0 就是 Riemann 映射定理中所需的 f。如果還存在另外一個單葉函數 $g(z)$ 也有這個性質, 則 $F(z) = f(g^{-1}(z))$ 是單位圓盤上的一個自同構, 且 $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$。由第二講中的定理 2.18 單位圓盤上的全純自同構群定理知道 $F(z) = z$! 故 $f(z) = g(z)$。如果 U 是一個無限區域, 則可用變換將 U 變成有界區域, 定理因而證畢。

由 Riemann 映射定理我們知道: 存在單葉全純函數將單連通區域 U 內的點與單位圓盤內的點一一對應。現在問題是 : 邊界上有沒有相對應的關係? 事實上, 單連通區域可以有十分複雜的邊界, 這裡我們只敍述一個最簡單的情形而不予證明。

若 U 爲由一條 Jordan 曲線 Γ 所圍成的區域, 若 $w=f(z)$ 爲 U 上的單葉全純函數, 將 U 映成到單位圓盤 $D(0;1)$, 則 $f(z)$ 可以擴充到 Γ 上, 使得 $f(z)$ 在 $\bar{U}$ 上連續, 並且在 Γ 上的點與單位圓週 $|w|=1$ 上的點之間有一一對應關係。

4.4. 對稱原理 (Symmetric Principle)

定理 4.5 : (Painlevé 定理)若 U_1, U_2 是兩個區域, $U_1\cap U_2=\emptyset$, $\partial U_1\cap\partial U_2=\gamma$, 這裡 γ 爲一段可求長的曲線 (端點不在內)。若 f_1, f_2 分別在 U_1, U_2 上全純, 在 $U_1\cup\gamma$ 及 $U_2\cup\gamma$ 上連續, 且在 γ 上 $f_1(z)=f_2(z)$, 則函數

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in U_1\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma\\ f_2(z), & z\in U_2\end{cases}$$

在 $U_1\cup U_2\cup\gamma$ 上全純, f_1 與 f_2 稱爲越過邊界 γ 互爲解析延拓。

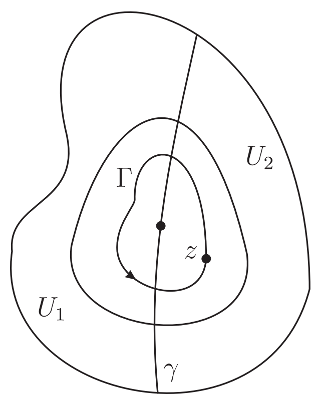

圖1

證明 : 由已知的條件知道 : f 在 $U_1\cup U_2\cup\gamma$ 上連續, 在 U_1 及 U_2 上全純, 所以我們只要證明 f 在 γ 上全純。設 $z_0\in\gamma$, 取 r 使得 $D(z_0;r)\subset U=U_1\cup U_2\cup\gamma$。設 Γ 是 $D(z_0;r)$ 內任一可求長的簡單封閉曲線。若 Γ 在 $U_1\cup\gamma$ 之內, 則由 Cauchy 積分定理知道

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma f_1(z)dz=0.$$

同理, 若 Γ 在 $U_2\cup\gamma$ 之內, 則

$$\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma f_2(z)dz=0.$$

若 Γ 同時屬於 U_1 及 U_2, 令 Γ_1 爲屬於 U_1 的部分, Γ_2 爲屬於 U_2 的部分, 而 γ 在 Γ 的內部的部分記作 Γ_0, 則

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1+\Gamma_0} f_1(z)dz + \int_{\Gamma_2-\Gamma_0} f_2(z)dz = 0.$$

故由 Morera 定理, $f(z)$ 在 $D(z_0;r)$ 上全純, 特別在 $z=z_0$ 處全純, 而 z_0 爲 γ 上任一點, 故 $f(z)$ 在 U 上全純。定理的證明因而完畢。

由 Painlevé 定理, 可推導出下面定理。

定理 4.6 : 對稱原理 (Symmetric Principle)設區域 U 位於實數軸的同一側, 其邊界包含有實數軸上的線段 γ (端點不在內)。若 $f(z)$ 在 U 上全純, 在 $U\cup\gamma$ 上連續, 且 $f(z)$ 在 γ 上取實值, 則一定存在一個函數 $F(z)$, 在 $U\cup U'\cup\gamma$ 上全純, 且在 U 內 $F(z)=f(z)$, 這裡 U' 爲 U 關於實數軸的對稱區域, 且 $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$。

證明 : 在 $U\cup U'\cup\gamma$ 上定義函數

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z\in U\cup\gamma; \\ \overline{f(\bar{z})} & z\in U'. \end{cases}$$

這樣的函數滿足 $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$。現在要證明 $F(z)$ 在 $U\cup U'\cup\gamma$ 上全純, 先證 $F(z)$ 在 U' 上全純。若 $z_0\in U'$, z 是 z_0 的鄰域內的一點, 則

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{\overline{f(\bar{z})}-\overline{f(\bar{z}_0)}}{z-z_0} = \overline{\Big(\frac{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}\Big)}$$

故

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \overline{f'(\bar{z}_0)}.$$

又由於 $f(z)$ 在 γ 上取實值, 即 $\overline{f(x_0)}=f(x_0)$, 當 $x_0\in\gamma$。故當 $z\in U'$ 時,

$$\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U'}} F(z) = \lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U'}} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\lim_{\substack{z\to x_0\\ z\in U'}} f(\bar{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0)$$

故 $F(z)$ 在 $U'\circ\gamma$ 上連續。由 Painlevé 定理, $F(z)$ 在 $U\cup U'\cup\gamma$ 上全純。定理 4.6 的證明因而完畢。

定理 4.6 還可敍述成更爲一般的形式。

定理 4.6′ : (對稱原理) 設 U 位於直線 l 的同一側, 其邊界包含 l 上一線段 γ (端點不在內)。若 $f(z)$ 在 U 上全純, 在 $U\cup\gamma$ 上連續, 且 $f(z)$ 在 γ 上的值位於直線 L 上, 則存在 $F(z)$

在 $U \cup U' \cup \gamma$ 上全純, 在 U 內 $F(z)=f(z)$, 這裡 U' 爲 U 關於 l 對稱的區域。若 z_1, z_2 爲 $U \cup U' \cup \gamma$ 內關於 l 對稱的兩點, 則 $F(z_1)$, $F(z_2)$ 是關於 L 對稱的兩點。

證明：用變換 $Z=az+b$ 將 l 變換成實數軸, $W=cw+d$ 將 L 變成實數軸, 然後再變換回到 z, w 即可!

對稱原理還可以推廣成, 將定理 4.6 中的 γ 改成一段圓弧, 同樣可以解析延拓。

4.5. Riemann 曲面 (Riemann surfaces) 的一些例子

在 Riemann 映射定理中指出, 任意兩個邊界多於一點的單連通域是全純等價的, 即存在雙方單值 (即單葉) 的全純映射, 將一個映爲另一個。如果全純映射不是雙方單值 (即單葉) 的, 如多值函數或無窮多值函數, 則如何建立起映射的一一對應呢? 這就要有 Riemann 曲面的概念。Riemann 曲面是複分析中極爲重要的概念, 可以用很長的篇幅來討論, 例如讀者可參考 L.V. Ahlfors and L. Sario [1] 或 J. B. Conway [2] 的書籍。但作爲通俗的介紹, 我們只能用舉例的方法來描述一下什麼是 Riemann 曲面。

在第一講中討論初等函數時, 我們已經看到, 對於冪函數 $w=z^\alpha$, $\alpha=a+ib$, 當 $b\neq 0$ 時, $w=z^\alpha$ 是無窮多值函數; 當 $b=0$ 而 $a=n$ 爲整數時, $w=z^n$ 爲單值函數, 但其反函數不是單值函數。當 z 在角形區域 $\frac{(k-1)2\pi}{n}<\arg(z)<\frac{k2\pi}{n}$, $k=1,2,\ldots,n$ 中變動時, $w=z^n$ 將任一這樣區域映爲整個 w 平面除去正實軸。這個映射是一對一的, 也是全純的。每個這樣的角形區域就像在正實數軸上有一“切割” (cut)。於是這 n 個角形區域對應到 n 張 w 複平面加上切割。將這 n 張平面按 $k=1,2,\ldots,n$ 進行排列, 然後將前一張的切割的下邊與後一張的切割的上邊黏起來, 而第 n 張切割的下邊與第一張的切割的上邊黏起來 (這樣做看起來似乎不可能, 除非這些張自己相交, 但這裡是指讓第 n 張的切割的下邊與第一張的切割的上邊相等同)。於是這樣就構成了一個 Riemann 曲面。稱每一張平面爲 Riemann 曲面的一葉 (sheet) 或稱爲 Riemann 曲面的一個分支 (branch) 。明顯地看出, 當點 z 在 z 平面上變動時, 相應的點 w 在 Riemann 曲面上變動, 並且 z 平面與 Riemann 曲面之間的點是相互一一對應的。

可以用任意從 0 到 ∞ 的射線取代正實數軸作爲切割。這樣得到的 Riemann 曲面與原來得到的 Riemann 曲面是等同的, 但在對 Riemann 曲面進行討論之前須說明是如何切割的。

點 $w=0$ 有特殊位置, 它聯繫著所有的分支, 一條曲線圍繞 $w=0$ 旋轉必須轉 n 圈後才能封閉, 這樣的點稱爲支點 (branch point)。如果將 $z=\infty$ 也考慮在內, 則 ∞ 點也是一個支點。一般來說, 一個支點不必聯繫所有的分支, 如果它聯繫 m 個分支, 則稱此爲 $m-1$ 階 (order) 的支點。

同樣我們可以討論 $w=e^z=e^{x+iy}$ 的 Riemann 曲面。這函數將帶狀區域 $(k-1)2\pi<y<k2\pi$ 映爲 w 平面的一個分支, 而切割爲正實數軸。有無窮多分支互相黏接, 而 $w=0$ 不在 Riemann 曲面上, 因 e^z 永不爲零。

反過來, 若函數爲 $w=z^{\frac{1}{n}}$, 而 n 爲大於 1 的正整數, 則這函數將 n 個分支的 Riemann 曲面映爲 w 平面, 而且相互一一對應。同樣 $w=\log z$ 將無窮多分支的 Riemann 曲面映爲 w 平面, 而且相互一一對應的。

因此, 在討論 Riemann 曲面與複平面之間的對應時, 往往必須指明, 這個討論是在 Riemann 曲面的那一個分支上進行。

4.6. Schwarz $-$ Christoffel 公式

Riemann 映射定理是一個存在定理, 至於如何具體寫出這個映射來, 卻不是件簡單的事。在 4.1 節中只是舉了幾個最簡單的例子。下面我們要給出一個多邊形映射到上述平面的具體公式, 這個公式稱爲 Schwarz $-$ Christoffel 公式。

若 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty$, 爲 n 個實數, 取 $a_0=-\infty$, $a_{n+1}=+\infty$。若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, 爲 n 個實數, 滿足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+1<n$, 且令

$$\beta(t)=(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}, \tag{4.5}$$

則顯然有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\beta(t)|dt<\infty.$$

當 $t<a_k$ 時, 取

$$(t-a_k)^{\alpha_k-1}=\exp\Big((\alpha_k-1)\log(t-a_k)\Big)$$

這樣的一個分支, 使其幅角爲 $\pi(\alpha_k-1)$。於是當 $t<a_1$ 時,

$$\arg\beta(t)=\pi\Big[[\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-n\Big];$$

當 t 在 (a_{k-1},a_k) 這線段上時

$$\arg\beta(t)=\pi\Big[[\alpha_k+\cdots+\alpha_n)-(n-k+1)\Big],\quad 2\le k\le n;$$

當 t 在 $(a_n,+\infty)$ 這線段上時,

$$\arg\beta(t)=0.$$

於是定義了 $n+2$ 個複數

$$w_k=c\int_0^{a_k}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt,\quad 0\le k\le n+1, \tag{4.6}$$

這裡 c 爲一個正的實數, 在上半平面 $\bar{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ 定義函數

$$f(z) = c \int_0^z \beta(t) dt, \tag{4.7}$$

這函數顯然在 $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ 上是全純的。而在實數軸上有: 當 $x \in (a_{k-1}, a_k)$ 時 $(1 \leq k \leq n+1)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= w_{k-1} + c \int_{a_{k-1}}^x \beta(t) dt \\ &= w_{k-1} + c e^{i[(\alpha_k - 1)\pi + \cdots + (\alpha_n - 1)\pi]} \int_{a_{k-1}}^x |\beta(t)| dt. \end{aligned}$$

於是 $f(x) - w_{k-1}$ 在區間 (a_{k-1}, a_k) 上有相同的幅角 $[(\alpha_k - 1)\pi + \cdots + (\alpha_n - 1)\pi]$, 而其絕對值由 0 增長到

$$l_k = c \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\beta(t)| dt. \tag{4.8}$$

故 x 在區間 $[a_{k-1}, a_k]$ 中變動時, 則 f 在區間 $\delta_{k-1} = [w_{k-1}, w_k]$ 中變動。δ_{k-1} 的幅角爲 $(\alpha_k - 1)\pi + \cdots + (\alpha_n - 1)\pi$, 長度爲 l_k。

要證明 $w_0 = w_{n+1}$, 我們只要證明: 對任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $R > 0$, 使得當 $z \in \bar{H}$ 及 $|z| \geq R$ 時, $|w_0 - f(z)| \leq \varepsilon$ 成立即可。因爲這表明

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_{n+1} = w_0$$

這可證明如下︰由於

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\beta(t)| dt < +\infty,$$

故任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_1 > 0$ 使得

$$\int_{-\infty}^{-R_1} |\beta(t)| dt \leq \varepsilon/2,$$

於是當 $-\infty < x < -R_1$ 時, 有

$$\left| w_0 - c \int_0^x \beta(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{-R_1} |\beta(t)| dt \leq \varepsilon/2$$

當然可以選取 $R_1 \geq \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$。取 $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, 而 $\rho_0 \geq R_1$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$, 於是

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(\rho_0)| &= c \left| \int_0^{\theta_0} (\rho_0 e^{i\theta} - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (\rho_0 e^{i\theta} - a_n)^{\alpha_n - 1} \rho_0 e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq c\rho_0 (\rho_0 - R_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_n - n}. \end{aligned}$$

由於 $\alpha_1+\cdots\alpha_n < n-1$, 故當 $\rho_0 \to \infty$ 時, 上式 $\to 0$。故有 $R \geq R_1$, 使得當 $\rho_0 = |z_0| \geq R$ 時, $|f(z_0) - f(\rho_0)| \leq \varepsilon/2$。因此, 當 $|z| \geq R$, $\text{Im}z \geq 0$ 時, $|f(z) - w_0| \leq \varepsilon$。這就證明了 $w_0 = w_{n+1}$。, 於是 f 將 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 映到閉 $(n+1)$ 邊形 $\triangle$, 其邊爲 $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$, 其頂點爲 $w_0, w_1, \ldots, w_n = w_0$。

若假設 $0 < \alpha_k < 2$, 則可證這個多邊形在頂點 w_k 處, 其內角爲 $\alpha_k\pi$。這可證明如下 :

由於 $\beta(t)$ 可寫成 $\beta_k(t)(t-a_k)^{\alpha_k-1}$, 這裡 $\beta_k(t) = \prod_{j\neq k}(t-a_j)^{\alpha_j}$。顯然 $\beta_k(t)$ 在 a_k 點的一個鄰域 U 中是全純的, 故可展開成 Taylor 級數

$$\beta_k(t) = a_{0,k} + a_{1,k}(t-a_k) + \cdots, \quad a_{0,k} \neq 0.$$

於是當 $z \in U \cap \bar{H}$ 時, 有

$$\begin{aligned} f(z) &= w_k + c\int_{a_k}^{z}(a_{0,k} + a_{1,k}(t-a_k) + \cdots)(t-a_k)^{\alpha_k-1}dt \\ &= w_k + c\frac{a_{0,k}}{\alpha_k}(z-a_k)^{\alpha_k}\Big[1 + \frac{\alpha_k}{\alpha_k+1}\cdot\frac{a_{1,k}}{a_{0,k}}(z-a_k) + \cdots\Big]. \end{aligned}$$

當 z 沿著傾角 θ 的直線趨於 a_k 時 $(0 \leq \theta \leq \pi)$, $f(z)$ 沿著一條曲線趨於 w_k, 而在 w_k 點處, 其切線的傾角爲 $\arg(a_{0,k}) + \alpha_k\theta$, 這是因爲 $c > 0$ 及 $\alpha_k > 0$。在 $\bar{H}$ 中作一個以 a_k 爲中心的小半圓, 使之全包含在 $U \cap \bar{H}$ 之中。讓 z 在這個小半圓的週邊上變動, 從 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi$, 這樣 $f(z)$ 在一條 Jordan 曲線上變動從 δ_{k-1} 上的點變到 δ_k 上的點, 而 $f(z)$ 的幅角也由 $\arg(a_{0,k})$ 變到 $\arg(a_{0,k}) + \alpha_k\pi$。故在頂點 w_k 處的內角爲 $\alpha_k\pi$。而在頂點 $w_0 = w_{n+1}$ 處的內角爲 $((n-1) - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n))\pi > 0$, 這是因爲 $n+1$ 邊形的內角和爲 $(n-1)\pi$, 特別當 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = n-2$ 時, 則頂點 w_0 處的內角爲 π, 即此爲 n 邊形。

公式 (4.7) 就叫做 Schwarz − Christoffel 公式, 這裡 $\beta(t)$ 由公式 (4.5) 所定義, 而 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n < n-1$。公式 (4.7) 將上半平面映爲 $n+1$ 邊形, 其頂點分別爲 $w_0, w_1, \ldots, w_n$, $w_{n+1} = w_0$, $w_j (j = 0, 1, \ldots, n+1)$ 由公式 (4.6) 所定義。多邊形的邊爲 $[w_{k-1}, w_k]$, $(k = 1, \ldots, n+1)$, 其長度爲 l_k, 由公式 (4.8) 所給出。若 $0 < \alpha_j < 2$ $(j = 1, \ldots, n)$, 則在頂點 w_k 處的內角爲 $\alpha_k\pi (k = 1, \ldots, n)$。在 $w_0 = w_{n+1}$ 處的內角爲 $[(n-1) - (\alpha_1+\cdots+\alpha_n)]\pi$。

當然, 如果把公式 (4.6) 寫成更一般的形式

$$w_k = c\int_0^{a_k}(t-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(t-a_n)^{\alpha_n-1}dt + c', \qquad 0 \leq k \leq n+1,$$

則公式 (4.7) 還可以寫成更一般的形式

$$f(z) = c\int_0^z \beta(t)dt + c', \tag{4.9}$$

這裡 c, c' 爲兩個正的常數。公式(4.9) 也是 Schwarz $-$ Christoffel 公式。

附錄 A. Poincaré 定理

在本講中提到了一個十分深刻的 Riemann 映射定理, 大致上講這個定理告訴我們兩個區域若拓樸等價一定導出全純等價。但 Poincaré 定理卻說, 不存在雙全純映射將 $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 中的單位球映爲多圓柱。這裡 $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, 單位球定義爲 $B(0;1) = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < 1\}$, 多圓柱定義爲 $D^n(0;1) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$。我們在此給出 Poincaré 定理的一個證明, 目的就是要指出單複變與多複變函數論之間存在一些本質性的差異!

爲了簡化符號, 我們只討論 $\mathbb{C}^2$ 的情形。有興趣的讀者可參考其它相關文獻, 如 R. E. Greene and S. G. Krantz [3] 及 S. G. Krantz [K]。一個映射 $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ 稱爲在區域 (連通開集合) $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 上全純, 若 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 爲區域 Ω 上的全純函數。函數 $g(z) = g(z_1, z_2)$ 稱爲在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 上全純, 若固定任意的變數 z_1 或 z_2, $g(z)$ 是餘下兩個變數的全純函數。全純映射稱爲是雙全純 (biholomorphic), 如果映射是一對一, 映成, 且 f^{-1} 也是全純的。

要證明 Poincaré 定理, 我們要先討論在 Ω 上的全純自同構群。現在先看一下 $\mathbb{C}^2$ 中單位球及雙圓柱上的全純自同構群。回顧在定出單位圓盤上的全純自同構群時, 主要是用了 Schwarz 引理, 在多複變的情形, 我們要應用推廣了的 Schwarz 引理, 這便是 Cartan 的兩個定理。

定理 A.1 (Cartan 定理) : 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$ 爲有界區域, $p \in \Omega$, 若 $f = (f_1, f_2)$ 爲全純映射, 將 Ω 映入到 Ω, 且 $f(p) = P$, $J_f(p) = I$, 則 $f(z) \equiv z$, 這裡 $J_f(z)$ 爲 f 在 z 點的 Jacobi 矩陣, 即

$$J_f(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{bmatrix}.$$

I 爲單位 2×2 方陣。

證明 : 不妨假設 $p = 0$。我們可用反證法, 如果定理不成立, 則 $f(z)$ 在 0 點可以展開成 Taylor 級數

$$f(z_1, z_2) = z + A_m(z) + \cdots,$$

這裡 $A_m(z) = (A_m^{(1)}(z), A_m^{(2)})$ 爲第一個出現不爲 0 的項, 這裡 $A_m^{(1)}(z)$, $A_m^{(2)}(z)$ 爲 m 次齊次多項式 $(m \geq 2)$。

記 $f^1=f,\ f^2=f\circ f,\ldots,f^j=f^{j-1}\circ f\ (j\geq 2)$, 於是

$$\begin{aligned} f^1(z)&=z+A_m(z)+\cdots\,,\\ f^2(z)&=f(z)+A_m(f(z))+\cdots\,,\\ &=z+A_m(z)+A_m(z)+\cdots\,,\\ &=z+2A_m(z)+\cdots\,,\\ &\ \vdots\\ f^j(z)&=z+jA_m(z)+\cdots\,. \end{aligned}\tag{A.1}$$

由於 Ω 是有界區域, f 將 Ω 映入到 Ω, 故由 Montel 定理知 $\{f^j\}$ 爲正規族, 即有子序列 $\{f^{j_k}\}$ 當 $j_k\to\infty$ 時, $f^{j_k}\to F$。再由 Weierstrass 定理知, f^{j_k} 的 m 階導數在 0 點的值收斂到 F 的 m 階導數在 0 點的值。由 (A.1), f^{j_k} 的 m 階導數在 0 點的值當 $j_k\to\infty$ 時是趨於 $+\infty$ 的。另一方面, F 的 m 階導數在 0 點的值不可能爲 $+\infty$, 由此得到矛盾, 故 $A_m(z)\equiv 0$ 必須在 Ω 上成立, 即 $f(z)\equiv z$。定理因而證畢。

定理 A.1 在單複變的情形 Ω 爲單位圓盤 D 時成爲：若全純函數 $f(z)$ 將 D 映入到 D, $f(0)=0,\ f'(0)=1$, 則 $f(z)\equiv z$, 即 Schwarz 引理等號成立的那個部分。

下面我們來證明 Cartan 的另一個定理。

若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^2$ 爲一個區域, 假設任一點 $(z_1,z_2)\in\Omega$, 任一實數 $\theta\in\mathbb{R}$, 有 $(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)\in\Omega$, 則稱 Ω 爲一圓形區域 (Circular Domain)。

定理 A.2 (Cartan 定理)：若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}^2$ 爲有界圓形區域, f 爲將 Ω 映到 Ω 自身的雙全純映射, 且 $f(0)=0$, 則 f 爲線性映射, 即 $f(z)=Az$, 其中 A 爲一常數 2×2方陣。

證明：令 $\theta\in[0,2\pi]$, $\rho_\theta(z_1,z_2)=(e^{i\theta}z_1,e^{i\theta}z_2)$, 考慮映射

$$g=\rho_{-\theta}\circ f^{-1}\circ\rho_\theta\circ f,$$

則

$$J_g(0)=\begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix} J_f^{-1}(0)\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{bmatrix} J_f(0)=I.$$

由於 $g(z)$ 將 Ω 映入到 Ω, 且 $g(0)=0$, $J_g(0)=I$, 故由定理 A.1 知道 $g(z)\equiv z$, 此即

$$f\circ\rho_\theta=\rho_\theta\circ f.\tag{A.2}$$

將 f 在 0 點附近展開成收斂冪級數

$$f(z)=\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}z_1^jz_2^k=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}z_1^jz_2^k\Big)$$

於是

$$\rho_\theta\circ f=(e^{i\theta}f_1,e^{i\theta}f_2)=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}e^{i\theta}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}e^{i\theta}z_1^jz_2^k\Big)$$

而

$$\begin{aligned}f\circ\rho_\theta&=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}(e^{i\theta}z_1)^j(e^{i\theta}z_2)^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}(e^{i\theta}z_1)^j(e^{i\theta}z_2)^k\Big)\\&=\Big(\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(1)}e^{i(j+k)\theta}z_1^jz_2^k,\sum_{j,k=0}^{\infty}a_{jk}^{(2)}e^{i(j+k)\theta}z_1^jz_2^k\Big).\end{aligned}$$

由 (A.2), 比較係數即得所有 $a_{jk}=0$ 除去 $j+k=0$ 及 $j+k=1$, 即得 $f(z)$ 在 0 點附近爲線性的, 故由全純函數的唯一性, 我們便知 $f(z)$ 在整個 Ω 上爲線性的。定理因而證畢。

這個 Cartan 定理, 在單複變的情形, 若 Ω 爲單位圓盤 D 時: 若全純單位函數 $f(z)$ 將 D 映到 D 本身且 $f(0)=0$, 則 $f(z)=e^{i\theta}z$。

有了定理 A.1 及 A.2, 我們現在便可計算出 $\mathbb{C}^2$ 中單位球及雙圓柱上的全純自同構群。若 Ω 爲 $\mathbb{C}^2$ 中的區域, 如果存在將 Ω 映爲自身的雙全純映射 $f(z)$, 則稱此映射爲 Ω 上的全純自同構 (holomorphic automorphism) 或 雙全純自同構 (biholomorphic automorphism)。Ω 上所有的全純自同構的全體組成一個群, 這個群稱爲 Ω上全純自同構群 (group of holomorphic automorphisms), 記作 $Aut(\Omega)$。

定理 A.3: $Aut(D^2(0;1))$ 是由雙全純映射

$$w=\Big(e^{i\theta_1}\frac{z_1-a_1}{1-\bar a_1z_1},e^{i\theta_2}\frac{z_2-a_2}{1-\bar a_2z_2}\Big)\tag{A.3}$$

及

$$w=\Big(e^{i\theta_2}\frac{z_2-a_1}{1-\bar a_1z_2},e^{i\theta_1}\frac{z_1-a_2}{1-\bar a_2z_1}\Big)\tag{A.4}$$

的全體所組成, 這裡 $z=(z_1,z_2)\in D^2(0;1)$, $a_1,a_2\in D(0;1)$, $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$。

證明：若 $\phi(z)\in Aut(D^2(0;1))$, 且 $\phi(0)=\xi=(\xi_1,\xi_2)$, 定義

$$\psi(z)=\Big(\frac{z_1-\xi_1}{1-\bar\xi_1z_1},\frac{z_2-\xi_2}{1-\bar\xi_2z_2}\Big),$$

則 $g\equiv\psi\circ\phi\in Aut(D^2(0;1))$, 且 $g(0)=0$。由定理 A.2,

$$g(z)=Az=(z_1,z_2)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=(a_{11}z_1+a_{21}z_2,a_{12}z_1+a_{22}z_2).$$

由於 $g\in Aut(D^2(0;1))$, 故

$$|a_{11}z_1+a_{21}z_2|<1,\qquad |a_{12}z_1+a_{22}z_2|<1.$$

對任意 $(z_1,z_2)\in D^2(0;1)$ 都成立, 這立即導出 $|a_{ij}|<1$ $(i,j=1,2)$。取

$$\begin{aligned}z^{1,k}&=\Big((1-\frac{1}{k})\frac{\bar a_{11}}{|a_{11}|},(1-\frac{1}{k})\frac{\bar a_{21}}{|a_{21}|}\Big)\in D^2(0;1),\\ z^{2,k}&=\Big((1-\frac{1}{k})\frac{\bar a_{12}}{|a_{12}|},(1-\frac{1}{k})\frac{\bar a_{22}}{|a_{22}|}\Big)\in D^2(0;1),\end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned}g(z^{1,k})&=\Big((1-\frac{1}{k})(|a_{11}|+a_{21}|),(1-\frac{1}{k})\Big(\frac{\bar a_{11}a_{12}}{|a_{11}|}+\frac{\bar a_{21}a_{22}}{|a_{21}|}\Big)\Big)\in D^2(0;1),\\ g(z^{2,k})&=\Big((1-\frac{1}{k})\Big(\frac{a_{11}\bar a_{12}}{|a_{12}|}+\frac{a_{21}\bar a_{22}}{|a_{22}|}\Big),(1-\frac{1}{k})(|a_{12}|+a_{22}|)\Big)\in D^2(0;1),\end{aligned}$$

於是

$$(1-\frac{1}{k})(|a_{11}|+|a_{21}|)<1,\qquad (1-\frac{1}{k})(|a_{12}|+|a_{22}|)<1.$$

讓 $k\to\infty$, 即得

$$|a_{11}|+|a_{21}|\le 1\qquad |a_{12}|+|a_{22}|\le 1. \tag{A.5}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{k},0)\in D^2(0;1),&(0,1-\frac{1}{k})\in D^2(0;1),\\ g(1-\frac{1}{k},0)&=\Big((1-\frac{1}{k})a_{11},(1-\frac{1}{k})a_{12}\Big)\in D^2(0;1),\\ g(0,1-\frac{1}{k})&=\Big((1-\frac{1}{k})a_{21},(1-\frac{1}{k})a_{22}\Big)\in D^2(0;1),\end{aligned}$$

當 $k\to\infty$ 時, $(1-\frac{1}{k},0)$ 及 $(0,1-\frac{1}{k})$ 趨於 $\partial D^2(0;1)$, 所以

$$(a_{11},a_{12})\in\partial D^2(0;1)\quad 及\quad (a_{21},a_{22})\in\partial D^2(0;1)$$

於是

$$\max\{|a_{11}|,|a_{12}|\}=1\qquad \max\{|a_{21}|,|a_{22}|\}=1. \tag{A.6}$$

要 (A.5), (A.6) 同時成立, 只有下列兩種情形:

(1) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $|a_{22}| = 1$,

(2) $a_{12} = 1$, $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $|a_{21}| = 1$,

也就是 A 只有下列兩種情形:

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}; \qquad\qquad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

於是得到

$$(1) \quad \psi \circ \phi(z) = z \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} = (z_1 e^{i\theta_1}, z_2 e^{i\theta_2}),$$

或

$$(2) \quad \psi \circ \phi(z) = z \begin{bmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{bmatrix} = (z_2 e^{i\theta_2}, z_1 e^{i\theta_1}),$$

若 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, 則 (1) 即是

$$\Big(\frac{\phi_1 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \phi_1}, \frac{\phi_2 - \xi_2}{1 - \bar{\xi}_2 \phi_2}\Big) = (z_1 e^{i\theta_1}, z_2 e^{i\theta_2}),$$

即

$$\frac{\phi_1 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \phi_1} = z_1 e^{i\theta_1}, \qquad \frac{\phi_2 - \xi_2}{1 - \bar{\xi}_2 \phi_2} = z_2 e^{i\theta_2}.$$

從而得到

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) = \Big(e^{i\theta_1} \frac{\xi_1 e^{-i\theta_1} + z_1}{1 + \bar{\xi}_1 e^{i\theta_1} z_1}, e^{i\theta_2} \frac{\xi_2 e^{-i\theta_2} + z_2}{1 + \bar{\xi}_2 e^{i\theta_2} z_2}\Big),$$

而此即爲 (A.3) 的形式。同樣在 (2) 的情形, ϕ 爲 (A.4) 的形式, 定理因而證畢。

現在我們要計算單位球上的全純自同構群。首先, 當 $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, 直接計算可以得到

$$\phi_a(z_1, z_2) = \Big(\frac{z_1 - a}{1 - \bar{a} z_1}, \frac{(1 - |a|^2)^{1/2} z_2}{1 - \bar{a} z_1}\Big) \in Aut(B(0; 1)). \tag{A.7}$$

由於

$$\Big|\frac{z_1 - a}{1 - \bar{a} z_1}\Big|^2 + \Big|\frac{(1 - |a|^2)^{1/2} z_2}{1 - \bar{a} z_1}\Big|^2 = \frac{|z_1|^2 - 2Re(\bar{a} z_1) + |a|^2 + (1 - |a|^2)|z_2|^2}{|1 - \bar{a} z_1|^2}$$

上式的右邊小於或等於

$$\frac{1 - |a|^2 - 2Re(\bar{a} z_1) + |a|^2 + |a|^2 |z_1|^2}{|1 - \bar{a} z_1|^2} = 1$$

若且唯若 $(z_1, z_2) \in B(0;1)$, 故 (A.7) 成立。顯然, $(\phi_a)^{-1} = \phi_{-a}$。一個 2×2 的方陣 U 稱爲 酉方陣 (unitary matrix), 若 $U\bar{U}^t = I$, 這裡 $\bar{U}^t$ 爲 U 共軛轉置。而映射 $w = U(z)$ 稱爲 酉旋轉 (unitary rotation)。

定理 A.4: 若 $g \in Aut(B(0;1))$, 且 $g(0) = 0$, 則 g 爲酉旋轉, 即 $g(z) = zA$, 而 A 爲一酉方陣。

證明：由於 $B(0;1)$ 爲圓形區域, 故由定理 A.2 知, $g(z) = zA$, 而 g 將單位向量映到單位向量。若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

(α, β) 爲一單位向量, 則 $(\alpha, \beta)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (\gamma, \delta)$ 也是單位向量, 而 $\gamma = a_{11}\alpha + a_{21}\beta$, $\delta = a_{12}\alpha + a_{22}\beta$。於是

$$|a_{11}\alpha + a_{21}\beta|^2 + |a_{12}\alpha + a_{22}\beta|^2 = 1 \tag{A.8}$$

取 $\alpha = 1$, $\beta = 0$ 及 $\alpha = 0$, $\beta = 1$, 則得到

$$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 = 1 \quad 及 \quad |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = 1. \tag{A.9}$$

將 (A.9) 代入 (A.8) 中, 我們得到

$$Re\Big((a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22})\alpha\bar{\beta}\Big) = 0.$$

取 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $\alpha = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 則得到

$$Re\Big(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22}\Big) = 0,$$
$$\mathrm{Im}\Big(a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22}\Big) = 0,$$

所以

$$a_{11}\bar{a}_{21} + a_{12}\bar{a}_{22} = 0. \tag{A.10}$$

由 (A.9) 及 (A.10), 我們便得到 A 爲一酉方陣。

定理 A.5: $Aut(B(0;1))$ 中每一元素均可表爲最多兩個酉旋轉及一個 ϕ_a 的複合, 即 $Aut(B(0;1))$ 是由酉旋轉及 ϕ_a 及其複合所組成。

證明：若 $f \in Aut(B(0;1))$, $f(0)=\alpha$, 則有酉方陣 U 使得 $\alpha U = (|\alpha|, 0)$。作 $g(z) = \phi_{|\alpha|} \circ U \circ f(z)$, 這裡 $\phi_{|\alpha|}$ 是由公式 (A.7) 所定義, 將 $(|\alpha|, 0)$ 映爲 0 點。於是 $g(z) \in Aut(B(0;1))$, 且

$$g(0) = \phi_{|\alpha|} \circ U \circ f(0) = \phi_{|\alpha|} \circ U \circ \alpha = 0.$$

由定理 A.4 得知

$$g(z) = zV = V(z)$$

其中 V 爲酉方陣, 於是

$$f(z) = U^{-1} \circ \varphi_{-|\alpha|} \circ V(z)$$

這便證明了定理 A.5。

現在我們終於可以證明 Poincaré 定理了。

定理 A.6: (Poincaré 定理)不存在雙全純映射 Φ 將 $D^2(0;1)$ 映到 $B(0;1)$ 上。

證明：我們用反證法。假設存在這樣的雙全純映射 ϕ 將 $D^2(0;1)$ 映爲 $B(0;1)$, 且 $\phi(0)=\alpha$, 則 $\Phi = \phi_\alpha \circ \phi$ 也是一個雙全純映射, 將 $D^2(0;1)$ 映成 $B(0;1)$, 且 $\Phi(0) = \phi_\alpha \circ \phi(0) = 0$, 這裡 ϕ_α 是由公式 (A.7) 所定義。若 $\Lambda \in Aut(D^2(0;1))$, 則

$$\Lambda \mapsto \Phi \circ \Lambda \circ \Phi^{-1} \in Aut(B(0;1)) \tag{A.11}$$

建立起這兩個群之間的同構。現考慮在 $Aut(D^2(0;1))$ 及 $Aut(B(0;1))$ 令原點不動的子群, 分別記作 $Aut_0(D^2(0;1))$ 及 $Aut_0(B(0;1))$, 則 (A.11) 建立起這兩個子群的同構。

由定理 A.3 $Aut_0(D^2(0;1))$ 是由所有的雙全純映射

$$w = \left(e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2\right) = (z_1, z_2) \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix} \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

組成, 也就是這個群由所有的 $\left\{ \begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$ 組成。

由定理 A.5 $Aut_0(B(0;1))$ 由所有的雙全純映射

$$w = zVU^{-1}$$

組成, 這裡 U, V 爲酉方陣。由於酉方陣之逆及乘積仍爲酉方陣, 故 $Aut_0(B(0;1))$ 由所有的 $w = zX$ 組成, 這裡 X 爲酉方陣, 也就是這個群由所有的酉方陣所組成, 即爲酉群 (unitary group) $SU(2)$。

如果存在雙全純映射將 $D^2(0;1)$ 映到 $B(0;1)$, 則由 (A.11) 建立起 $Aut_0(D^2(0;1))$ 到 $Aut_0(B(0;1))$ 的群同構, 即 $\left\{\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\}$ 與 $SU(2)$同構, 但這是不可能的, 因爲群 $\left\{\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{bmatrix}, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\right\}$ 爲 Abel 群, 而 $SU(2)$ 不是 Abel 群, 於是得到矛盾。故這樣的雙全純映射 Φ 是不存在的, 這便證明了 Poincaré 定理。

總結來說, Poincaré 定理指出 Riemann 映射定理在 $\mathbb{C}^n(n \geq 2)$ 時是不對的, 即兩個區域是拓樸等價的未必是全純等價。於是就引出了 $\mathbb{C}^n$ 中區域的分類問題, 即如果兩個區域拓樸等價, 什麼時候全純等價呢? 這個問題距離解決還很遙遠, 希望更多的年輕人投入這個方向的研究!

参考文獻

1. L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1960.
2. J. B. Conway, *Function of One Complex Variable*, Springer-Verlay, 1986.
3. R. E. Greene and S. G. Krantz, *Biholomorphic self-maps of domains*, Lecture Notes #1276, Springer-Verlag, 136-207.
4. S. G. Krantz, *Theory of Several Complex Variables*, 2nd edition, Wadsworth & Brooks / Cole, 1992.
5. S. Gong and Y. Gong, *Concise Complex Analysis*, revised edition, World Scientific, 2007.
6. 龔昇與張德健, 微積分五講, 第一講,「數學傳播」, 第30卷, 第1期, 25-35; 第二講,「數學傳播」, 第30卷, 第2期, 12-27; 第三講,「數學傳播」, 第30卷, 第3期, 31-41; 第四講,「數學傳播」, 第30卷, 第4期, 20-31; 第五講,「數學傳播」, 第31卷, 第1期, 17-29。

—本文作者龔昇(1930~2011) 逝世前任教中國科技大學,張德健任教美國 Georgetown University 數學系—