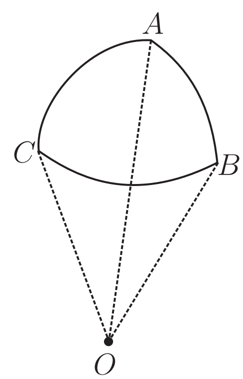
數學傳播 35卷1期, pp. 51-53

以積分計算球面三角形的面積

張海潮

所謂球面三角形, 是指在球面上以測地線 (大圓的一部份) 爲三邊所圍成的三角形。如圖一, O是球心, A、B、C 是三角形的三個頂點：



圖一

$\overparen{AB}$、$\overparen{BC}$、$\overparen{CA}$ 均爲大圓的一部份, 是 $\triangle ABC$ 的邊; 而 OAB、OBC、OCA 三個平面, 其兩兩之間所夾的兩面角 $\angle B$、$\angle C$、$\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的三個頂角。我們仍以 B、C、A 表這三個頂角的弳度量。

在單位球面, 即半徑爲 1 的情形, 球面三角形 ABC 的面積公式爲：

$$A+B+C-\pi$$

式中 π 代表圓周率。

關於面積公式的證明, 一般是利用球面的對稱性[1] 或是利用 Gauss-Bonnet 定理[2]。 本文想要直接以球面上的積分來證明。

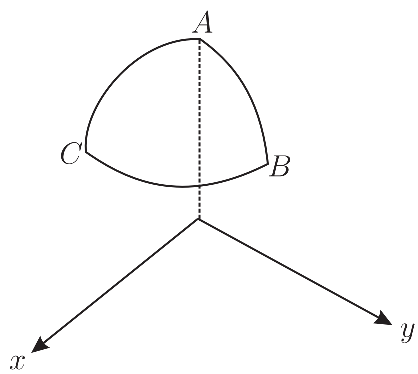
[1]見 曹亮吉著《阿草的葫蘆》P.173 遠哲科學教育基金會。

[2]見 日本數學會出版數學百科辭典英文版 附錄 A 表4 微分幾何。

若是將球心置於原點, 並以 θ、φ 將單位球面參數化, θ 代表經度, $\frac{\pi}{2}-\varphi$ 代表緯度, 則有

$$x=\sin\varphi\cos\theta \qquad y=\sin\varphi\sin\theta \qquad z=\cos\varphi$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$

爲了簡化積分, 我們只考慮直角三角形[3]。並且爲了方便, 將 A 置於北極, $\overset{\frown}{AC}$在 xz 平面, B 點的 y 坐標大於0, $\angle C=\frac{\pi}{2}$ 如圖二所示 :



圖二

圖中, C 的坐標爲 $(\sin\varphi_0, 0, \cos\varphi_0)$, B 的坐標爲 $(\sin\varphi_1\cos A, \sin\varphi_1\sin A, \cos\varphi_1)$, A 點的坐標爲 $(0,0,1)$。

$\overset{\frown}{CB}$ 是由過 C、B 和原點的平面 E 與球面截出。由於 $\angle C=\frac{\pi}{2}$, 此一平面 E 與 xz 平面垂直, 因此法向量的方向爲 $(l,0,n)$, 取 $n>0$, $l\le 0$ 而有

$$l\sin\varphi_0+n\cos\varphi_0=0$$
$$l\sin\varphi_1\cos A+n\cos\varphi_1=0$$

$\triangle ABC$ 面積的積分式爲[4]

$$\int_{\theta=0}^{A}\int_{\varphi=0}^{?}\sin\varphi d\varphi d\theta$$

積分的上、下限 θ 爲 $0\le\theta\le A$, 至於 φ, 解

$$l\sin\varphi\cos\theta+n\cos\varphi=0$$

[3]任何三角形都可分成兩個直角三角形之和或差。

[4]球面上經線和緯線互相垂直, 當 θ 增至 $\theta+\Delta\theta$, φ 增至 $\varphi+\Delta\varphi$, 這一小塊面積的近似値是 $\sin\varphi\Delta\varphi\Delta\theta$, 所以 $\sin\varphi d\varphi d\theta$ 就是面積元素, 易見球的表面積是$\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\sin\varphi d\varphi d\theta=4\pi$。

得

$$\cot\varphi = -\frac{l}{n}\cos\theta$$

或

$$\cos\varphi = -l\cos\theta/\sqrt{n^2+l^2\cos^2\theta}$$

記得 $n>0$, $l\le 0$。接著計算

$$\begin{aligned}\iint \sin\varphi d\varphi d\theta = \int[-\cos\varphi]d\theta &= \int_{\theta=0}^{A}\Big(\frac{l\cos\theta}{\sqrt{n^2+l^2\cos^2\theta}}+1\Big)d\theta\\ &= A+\int_{\theta=0}^{A}\frac{l\cos\theta}{\sqrt{n^2+l^2\cos^2\theta}}d\theta\end{aligned}$$

令 $t=\sin\theta$ $\qquad$ ($\theta=A$ 時 $t=\sin A$, $\theta=0$ 時 $t=0$)

$$\begin{aligned}\int\frac{l\cos\theta}{\sqrt{n^2+l^2\cos^2\theta}}d\theta = \int\frac{ldt}{\sqrt{l^2+n^2-l^2t^2}} &= \sin^{-1}\frac{lt}{\sqrt{l^2+n^2}} \quad (l<0)\\ &= \frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{lt}{\sqrt{l^2+n^2}}\end{aligned}$$

將 t 以 $\sin A$ 和 $t=0$ 代入相減得

$$-\cos^{-1}\frac{l\sin A}{\sqrt{l^2+n^2}}+\frac{\pi}{2} = \cos^{-1}\Big(\frac{-l\sin A}{\sqrt{l^2+n^2}}\Big)-\frac{\pi}{2} \qquad (l<0)$$

得到面積等於

$$A+\cos^{-1}\Big(\frac{-l\sin A}{\sqrt{l^2+n^2}}\Big)-\frac{\pi}{2}$$

我們尚未計算 $\angle B$ 或 $\cos B$。B 是 $\overparen{AB}$ 所在的平面 (法向量取爲 $(-\sin A,\cos A,0)$, 和平面 E (法向量取爲 $(l,0,n)$) 之間的夾角, 因此[5]

$$\cos B = \frac{-l\sin A}{\sqrt{l^2+n^2}} \qquad (l<0)$$

由前所得面積等於

$$A+\cos^{-1}\Big(\frac{-l\sin A}{\sqrt{l^2+n^2}}\Big)-\frac{\pi}{2} = A+B-\frac{\pi}{2} = A+B+C-\pi \qquad (C=\frac{\pi}{2})$$

—本文作者爲台大數學系退休教授—

[5]此處需注意法向量之方向, 否則 $\cos B$ 會差一個負號。