數學傳播 35卷1期, pp. 29-35

角比例共軛點

陳建燁

一、引言

對於平面幾何, 有些人抱持這樣的看法: 解析幾何的方法出現之後, 平面幾何還有什麼可研究的呢? 若你也這麼認爲的話, 不妨參考 Morris Kline 所寫的「古今數學思想」(Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,1972), 在第 35 章,「射影幾何學的復興」中, 提到了19世紀, 對幾何學興趣的恢復。

在19世紀的英國和歐洲大陸, 有許多人對平面幾何進行研究, 得到大量的成果, 有興趣的讀者, 可以參考 Johnson, R. A. 所著的「近代歐氏幾何學」(Modern Geometry:An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle, 1929)。其中,「等角共軛點」(Isogonal Conjugates) 的定義, 給了我極其深刻的印象。

在接下來的文章中,「角比例表現點」和「角比例共軛點」是本人的原創。想法的起源是考察重心的重心座標時, 發現「三角形某一角被中線分成兩角的正弦比」恰好是「此角的兩鄰邊的邊長比」, 聯想到角平分線定理也和邊長比有關, 聯結之後, 得到中線和角平分線的關連性, 即定理 1。接著, 嚐試將中點和角平分點推廣到邊上的任意點, 由此定義了「角比例表現點」, 發現了隱藏其中的對稱性-角比例表現定理, 即定理 2。再來, 由「等角共軛點」觀念的啓發, 類比地成功定義了「角比例共軛點」, 即定理 3。最後, 很自然地推導出「角比例共軛點」和「角比例自共軛點」的重心座標, 即定理 4 和定理 5。

二、本文

首先, 先介紹所謂的「等角共軛點」: 在 $\triangle ABC$ 中, 設 P_1、P_2、P_3 分別在三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上, 且 $\overline{AP_1}$、$\overline{BP_2}$、$\overline{CP_3}$ 三線共點於 P。分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上取點 Q_1、Q_2、Q_3, 使 $\angle CAP_1=\angle BAQ_1$, $\angle CBP_2=\angle ABQ_2$, $\angle ACP_3=\angle BCQ_3$, 則 $\overline{AQ_1}$、$\overline{BQ_2}$、$\overline{CQ_3}$ 三線共點於 Q, Q 就稱爲 P 在 $\triangle ABC$ 中的等角共軛點。

上述的事實, 可由 Ceva 定理的正弦形式加以證明。關於等角共軛點, 已有不少的研究, 本文不再贅述。接下來, 眞正開始本文的工作:

(一) 中線與角平分線

以「平分」的觀點而言, 中線可稱爲「邊平分線」; 同時, 不妨將一角的內角平分線和對邊的交點, 稱作此角在邊上的「角平分點」。透過面積方法, 筆者發現了中線與角平分線的一個連結:

定理1: 如圖 1, $\triangle ABC$ 中, 設 $\overline{AP}$ 爲角平分線, $\overline{AM}$ 爲中線, $\angle BAM=\theta_1$, $\angle CAM=\theta_2$, 則 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{CP}{BP}$。

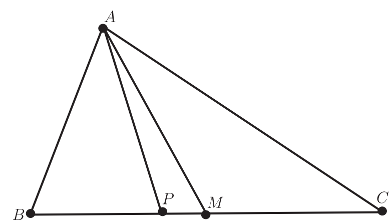

圖 1

證明: $\triangle ABC$ 的面積記爲 $S_{\triangle ABC}$。

$\because$ $\overline{AP}$ 爲角平分線, 可知 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$。

$\because$ $\overline{AM}$ 爲中線, 可知 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle ACM}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AM}\sin\theta_1=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AM}\sin\theta_2 \Rightarrow \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}$, 得證。

(二) 角比例表現點

中線與角平分線所產生的比例式, 帶來了啓發, 這個比例式的作用, 相當於「將三角形某一角所被分成兩角的正弦比, 轉化成對邊上的邊長比」, 由此, 我作出以下的定義:

定義1: (角比例表現點) $\triangle ABC$ 中, 設 Q 爲 $\overline{BC}$ 上一點, $\angle BAQ=\theta_1$, $\angle CAQ=\theta_2$。設 P 爲 $\overline{BC}$ 上一點, 滿足 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}$, 則稱「$P$ 爲 Q 在 $\overline{BC}$ 上的角比例表現點」。(見圖2)

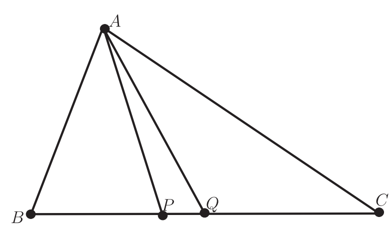

圖 2

(三) 角比例表現定理

一方面, 從定理 1 可知, 從三角形的某一角出發, 對邊上的「角平分點」, 正是中點在這邊上的「角比例表現點」; 另一方面, 此角被角平分線分成的兩相等角之正弦比爲 1: 1, 而中點恰好將邊分成 1: 1 的邊長比, 由此可知, 中點是角平分點在同一邊上的「角比例表現點」。結論是,「在同一邊上, 中點和角平分點互爲彼此在這一邊上的角比例表現點」。這個結論可以推廣到一般的點嗎? 答案是肯定的, 請看以下的定理:

定理2: (角比例表現定理) $\triangle ABC$ 中, P、Q 為 $\overline{BC}$ 上兩點, $\angle BAQ=\theta_1$, $\angle CAQ=\theta_2$, $\angle BAP=\theta_3$, $\angle CAP=\theta_4$, 若 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}$, 則 $\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}=\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{BQ}}$。亦即「若 P 為 Q 在 $\overline{BC}$ 上的角比例表現點, 則 Q 也是 P 在 $\overline{BC}$ 上的角比例表現點」。

證明:

$$\because\ \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin\theta_1}{\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AQ}\cdot\sin\theta_2}=\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}$$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$(此為角平分線定理的推廣),

同理 $\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$。

根據假設有 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{BQ}}$, 得證。

(四) 角比例共軛點

「角比例表現定理」可說是一種相互關係, 此關係具有「對稱性」。這導致了一個發現, 對於三角形內任一點, 可以透過角比例表現定理, 找到唯一的對應點, 這就是以下的定理:

定理3: (角比例共軛點) $\triangle ABC$ 中, 設 P_1、P_2、P_3 分別在三邊 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上, 且 $\overline{AP_1}$、$\overline{BP_2}$、$\overline{CP_3}$ 三線共點於一點 P。設 Q_1、Q_2、Q_3 分別為 P_1、P_2、P_3 在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的角比例表現點, 則 $\overline{AQ_1}$、$\overline{BQ_2}$、$\overline{CQ_3}$ 三線共點於一點 Q, 稱 Q 為 P 的角比例共軛點。(見圖3)

證明: $\because$ $\overline{AP_1}$、$\overline{BP_2}$、$\overline{CP_3}$ 三線共點, 由角度形式的 Ceva 定理可知

$$\frac{\sin BAP_1}{\sin CAP_1}\cdot\frac{\sin ACP_3}{\sin BCP_3}\cdot\frac{\sin CBP_2}{\sin ABP_2}=1,$$

$\because$ Q_1、Q_2、Q_3 分別為 P_1、P_2、P_3 在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的角比例表現點

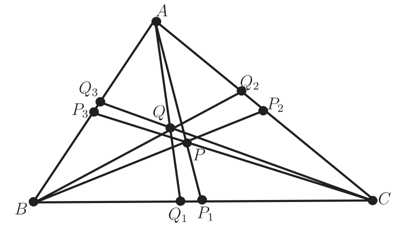

圖 3

$$\Rightarrow \frac{\overline{CQ_1}}{\overline{BQ_1}}\cdot\frac{\overline{BQ_3}}{\overline{AQ_3}}\cdot\frac{\overline{AQ_2}}{\overline{CQ_2}}=\frac{\sin BAP_1}{\sin CAP_1}\cdot\frac{\sin ACP_3}{\sin BCP_3}\cdot\frac{\sin CBP_2}{\sin ABP_2}=1,$$

由 Ceva 定理的逆定理, 得 $\overline{AQ_1}$、$\overline{BQ_2}$、$\overline{CQ_3}$ 三線共點, 證完。

由於「角比例表現定理」是一種對稱關係, 我們可從「角比例共軛點定理」的證明過程中看出, 若 Q 爲 P 的角比例共軛點, 則反過來看, P 也是 Q 的角比例共軛點。可以說, P 與 Q 互爲角比例共軛點。更進一步地, 三角形中的點, 可以透過角比例共軛關係兩兩配對。回到最初中線與角平分線的關係, 現在我們知道, 重心 G 和內心 I 爲一對角比例共軛點, 這是這兩心的一個對稱關係。

(五) 角比例自共軛點

是否有這樣的一個點, 本身就是自己的角比例共軛點? 欲回答此一問題, 可先設想, 若存在這樣的點, 則在圖 3 中, P 和 Q 會重合成一點, 從而 P_1 和 Q_1 也會重合成一點。由此可以得到,

$$\frac{\sin BAP_1}{\sin CAP_1}=\frac{\overline{CQ_1}}{\overline{BQ_1}}=\frac{\overline{CP_1}}{\overline{BP_1}}$$

另一方面, 由角平分線定理的推廣, 知

$$\frac{\sin BAP_1}{\sin CAP_1}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{CP_1}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

結合以上兩式, 可得

$$\frac{\overline{CP_1}}{\overline{BP_1}}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{CP_1}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{CP_1}}\cdot\frac{b}{c},$$

即

$$\frac{\overline{BP_1}}{\overline{CP_1}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$$

同理, $\dfrac{\overline{CP_2}}{\overline{AP_2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$, 且 $\dfrac{\overline{AP_3}}{\overline{BP_3}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$。當然以上的過程, 可以總結成以下的定理:

定理4: (角比例自共軛點) $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$。分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上取點 D、E、F, 滿足 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$, $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$, $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, 則 AD、BE、CF 三線共點於一點 J, 此點爲本身的角比例共軛點, 稱 J 爲「角比例自共軛點」。

證明: $\because \dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}\cdot\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\cdot\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=1,$

由 Ceva 定理的逆定理, 知 AD、BE、CF 三線共點於一點 J。再由「角平分線定理的推廣」及定理中的設定, 可得

$$\frac{\sin BAD}{\sin CAD}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\cdot\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}},$$

根據「角比例表現點」的定義, 此式表示「D 爲 D 在 $\overline{BC}$ 上的角比例表現點」,
同理, E、F 分別爲 E、F 在 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$上的角比例表現點,
根據「角比例共軛點」的定義, 可得「J 爲 J 的角比例共軛點」, 證完。

在「三角形幾何學」中, 有一套和直角座標相比擬的系統, 叫作「重心座標」:

定義 2: 重心座標 (Barycentric Coordinates) 給定 $\triangle ABC$, 對於三角形內一點 P, 將三角形的面積比 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=\mu_1:\mu_2:\mu_3$ 稱爲點 P 的重心座標, 記爲 $P(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$ 或 $P(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$。

設直線 AP 交 BC 於 D, BP 交 AC 於 E, CP 交 AB 於 F。在決定一個點的重心座標時, 很常用的一個技巧是 $\mu_2:\mu_3=S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=S_{\triangle DCA}:S_{\triangle DBA}=\overline{CD}:\overline{BD}$, 將面積比轉化爲線段比。

由定理 4,「角比例自共軛點」J 的「重心座標」可表示成 $(\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c})$, 相較於重心 G 的重心座標 $(1:1:1)$, 以及內心 I 的重心座標 $(a:b:c)$, 我們有理由將「角比例自共軛點」J 視爲三角形的「特殊點」, 對其幾何性質進行更深入的研究。

(六) 角比例共軛點的重心座標

引入重心座標之後, 很自然的一個問題是, 若給定 P 點的重心座標爲 $(x:y:z)$, Q 爲 P 的角比例共軛點, 則 Q 的重心座標是否可以 x, y, z 的具體函數表達? 答案是肯定的, 請看以下的定理:

定理 5 [角比例共軛點的重心座標] $\triangle ABC$ 中, 設 P 點的重心座標爲 $(x:y:z)$, 且 Q 爲 P 的角比例共軛點, 則 Q 點的重心座標爲 $(\frac{a}{x}:\frac{b}{y}:\frac{c}{z})$, 其中 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$。

證明: 設 Q 點的重心座標爲 (μ_1,μ_2,μ_3)。設 P 在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 上的垂足分別爲 D、E、

F。由 $P(x:y:z)$ 可知, $S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=y:z$。

$$\begin{aligned}
\text{注意到 } \mu_2:\mu_3 &= S_{\triangle QCA}:S_{\triangle QAB}\\
&= \overline{CQ_1}:\overline{Q_1B} \quad \text{(面積比轉化成線段比)}\\
&= \sin BAP_1:\sin CAP_1 \quad \text{(角比例共軛點的性質)}\\
&= \sin BAP:\sin CAP\\
&= (\overline{PA}\cdot\sin BAP):(\overline{PA}\sin CAP)\\
&= \overline{PF}:\overline{PE}\\
&= \frac{S_{\triangle PAB}}{c}:\frac{S_{\triangle PCA}}{b} \quad \text{(高=面積/底)}\\
&= \frac{z}{c}:\frac{y}{b}\\
&= \frac{b}{y}:\frac{c}{z},
\end{aligned}$$

同理, $\mu_1:\mu_2=\dfrac{a}{x}:\dfrac{b}{y}$, 可得 $Q(\dfrac{a}{x}:\dfrac{b}{y}:\dfrac{c}{z})$, 證完。

在定理 5 中, 取 $P(\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c})$, 則 $Q(\dfrac{a}{\sqrt{a}}:\dfrac{b}{\sqrt{b}}:\dfrac{c}{\sqrt{c}})=Q(\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c})$, 得 $P=Q$, 從另一個角度再次證明了定理 4。

三、結語

從中線與角平分線的關聯性出發, 定義了「角比例表現點」,「角比例共軛點」, 最後開發出「角比例自共軛點」。其中角比例共軛點可視爲一種對應關係, 而角比例自共軛點爲三角形的特殊點, 都可以作更進一步的探索。

後記

對於數學愛好者而言, 有一部份的人, 是由「平面幾何」燃起了火花。優美的圖形, 簡明的敍述, 嚴謹的論證, 充滿了吸引力。入門階段, 在「證明」的過程中, 訓練了我們的數學思維; 但到了一個階段之後, 單純地證明已知的結論, 已無法令人滿意。更進一步地, 我們會有這樣的期望: 我也能有所發現嗎? 我能證明自己的發現嗎? 本文是作者一番探索之後的心得, 願與有心人分享。若有不周之處, 尚祈先進予以指正, 不勝感激!

參考文獻

1. R. A. 約翰遜著, 單墫譯, 近代歐氏幾何學, 上海教育出版社, 1999年8月, p.186～191。
2. Johnson, R. A., Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle ,Boston, MA: Houghton Mifflin, 1929。
3. 黃家禮, 幾何明珠, 九章出版社, 2000年9月, p.90～91。
4. http://mathworld.wolfram.com/IsogonalConjugate.html
5. http://mathworld.wolfram.com/BarycentricCoordinates.html

— 本文作者任教台北市立第一女子高級中學—