數學傳播 34卷4期, pp. 87-90

# 從牛頓二項式定理開方到牛頓切線法

王曉明 · 王蕊珂

## 一. 問題的提出

在數學中, 再也沒有比開方更加自然的事了, 當人類產生了自然數概念並且規定了四則運算之後, 人們發現, 如果按照乘法性質, 一個數自身相乘的逆行運算是一件不太容易的事情。一個整數自身相乘以後是比較容易找到原來那個整數的, 例如2自身相乘5次是32, 從32我們也容易找到2, 但是, 如果是31, 30 呢, 開5次方就不太容易了。自從牛頓發現二項式定理以後, 人們知道開方是依據二項式定理展開的。但是, 畢竟太麻煩。有沒有一個簡單的方式或者公式來開方呢?

## 二. 一個意外

設 $A=X^n$, $X=\sqrt[n]{A}$, 我們想求 $X$, 即開方 $n$ 次, 當:

$$A\div X_{@}^{n-1}=X. \tag{1}$$

我們把右下角標打上了 (@) 的 $X_@$ 表示我們預設的那個 $X$, 把右下角沒有 @ 的 $X$ 視作 $A\div X_{@}^{n-1}$ 以後得出的商。

有三種情況:

一. 我們取的初始值 $X_@$, 與等式右邊的 $X$ 一致時, 問題就解決了, 例如 $32/2^4=2$;

二. 我們取的初始值 $X_@$ 偏小, $A/X_{@}^{n-1}>X_@$, 例如 $45/2^4=2.8125>2$。(1) 式 $A/X_{@}^{n-1}=X_0$, 於是 $X_@<X_0$, $X_0-X_@=E$。例如: $2.8125-2=0.8125$ 是一個正值, 我們把這個正值分解 $E/n$ 再加回去就可以調節原來取了偏小的初始值, 使之變大; (因爲 $A$ 開 $n$ 次方, 就是將 $X$ 自乘 $n$ 次的數值分解 $n$ 次, 所以也就自然而然地想到其誤差 $E$ 也要分解 $n$ 份, 即 $E/n$)。

三. 我們取的初始值 $X_@$ 偏大, $A/X_@^{n-1} < X_@$, 例如 $30/2^4 = 1.875 < 2$, (1) 式 $A/X_@^{n-1} = X_0$, 於是 $X_@ > X_0$, $X_0 - X_@ = -E$。例如 $1.875 - 2 = -0.125$, 我們把這個負值 $-E$ 分解 $-E/n$ 再加回去, 就可以調節原來取得偏大的初始值, 使之變小。

四. 於是我們得到:

$$X_{k+1} = X_k + (A/X_K^{n-1} - X_k)\frac{1}{n}, \quad (K = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots) \tag{2}$$

五. 我們用 (2) 式來開方。

例如我們開平方, 即 $n = 2$。$X = \sqrt{A}$, 公式:

$$X_{k+1} = X_k + (A/X_K^{2-1} - X_k)\frac{1}{2}, \tag{3}$$

設 $A = 5$。$\sqrt{5}$ 介於 $2^2$ 至 $3^2$ 之間, 我們可以取初始值 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9。隨便取一個值輸入, 只取小數第一位, 得出來的都是一樣的, 一般要求取中間值 2.5。

第一步:$2.5+(5/2.5-2.5)/2 = 2.2$; (用其它值也一樣, 例如 2.8; $2.8+(5/2.8-2.8)/2 = 2.2$。

第二部:$2.2 + (5/2.2 - 2.2)/2 = 2.23$。每一次多取一位數。

第三步:$2.23 + (5/2.23 - 2.23)/2 = 2.236$。即 $2.236 = \sqrt{5}$。

計算次數與計算精確度成爲正比。

開 3 次方也一樣, 即 $n = 3$, $X = \sqrt[3]{A}$, 公式:

$$X_{k+1} = X_k + (A/X_K^2 - X_k)\frac{1}{3}. \tag{4}$$

設 $A = 5$, 5 介於 $1^3$ 至 $2^3$ 之間, 我們可以取初始值 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 計算後只取小數第一位, 答案都是一樣。例如取 1.9。

第一步:$1.9 + (5/1.9^2 - 1.9)/3 = 1.7$。取其它值也是一樣, 例如取 1.5; $1.5 + (5/1.5^2 - 1.5)/3 = 1.7$。輸入值大於輸出值, 負反饋;

第二步:$1.7 + (5/1.7^2 - 1.7)/3 = 1.71$; 輸入值小於輸出值, 正反饋;

第三步:$1.71 + (5/1.71^2 - 1.71)/3 = 1.709$; 輸入值大於輸出值, 負反饋;

第四步; $1.709 + (5/1.709^2 - 1.709)/3 = 1.7099$。每一步多取一位數。要多精確都可以。

如果輸入值與輸出值一致:

289開平方, $\sqrt{289}$ 介於如 10 的平方至 20 平方之間, 我們取 20 爲初始值, 於是: 第一步 $20+(289/20-20)/2=17$; 第二步 $17+(289/17-17)/2=17$。說明17是個精確值。

以上方法是作者1980年發現的, 找到江西師範大學數學系, 一位教授看過之後, 覺得面熟, 將這個公式反推回去, 原來是牛頓切線法。但是, 他不知道是怎麼得出來的。原來這可以用二項式定理推出。

## 三. 二項式定理與 (2) 式巧合

$$設\ A=(X\pm Y)^n=C_0^nX^n\pm C_1^nX^{n-1}Y+C_2^nX^{n-2}Y^2\pm\cdots\pm C_n^nY^n, \tag{5}$$

(說明: 在大陸二項式表示 $C_n^k=n!/(n-k)!k!$; 在臺灣 $C_n^k=k!/(k-n)!n!$, 由於是在臺灣的雜誌發表, 就按照臺灣數學界的標記法)

$X$ 是假定值, $Y$ 是誤差值。

$$X_{k+1}=(X\pm Y)=X_k+(A/X_K^{n-1}-X_k)\frac{1}{n}. \tag{6}$$

由 (6) 式得:

$$\pm Y=(A/X_K^{n-1}-X_k)\frac{1}{n}. \tag{7}$$

我們把(5) 式等號右邊按照 (7) 式程序進行:

(一) (7) 式右端第一步是 $A/X_K^{n-1}$, 相當於 (5) 式中的:

$$\begin{aligned}&(C_0^nX^n\pm C_1^nX^{n-1}Y+C_2^nX^{n-2}Y^2\pm\cdots\pm C_n^nY^n)/X^{n-1}\\&=X\pm nY+(C_2^nX^{n-2}Y^2\pm\cdots\pm C_n^nY^n)/X^{n-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

(二) (7) 式右端第二步是減去 $X$, 即 $A/X_K^{n-1}-X_k$。

(8) 式右端減去 $X$ 得:

$$\pm nY+(C_2^nX^{n-2}Y^2\pm\cdots\pm C_n^nY^n)/X^{n-1}. \tag{9}$$

(三) (7) 式右端第三步是除以 $n$, 即 $(A/X_K^{n-1}-X_k)\frac{1}{n}$。

(9) 式除以 $n$ 得:

$$\pm Y+(C_2^nX^{n-2}Y^2\pm\cdots\pm C_n^nY^n)/nX^{n-1}. \tag{10}$$

(10) 式是由 (5) 式得來的, 現在 (7) 式左端只剩下一個 $Y$, 而 (10) 式卻是多出來一個:

$$(C_2^nX^{n-2}Y^2\pm\cdots\pm C_n^nY^n)/nX^{n-1}. \tag{11}$$

(11) 式就是我們碰到的誤差。我們在實際計算中把 (11) 式不要了。

當我們取 $X$ 值偏大, $A=(X-Y)$; 當我們取值偏小是 $A=X+Y$。

## 四. 為什麼 (2) 式是牛頓切線法

我們把 (2) 式展開:

$X_{k+1}=X_k+(A/X_K^{n-1}-X_k)\dfrac{1}{n}=X_k-(X_K^n-A)/(nX_K^{n-1})$,

注意: $f(x)=X_K^n-A$;

$f'(x)=nX_K^{n-1}$.

即 $X_{k+1}=X_k-\dfrac{(f(x))}{(f'(x))}$

(牛頓切線法, 求 $X=\sqrt[n]{A},\ A>0, X_K^n-A\Leftrightarrow X_K^n-A=0$).

開5次方例題:

$$X_{k+1}=X_k+(A/X_K^{n-1}-X_k)\frac{1}{n},\ \text{即}\ n=5,\ \text{即}\ X=\sqrt[5]{A},\ \text{得:}$$

$$X_{k+1}=X_k+(A/X_K^4-X_k)\frac{1}{5}. \tag{12}$$

例如 $A=100$:100介如 2 的 5 次方至 3 的 5 次方之間, 初始值可以取 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9. 我們取中間值 2.5. 於是;

$$2.5+(100/2.5^4-2.5)/5=2.51$$

$$2.51+(100/2.51^4-2.51)/5=2.511.\ \text{即}\ 2.511=\sqrt[5]{100}.$$

—本文作者王曉明爲退休數學老師, 王蕊珂目前就讀美國 Ohio Wesleyan University—