數學傳播 34卷4期, pp. 83-86

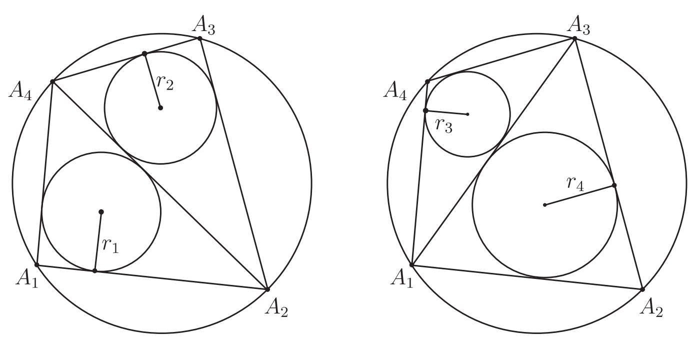
圓內接多邊形的一個性質

劉步松

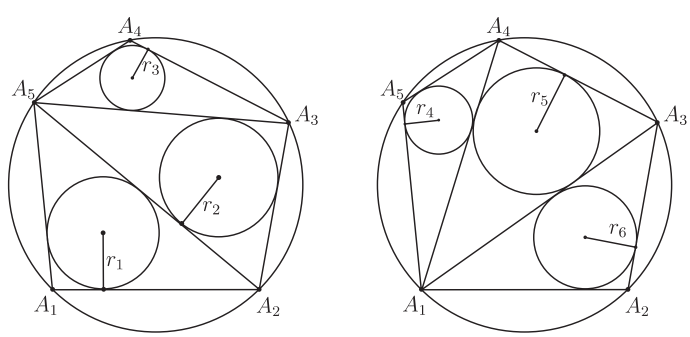
筆者研究發現, 圓內接多邊形有如下一個美妙性質。

設 $A_1A_2\cdots A_n$ 爲圓內接 n 邊形 $(n\geq 4)$, 畫 $n-3$ 條對角線將這個 n 邊形分割成 $n-2$ 個三角形 (這些對角線在多邊形內部沒有交點), 則無論如何分割, 所得到的 $n-2$ 個三角形的內切圓半徑之和是一個定值。

如圖 (一) 中有 $r_1+r_2=r_3+r_4$, 如圖 (二) 中有 $r_1+r_2+r_3=r_4+r_5+r_6$。



圖(一)



圖(二)

下面證明這個性質。

首先證明 $n=4$ 時, 性質成立。

如圖 (三), $ABCD$ 爲圓內接四邊形, 連結對角線 AC 和 BD, 設 $\triangle ABC$ 的內心爲 E, $\triangle BCD$ 的內心爲 F, $\triangle CDA$ 的內心爲 G, $\triangle DAB$ 的內心爲 H, 爲了證明性質成立, 先證明兩個結論:(1) B, E, F, C 四點共圓; (2) 四邊形 $EFGH$ 是矩形。

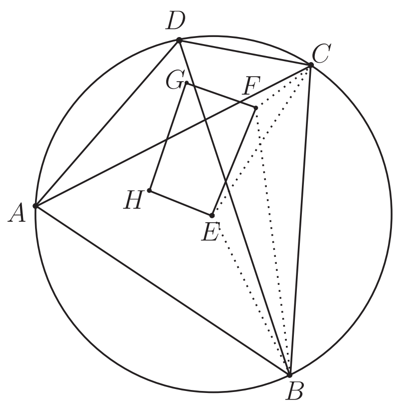


圖 (三)

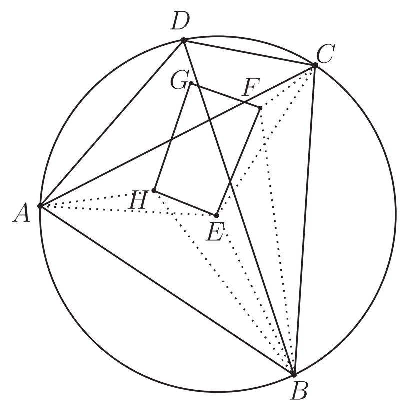


圖 (四)

證明:(1) 連結 BE, FC, BF, EC, 則

$$\begin{aligned}
\angle BEC &= 180^\circ - (\angle EBC + \angle ECB) \\
&= 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) \\
&= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC
\end{aligned}$$

同理可證 $\angle BFC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CDB$。

因爲 A, B, C, D 四點共圓, 所以 $\angle BAC = \angle CDB$, 從而 $\angle BEC = \angle BFC$, 即 B, E, F, C 四點共圓。

(2) 如圖 (四), 因爲 B, E, F, C 共圓, 所以 $\angle FEC = \angle FBC$, 同理可證, A, H, E,

B 共圓, 從而也有 $\angle HEA = \angle HBA$, 則

$$\begin{aligned}\angle HEF &= \angle AEC - (\angle FEC + \angle HEA)\\ &= \angle AEC - (\angle FBC + \angle HBA)\\ &= \Big[180^\circ - (\frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle BCA)\Big] - (\frac{1}{2}\angle DBC + \frac{1}{2}\angle DBA)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA + \angle DBC + \angle DBA)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ\end{aligned}$$

同理可證四邊形 $EFGH$ 的其他各頂角也都是 90°。這就證明了四邊形 $EFGH$ 是一個矩形。

從圖 (三) 中看到, $\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 的內切圓半徑之和就是 E 點和 G 點到對角線 AC 的距離之和, $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的內切圓半徑之和就是 F 點和 H 點到對角線 BD 的距離之和, 由於 $EFGH$ 是矩形, 所以 $EG = FH$, 從而要證明上面所說的兩個和相等, 只需證明 EG 和 AC 的夾角等於 FH 和 BD 的夾角即可。

如圖 (五), 設 EG 與 AC 相交於 P, 則

$$\begin{aligned}\angle EPC &= 180^\circ - \angle PEC - \angle ACE\\ &= 180^\circ - (\angle GEF + \angle FEC) - \angle ACE\\ &= 180^\circ - \angle GEF - \angle FEC - \angle ACE\end{aligned}$$

因爲 B, E, F, C 四點共圓,
所以 $\angle FEC = \angle FBC$, 從而

$$\begin{aligned}\angle EPC &= 180^\circ - \angle GEF - \angle FBC - \angle ACE\\ &= 180^\circ - \angle GEF - \frac{1}{2}\angle CBD - \frac{1}{2}\angle ACB\end{aligned}$$

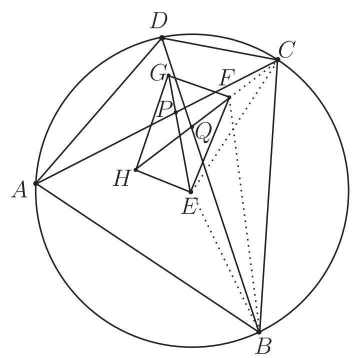


圖 (五)

設 FH 與 BD 相交於 Q, 則同理可證

$$\angle FQB = 180^\circ - \angle HFE - \frac{1}{2}\angle ACB - \frac{1}{2}\angle CBD$$

因爲 $EFGH$ 爲矩形, 所以 $\angle GEF = \angle HFE$, 從而有 $\angle EPC = \angle FQB$, 這就證明了 $n = 4$ 時性質成立。

爲了證明對任意的 $n \geq 4$ 這個性質都成立, 我們只需證明, 對於 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的任意一個分割, 都可以通過若干次調換對角線變爲從 A_1 點所引對角線的分割, 而在調換對角

線時, 這些三角形的內切圓半徑之和並不會改變。爲了讓讀者理解這個調換的過程, 先看一個具體的例子:

圖 (六) 是八邊形的一個分割, 將它調換成從 A_1 點所引對角線的分割。

第一步, 將四邊形 $A_1A_2A_6A_7$ 的對角線 A_2A_7 調換成對角線 A_1A_6 變爲圖 (七);

第二步, 將四邊形 $A_1A_2A_3A_6$ 的對角線 A_2A_6 調換成對角線 A_1A_3 變爲圖 (八);

第三步, 將四邊形 $A_1A_3A_4A_6$ 的對角線 A_3A_6 調換成對角線 A_1A_4 變爲圖 (九);

第四步, 將四邊形 $A_1A_4A_5A_6$ 的對角線 A_4A_6 調換成對角線 A_1A_5 變爲圖 (十);

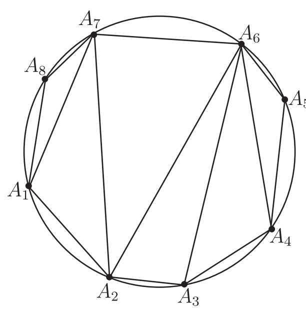


圖 (六)

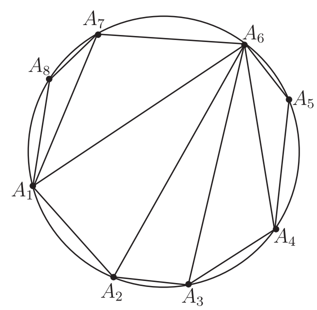


圖 (七)

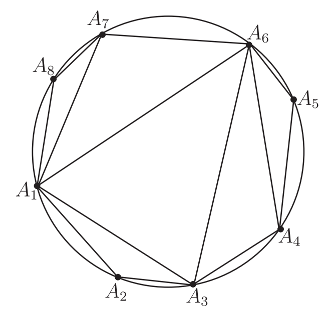


圖 (八)

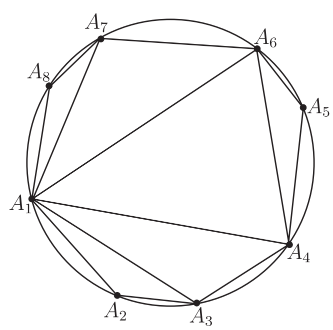


圖 (九)

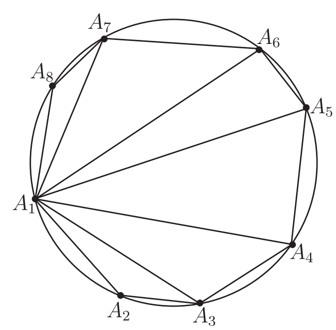


圖 (十)

由於調換四邊形的對角線不會改變調換前後兩個三角形的內切圓半徑之和, 從而也不會改變調換前後八邊形的各三角形內切圓半徑之和。

對於 n 邊形的任意一個分割, 如果以 A_1 點爲頂點的某個三角形中, A_1 點的對邊是一條對角線 A_iA_j, 而以 A_iA_j 爲邊的另一個三角形中, A_iA_j 所對的頂點爲 A_k , 則可將四邊形 $A_1A_iA_kA_j$ 的對角線 A_iA_j 調換成對角線 A_1A_k, 這樣調換下去, 直到以 A_1 爲頂點的所有三角形中, A_1 點所對的邊都不是對角線爲止。而此時所有三角形均以 A_1 點爲頂點, 所有對角線都過 A_1 點, 從而性質成立。

—本文作者現任教江蘇省運河高等師範學校—