數學傳播 34卷4期, pp. 77-82

幾道美國大學生數學競賽題的一般形式

蘇化明 · 黃有度 · 潘　杰

摘要: 給出幾道美國大學生數學競賽題的一般性結論並說明其應用。

關鍵詞: Putnam 數學競賽, 數列極限, Stolz 定理, 收斂速度。

歷屆美國大學生數學競賽 (The William Lowell Putnam Mathematical Competition) 有這樣幾道試題:

一、第 7 屆 (1947 年) A$-$1 題[1]。

設數列 $\{a_n\}$ 滿足條件

$$(2-a_n)a_{n+1}=1,\quad n\geq 1,$$

試證: 當 $n\to\infty$ 時, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在且等於 1。

二、第 27 屆 (1966 年) A$-$3 題[1]。

設 $0<x_1<1$ 而 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, $n=1,2,\ldots$, 求證: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$。

三、第 67 屆 (2006 年) B$-$6 題[2]。

設 k 為大於 1 的整數, 若 $a_0>0$ 且定義:

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}, n=0,1,2,\ldots,\quad 求\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k}。$$

本文得到了一個一般性命題, 由此命題可給出這幾道試題的統一解答, 然後通過其他實例再進一步說明此命題的應用。

命題: 設函數 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上連續, 且 $0\leq f(x)<x$, $x\in(0,+\infty)$。對任意的 $a_1\geq 0$, 定義數列: $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\ldots$。若存在正數 $m>0$, 使

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[xf(x)]^m}{x^m-[f(x)]^m}=l\quad (l\ 為常數)$$

成立, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^m=l$。

證: 因 $0 \le f(x) < x$, 所以 $0 \le a_{n+1} < a_n$, 故數列 $\{a_n\}$ 單調遞減且有下界, 從而數列 $\{a_n\}$收斂。令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda$, 則 $\lambda \ge 0$。由函數 $f(x)$ 連續性知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$, 即 $\lambda = f(\lambda)$。

又因爲 $f(\lambda) < \lambda$, 所以 $\lambda = 0$, 從而數列單調遞減趨於零。

利用數學分析中著名的施篤茨 (Stolz) 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty} na_n^m = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{a_n^m}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\dfrac{1}{a_{n+1}^m} - \dfrac{1}{a_n^m}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^m \cdot a_{n+1}^m}{a_n^m - a_{n+1}^m},$$

由於 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^m = \lim\limits_{n\to\infty} [f(a_n)]^m$, 故

$$\lim_{n\to\infty} na_n^m = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^m \cdot a_{n+1}^m}{a_n^m - a_{n+1}^m} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[xf(x)]^m}{x^m - [f(x)]^m} = l\ 。$$

注: 本命題與文 [3] 結論類似, 但這裏所需條件較弱, 證明方法與 [3] 也不同。

試題一的解答

由題設知 $a_n \ne 0, 2$, $n = 2, 3, \ldots$, 所以不妨設 $a_n \ne 0, 2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ 。

令 $b_n = 1 - a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, 則 $b_n \ne \pm 1$, 且由已知關係, 有 $(1 + b_n)(1 + b_{n+1}) = 1$, 或 $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{1 + b_n}$。

若有某個 $b_k = 0$, 則 $b_{k+1} = 0$, 由此知當 $n \ge k$ 時, $b_n = 0$, 從而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, 結論成立。

以下設 $b_n \ne 0$, $n = 1, 2, \ldots$ 。

若對一切自然數 n 有 $-1 < b_n < 0$, 則由 $b_{n+1} - b_n = \dfrac{b_n}{1 + b_n} - b_n = -\dfrac{b_n^2}{1 + b_n}$ 及 $1 + b_n > 0$, $-b_n^2 < 0$ 知 $b_{n+1} - b_n < 0$, 從而數列 $\{b_n\}$ 單調遞減且有下界 -1, 從而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在。設 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 則由 $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{1 + b_n}$ 知 $b = 0$, 而 $b \le \cdots \le b_{n+1} < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < 0$, 由此得出矛盾。因此存在自然數 k, 使得 $b_k > 0$ 或 $b_k < -1$。

若 $b_k < -1$, 則由 $b_k + 1 < 0$ 知 $b_{k+1} = \dfrac{b_k}{1 + b_k} > 0$, 故對於數列 $\{b_n\}$, 必有自然數 k, 使 $b_k > 0$, 再由 $b_{k+1} = \dfrac{b_k}{1 + b_k} > 0$, 故當 $n \ge k$ 時, $b_n > 0$。

由以上分析, 不妨可設 $b_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$。

在已證命題中取 $m=1,\ f(x)=\dfrac{x}{1+x}=x(1+x)^{-1}$, 因爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2(1+x)^{-1}}{x-x(1+x)^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-x+o(x))}{1-(1-x+o(x))}=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n=1$, 從而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 由此知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$。

注: 我們不僅證明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, 而且證明了, 當 $a_n\neq 1$ 時, $1-a_n\sim\dfrac{1}{n}\ (n\to\infty)$, 即數列 $\{a_n\}$ 收斂於 1 的速度與數列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 收斂於零的速度相同。

試題二的解答

事實上我們可考慮更一般的結果[4]。

設 $0<x_1<\dfrac{1}{q}$, 其中 $0<q\le 1$, 並且 $x_{n+1}=x_n(1-qx_n),\ n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\dfrac{1}{q}$。

在已證命題中取 $m=1,\ f(x)=x-qx^2$, 因爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-qx^3}{qx^2}=\frac{1}{q},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\dfrac{1}{q}$。

特別取 $q=1$, 則有 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$, 此即試題二的答案。

試題三的解答

令 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$, 則 $x_n^k=\dfrac{1}{a_n},\ a_n=\dfrac{1}{x_n^k},\ a_{n+1}=\dfrac{1}{x_{n+1}^k},\ n=0,1,2,\ldots$ 故由題設 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$ 知

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{(1+x_n^{k+1})^{\frac{1}{k}}},\qquad n=0,1,2,\ldots\ 。$$

在已證的命題中取 $m=k+1,\ f(x)=x(1+x^{k+1})^{-\frac{1}{k}}$, 因爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[xf(x)]^{k+1}}{x^{k+1}-[f(x)]^{k+1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{k+1}\left(x-\frac{1}{k}x^{k+2}+o(x^{k+2})\right)^{k+1}}{x^{k+1}-\left(x-\frac{1}{k}x^{k+2}+o(x^{k+2})\right)^{k+1}}=\frac{k}{k+1},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^{k+1}=\dfrac{k}{k+1}$,

於是 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k}x_n^{-k(k+1)}=\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big)^k$,

從而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^{k+1}}{n^k}=\Big(1+\dfrac{1}{k}\Big)^k$。

注: (i) 從解題過程可知, 試題中 k 爲大於 1 的整數這一條件可減弱爲 $k>0$。

(ii) 特別在 (1) 中取 $k=1$, 可得[4]:

設 $a_1>0$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$, $n=1,2,\ldots$, 則有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{2n}}=1$。

本文命題應用舉例

例 1: 設 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$, $n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2$。

證: 在已證命題中取 $m=1$, $f(x)=\ln(1+x)$, 因爲

$$\lim_{x\to0^+}=\frac{xf(x)}{x-f(x)}=\lim_{n\to0^+}\frac{x\Big(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)}{x-\Big(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)}=2,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=2$, 從而 $x_n\sim\dfrac{2}{n}$ $(n\to\infty)$。

例 2: 設 $x_1>0$, $x_{n+1}=\arctan x_n$, $n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n}{3}}x_n=1$。

證: 在已證命題中取 $m=2$, $f(x)=\arctan x$, 因爲

$$\lim_{x\to0^+}\frac{[xf(x)]^2}{x^2-[f(x)]^2}=\lim_{n\to0^+}\frac{x^2\Big(x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\Big)^2}{x^2-\Big(x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\Big)^2}=\frac{3}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2=\dfrac{3}{2}$, 從而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n}{3}}x_n=1$, 亦即 $x_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{2n}}$ $(n\to\infty)$。

例 3: 設 $x_1>0$, $x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n}$, $n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n}=\dfrac{1}{2}$。

證: 令 $\sqrt{x_n}=\dfrac{1}{y_n}$, 則由題設 $x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n}$ 知 $y_{n+1}^2=\dfrac{y_n^2}{1+y_n}$。由於 $y_n>0$, 故 $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{\sqrt{1+y_n}}$, $n=1,2,\ldots$ 。

在已證的命題中取 $m=1,\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=x(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, 因爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\Big(1-\dfrac{1}{2}x+o(x)\Big)}{x-x\Big(1-\dfrac{1}{2}x+o(x)\Big)}=2,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} ny_n=2$, 此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{x_n}}=2$, 從而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n}=\dfrac{1}{2}$。

注: (i) 所證極限說明了數列 $\{x_n\}$ 發散到 $+\infty$ 的速度與數列 $\left\{\dfrac{n^2}{4}\right\}$ 發散到 $+\infty$ $(n\to\infty$ 時) 的速度是相同的。

(ii) 本例更一般的情形: 設 $k>1$, 若 $x_1>0,\ x_{n+1}=x_n+x_n^{\frac{1}{k}},\ n=1,2,\ldots$, 則有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^{k-1}}{n^k}=\Big(1-\dfrac{1}{k}\Big)^k$。

例 4: 設正數列 $\{a_n\}$ 滿足: $a_{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1,\ n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$。

證: 設 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2,\ n=1,2,\ldots$, 由題設知 $a_{n+1}^2\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^2=1$, 故有 $(x_{n+1}-x_n)x_n^2=1$, 由此得 $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n^2},\ n=1,2,\ldots$ 。

再令 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, 則由 $a_{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$ 及 $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ 知 $x_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}$, 從而 $y_n=a_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$, 且有

$$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n}+y_n^2=\frac{1+y_n^3}{y_n},$$

從而 $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{1+y_n^3},\ n=1,2,\ldots$ 。

在已證命題中取 $m=3,\ f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}=x(1+x^3)^{-1}$, 因爲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[xf(x)]^3}{x^3-[f(x)]^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^6(1-x^3+o(x^3))^3}{x^3-x^3(1-x^3+o(x^3))^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3(1-x^3+o(x^3))^3}{1-(1-x^3+o(x^3))^3}=\frac{1}{3},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} ny_n^3=\dfrac{1}{3}$, 即有 $\lim\limits_{n\to\infty}(3na_{n+1}^3)=1$, 由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$。

以下問題均可利用本文命題去解, 解題過程留給有興趣的讀者去完成。

問題 1[3]: 設 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2},\ x_{n+1}=\sin x_n,\ n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$。

問題 2[3]: 設 $0<x_1<1,\ x_{n+1}=1-e^{-x_n},\ n=1,2,\ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=2$。

問題 3: 設 $a_1 > 0$, $m > 1$ 爲正整數, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt[m]{1+a_n^m}}$, $n = 1, 2, \ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{n}a_n = 1$。

問題 4: 設 $0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = \dfrac{2(1-\cos x_n)}{x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, 證明: $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = 6$。

參考文獻

1. 劉裔宏, 許康, 吳茂貴, 魏力仁譯, 普特南數學競賽, 長沙: 湖南科學技術出版社, 1983。
2. The Sixty-seventh William Lowell Putnam Mathematical Competition, *The Amer. Math. Monthly* **114**, No.8, p.716-724, 2007.
3. Jolene Harris and Bogdam Suceavă, Iterational rate of convergence, *The Amer. Math. Monthly* **115**, No.2, 173, 2008.
4. 常庚哲, 史濟懷, 數學分析教程 (第一冊), 南京: 江蘇教育出版社, 1998。

—本文作者任教安徽省合肥工業大學數學系—