數學傳播 34卷4期, pp. 50-76

複分析五講 第三講

Weierstrass 級數理論

龔 昇 · 張德健

3.1. Laurent 級數

Weierstrass 是用級數來研究與刻劃複變函數的性質, 在第一講與第二講中我們已提到全純函數的冪級數展開, 以及 Weierstrass M - 判別法等, 這些結果與微積分中的級數理論大致上是一樣的。在這一講中我們要強調的是 Weierstrass 理論與微積分不相同的地方。在複變函數的級數理論中, 與微積分級數理論最大不同之處是: 除了 Taylor 級數外, 還有 Laurent 級數。在介紹 Laurent 級數之前, 先介紹一個有關函數項級數的 Weierstrass 定理, 這是一個深刻的定理, 而這個定理在微積分中是沒有的。

定理 3.1. (Weierstrass **定理**)
若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全純, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 上任一緊緻集合上一致收斂到 $f(z)$, 則 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 Ω 上任一緊緻集合上收斂到 $f^{(k)}(z)$, $k=1,2,\ldots$ 。

在我們證明定理 3.1之前, 我們先敍述兩個有關函數項級數的結果。

(1) 若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在集合 A 上連續, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 A 上一致收斂到 $f(z)$, 則 $f(z)$ 在 A 上連續。

(2) 若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 在可求長曲線 γ 上連續, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收斂到 $f(z)$, 則

$$\int_\gamma f(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz.$$

這兩個結果與微積分中有關函數項級數的理論是一樣的, 而定理 3.1爲更爲深入的結果。這個定理告訴我們, 如全純函數項級數在區域 Ω 上的任一緊緻集合上一致收斂, 則這個級數會

收斂到一個全純函數, 而且逐項求導後的級數也會在 Ω 內任一緊緻集合上一致收斂到全純函數的導數。

定理 3.1**之證明**: 由上面所講的結論 (1) 知道, $f(z)$ 在 Ω 上是連續函數。若 K 爲 Ω 內任一圓周, 其內部包含於 Ω, γ 爲 K 內任一可求長的封閉曲線, 由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收斂, 故由結論 (2) 得到

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\gamma f_n(z)dz = 0,$$

這是因爲 $f_n(z)$ 在 K 內全純。由 $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ 以及 Morera 定理得到 $f(z)$ 在 K 內全純, 所以 $f(z)$ 在 Ω 上全純。

若 $z_0 \in \Omega$, $\overline{D}(z_0; r) \subset \Omega$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\partial D(z_0; r)$ 上一致收斂到 $f(z)$, 若 $\zeta \in D(z_0; r/2)$, 則

$$\left|\frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| \leq \left(\frac{2}{r}\right)^{k+1}.$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}$ 在 $\partial D(z_0; r)$ 上一致收斂到 $\dfrac{f(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}$。於是任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \geq N$ 時,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z)}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{k+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{k!},$$

當 $z \in \partial D(z_0; r)$ 及 $\zeta \in D(z_0; \frac{r}{2})$ 時成立。

因此, 當 $\zeta \in D(z_0; \frac{r}{2})$ 時, 由 Cauchy 積分公式,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(\zeta) - f^{(k)}(\zeta)\right| &= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0;r)} \frac{f_j(z)dz}{(z-\zeta)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0;r)} \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^{k}}\right| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\partial D(z_0;r)} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}\right| |dz| < \varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(\zeta)$ 在 $D(z_0; \frac{r}{2})$ 上一致收斂到 $f^{(k)}(\zeta)$。

取 $\overline{V}$ 爲 Ω 中任一有界的閉區域, 在 $\overline{V}$ 上的每一點, 都存在一個鄰域使得 $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(\zeta)$ 一致收斂到 $f^{(k)}(\zeta)$, 這些鄰域構成 $\overline{V}$ 的一個開覆蓋, 由 Heine-Brel 定理, 我們可以選取 $\overline{V}$ 的一個有限子覆蓋, 因此 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j^{(k)}(\zeta)$ 在 $\overline{V}$ 上一致收斂到 $f^{(k)}(\zeta)$, 定理 3.1因而證畢。

由最大模原理可以得到: 若 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 爲一有界區域, 若 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 Ω 內的全純函數序列, 而且在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 且級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\partial\Omega$ 上一致收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收斂, 因此, 定理 3.1中的條件「$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 內任一緊緻集合上一致收斂到 $f(z)$」可以改爲「$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 內任一封閉曲線上一致收斂到 $f(z)$」, 則定理 3.1依然成立。

現在我們來討論 Laurent 級數。

若 $a, c_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$, 則稱

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3.1}$$

爲在點 a 的 Laurent 級數, 即 Laurent 級數由兩部分組成, 一部分是非負冪的冪級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$; 一部分是負冪的冪級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$, 若這兩部分在 $z=z_0$ 處收斂, 則稱 Laurent 級數在這點收斂。若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收斂半徑爲 R, 且 $R>0$, 則級數在 $|z-a|<R$ 內絕對收斂, 且在其內的任一有界閉集合上一致收斂, 故級數的和 (記作 $\varphi(z)$) 在 $|z-a|<R$ 上全純。記 $\zeta=\dfrac{1}{z-a}$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$。設其收斂半徑爲 ρ, 且 $\rho>0$, 則級數在 $|\zeta|<\rho$ 內絕對收斂, 且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 在 $r=\dfrac{1}{\rho}<|z-a|<\infty$ 內絕對收斂且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 故級數的和 (記作 $\psi(z)$) 在 $r<|z-a|<\infty$ 上全純。如果 $r>R$, 則級數 (3.1) 處處發散; 如果 $r=R$, 則級數 (3.1) 除了 $|z-a|=R$ 的點外, 處處發散; 而在 $|z-a|=R$ 上有不同的情形, 如 $\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|=1$ 上處處收斂; $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z^n$ 在 $|z|=1$ 上處處發散; $\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 在 $|z|=1$上除了 $z=1$ 外處處收斂。如果 $r<R$, 則級數 (3.1) 在圓環 $r<|z-a|<R$ 內絕對收斂, 且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 在圓環外發散。我們稱這圓環爲級數 (3.1) 的收斂圓環。由定理 3.1知, 級數 (3.1) 在圓環內收斂到一個全純函數, $\varphi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 內全純, $\psi(z)$ 在 $r<|z-a|<\infty$ 內全純, 而 $f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$ 在 $r<|z-a|<R$ 內全純。$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 稱爲級數 (3.1) 的全純部分 (holomorphic part), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 稱爲級數 (3.1) 的主要部份 (principal part) 或奇異部份 (singular part), 即函數 $f(z)$ 的特性主要由這部分所決定。綜合上面的討論, 若 Laurent 級數 (3.1) 的收斂圓環爲 $r<|z-a|<R$, 則級數 (3.1) 在此圓環內絕對收斂且在其內任一有界閉集合上一致收斂, 因而函數 $f(z)$ 在此圓環上全純。

反過來, 我們有下面定理

定理 3.2: 若函數 $f(z)$ 在圓環 $V: r < |z-a| < R$, $0 \le r < R < \infty$, 上全純, 則 $f(z)$ 在 V 上有展開式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.2}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad r < \rho < R. \tag{3.3}$$

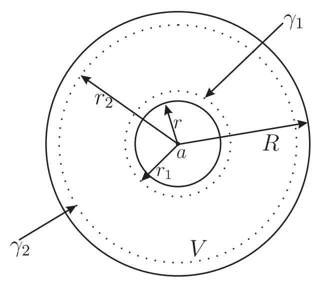
展開式 (3.2) 是唯一的, 稱爲 $f(z)$ 在圓環 V 上的 Laurent 級數或 Laurent 展開式。

證明: (3.3) 中的積分與 ρ 無關, 若 $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, 則

$$\int_{|z-a|=\rho_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \int_{|z-a|=\rho_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

若 $z \in V$, 在 V 內取 $\gamma_1 = \partial D(a; r_1)$, $\gamma_2 = \partial D(a; r_2)$, $r_1 < r_2$, 且 z 在圓環 $r_1 < |z-a| < r_2$ 之內, 由 Cauchy 積分公式, 我們有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \tag{3.4}$$



當 $\zeta \in \gamma_1$ 時,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z-a)(1 - \frac{\zeta - a}{z - a})} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n},$$

這是因爲 $\left|\dfrac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1$, 上式右手邊的級數是在 γ_1 上一致收斂的; 當 $\zeta = \gamma_2$ 時,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta - a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

這是因爲 $\left|\dfrac{z - a}{\zeta - a}\right| < 1$, 上式右手邊的級數是在 γ_2 上一致收斂的, 將這兩個式子代入 (3.4), 我們便得到 (3.2) 與 (3.3)。

最後我們來證明唯一性, 設 $f(z)$ 在 U 上還有另一個 Laurent 級數展開式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n(z-a)^n, \quad r<|z-a|<R. \tag{3.5}$$

(3.5) 式右手邊的級數在 $|z-a|=\rho$, $r<\rho<R$ 上一致收斂到 $f(z)$, 以 $(z-a)^{-(m+1)}$ 乘 (3.5) 式的兩邊, 然後在 $|z-a|=\rho$ 上積分, 由一致收斂性有

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \int_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-m-1}dz=2\pi c'_m,$$

這是因爲

$$\int_{|z-a|=\rho} (z-a)^k dz=\begin{cases} 2\pi i, & 若 \quad k=-1; \\ 0, & 若 \quad k\neq -1. \end{cases}$$

於是 $c'_m=c_m$, $m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$, 這便證明了級數的唯一性, 定理 3.2因而證畢。

3.2. 孤立奇異點 (Isolated singularity)

若函數 $f(z)$ 在點 a 的鄰域 $D(a;R)\setminus\{a\}$ 上全純, 則稱 a 點爲 $f(z)$ 的一個孤立奇異點, 若 a 爲 $f(z)$ 的一個孤立奇異點, 由定理 3.2得知, $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 上可展開成 Laurent 級數

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

而

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad 0<\rho<R, \quad n\in\mathbb{Z}$$

如前面所講, $f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$, 這裡

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3.6}$$

在 $|z-a|<R$ 上全純, 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的全純部分, 而

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \tag{3.7}$$

在 $0<|z-a|<\infty$ 上全純, 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的主要部份。

下面我們討論 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 的情形, 有三種可能。

(1) $\lim_{z\to a} f(z)$ 存在且有限, 由第二講中的 Riemann 定理, $f(z)$ 可以解析延拓到 $D(a;R)$, 因此, (3.7) 中的 c_{-n} 全爲零。反之, 如果 (3.7) 中的 c_{-n} 全爲零, 則 $f(z)=\varphi(z)$, 而 $\lim_{z\to a} f(z)=\varphi(a)$, 故 $\lim_{z\to a} f(z)$ 存在且有限, 若且唯若 c_{-n} 全爲零, 這時稱 a 爲可去奇異點 (Removable singularity)。

(2) $\lim_{z\to a} f(z)$ 存在且無限, 則充要條件爲: (3.7) 中 c_{-n} 只有有限個不爲零, 即

$$\psi(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad c_{-m}\neq 0.$$

而

$$\begin{aligned} f(z)&=\varphi(z)+\psi(z)\\ &=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{(z-a)}+c_0+c_1(z-a)+\cdots\\ &=\frac{g(z)}{(z-a)^m}, \end{aligned}$$

其中

$$g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+\cdots, \quad c_{-m}=g(a)\neq 0,$$

這時稱 a 爲一個 m 級極點 (pole of order m)。$m=1$ 時, 稱爲簡單極點 (simple pole)。

證明: 充分性是顯而易見的, 只需證明必要性。

因爲 $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$, 故存在 $\delta>0$, 使得在 $0<|z-a|<\delta$ 內, $f(z)\neq 0$, 於是在 $0<|z-a|<\delta$ 內, $F(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ 全純, 且不爲零及 $\lim_{z\to a} F(z)=0$。由 (1) 知, a 爲 $F(z)$ 的可去奇異點, 且爲 $F(z)$ 的一個零點, 設 a 爲 $F(z)$ 的一個 m 階零點, 則 $F(z)=(z-a)^m h(z)$, 這裡 $h(z)$ 在 $|z-a|<\delta$ 上全純, 且可取 a的一個鄰域, 使 $h(z)$ 在此鄰域內不爲零, 不妨假設此鄰域爲 $|z-a|<\delta$, 因此 $\dfrac{1}{h(z)}$ 在 $|z-a|<\delta$ 上全純且不爲零, 其 Taylor 展開式爲

$$\frac{1}{h(z)}=c_{-m}+c_{-m+1}(z-a)+c_{-m+2}(z-a)^2+\cdots, \quad c_{-m}\neq 0,\ |z-a|<\delta,$$

於是

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1}{F(z)}&=\frac{1}{(z-a)^m h(z)}\\ &=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots. \end{aligned}$$

由 Laurent 展開式的唯一性, 得證 (2)。

從 (1), (2) 立即得到

(3) $\lim_{z\to a} f(z)$ 不存在, 其充要條件為 (3.7) 的係數 c_{-n} 有無窮多個不為零, 這時稱 a 為 $f(z)$ 的本性奇異點 (Essential singularity)。

例如: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z=0$ 爲其本性奇異點, 因爲

$$\lim_{z=x\to 0^+} e^{\frac{1}{z}}=+\infty \quad 而 \quad \lim_{z=x\to 0^-} e^{\frac{1}{z}}=0,$$

故 $\lim_{z\to z} f(z)$ 不存在。

對於本性奇異點, 我們有如下重要的定理。

定理 3.3. (Weierstrass **奇異點定理**): 若 a 爲 $f(z)$ 的本性奇異點, 任給 $\delta>0$, 則對任意有限複數 α 及正數 $\varepsilon>0$, 在 $0<|z-a|<\delta$ 內有一點 z, 使得 $|f(z)-\alpha|<\varepsilon$ 成立, 即 $f(z)$ 在本性奇異點的鄰域內的取值在 $\mathbb{C}$ 上是稠密的。

證明: 假設定理的結論不眞, 則存在有限複數 α 及 $\varepsilon>0$ 使得在 $0<|z-a|<\delta$ 內, $|f(z)-\alpha|>\varepsilon$, 於是

$$F(z)=\frac{f(z)-\alpha}{z-a}$$

在 $0<|z-a|<\delta$ 上全純, 而當 $z\to a$ 時, $F(z)\to\infty$, 故 a 爲 $F(z)$ 的極點, 由 (2) 得知,

$$F(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots$$

所以,

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{z-a}+(\alpha+c_{-1})+c_0(z-a)+\cdots,$$

因而 a 或是 $f(z)$ 的 $m-1$ 階極點 (當 $m>1$) 或是 $f(z)$ 的可去奇異點 (當 $m=1$), 這與定理的條件相矛盾, 定理因而證畢。

Weierstrass 奇異點定理十分深入地刻劃了 $f(z)$ 在一個本性奇異點附近的值分佈性質, 但 1879年, Picard 證明了更爲廣泛, 更爲深刻的 Picard 定理: 全純函數在一個本性奇異點的鄰域內無窮多次地取到每一個有限複值, 至多除去一個例外。關於 Picard 定理我們將在第五講再作討論。

以上討論的孤立奇異點是有限複數的情形, 現在我們討論孤立奇異點是無窮遠點的情形。

若函數 $f(z)$ 在圓環 V: $R<|z|<\infty$ $(R>0)$ 上全純, $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的一個孤立奇異點, 這個時候, 考慮變換 $w=\dfrac{1}{z}$, 將 $z=\infty$ 的鄰域變爲 $w=0$ 的鄰域, 於是

$$g(w)=f(z)=f\left(\frac{1}{w}\right)$$

在 $0 < |w| < \dfrac{1}{R}$ 上全純, 且可展開成 Laurent 級數

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} w^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^{-n} = \varphi(w) + \psi(w),$$

$\varphi(w)$ 爲 $g(w)$ 的 Laurent 展開式的全純部分, 而 $\psi(w)$ 爲 $g(w)$ 的 Laurent 展開式的主要部分, 於是

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = \varphi_0(z) + \psi_0(z),$$

其中 $\varphi_0(z)$ 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的全純部分, $\psi_0(z)$ 爲 $f(z)$ 的 Laurent 展開式的主要部分, 所以

(1) 當 $z = \infty$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點時,

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots;$$

(2) 當 $z = \infty$ 爲 $f(z)$ 的 m 階極點時,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m, \quad c_m \neq 0;$$

(3) 當 $z = \infty$ 爲 $f(z)$ 的本質性奇異點時,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

3.3. 整函數與亞純函數 (Entrice function and meromorphic function)

若函數 $f(z)$ 除了無窮遠點外, 在 $\mathbb{C}$ 上是全純的, 則稱 $f(z)$ 爲一整函數 (entire function)。於是, $f(z)$ 的 Taylor 展開式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.8}$$

在複平面上成立, $z = \infty$ 是孤立奇異點, 由 Laurent 展開式的唯一性, (3.8) 也是 $f(z)$ 在無窮遠點的鄰域的 Laurent 展開式。於是有三種可能:

(1) $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點, 則由 Liouville 定理得知, $f(z)$ 爲常數函數;

(2) $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的一個 m 階極點, 則 $c_n=0$, 當 $n>m$, 即 $f(z)$ 爲一個 m 階多項式

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_mz^m,\quad c_m\neq 0.$$

(3) $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的一個本性奇異點, 則

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

其中 c_n $(n\geq 1)$ 有無窮多個不爲零, 這時稱 $f(z)$ 爲超越整函數 (transcendental entire function), 例如: e^z, $\cos z$, $\sin z$ 等等。

若函數 $f(z)$ 除了無窮遠點外, 在複平面上只有極點 (極點的數目可爲有限, 亦可爲無限), 則稱 $f(z)$ 爲一亞純函數 (meromorphic function)。整函數是亞純函數; 有理函數 $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ 也是亞純函數, 其中 $P_n(z)$, $Q_m(z)$ 爲兩個互質多項式, 即

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\quad a_n\neq 0,$$
$$Q_m(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m,\quad b_m\neq 0.$$

且 $(P_n(z),Q_m(z))=1$, $Q_m(z)$ 的零點是 $f(z)$ 的極點, 由於

$$f(z)=\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}=\frac{1}{z^{m-n}}\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{z}+\cdots+\frac{b_0}{z^m}},$$

所以

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & 若\ \ m=n;\\ \infty, & 若\ \ n>m;\\ 0, & 若\ \ n<m.\end{cases}$$

即 $z=\infty$ 或是 $f(z)$ 的可去奇異點, 或是 $(n-m)$ 階極點。

反過來, 我們有如下定理。

定理 3.4. 若 $z=\infty$ 爲亞純函數 $f(z)$ 的可去奇異點或極點, 則 $f(z)$ 必爲有理函數。

證明: 由於 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇異點或極點, 故存在 $R>0$, 使得 $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 上全純, 假設 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰域內的 Laurent 展開式的主要部分爲 $\mathcal{P}(z)$, 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的可去奇異點時, $\mathcal{P}(z)\equiv 0$; 當 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的極點時, $\mathcal{P}(z)$ 是一多項式。

在圓 $|z| \le R$ 上, $f(z)$ 只能有有限個極點, 否則, 若 $f(z)$ 有無限多個極點, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, 這無窮多個極點必有一個極限點 z_0, 且 z_0 在 $|z| \le R$ 上, 這便告訴我們 z_0 是 $f(z)$ 的一個非孤立奇異點, 但這是不可能的, 因爲 $f(z)$ 是一個亞純函數, 假設 $z_1, z_2, \ldots, z_k$ 是 $f(z)$ 的極點, 在 z_j, $(j = 1, \ldots, k)$ 的鄰域內, $f(z)$ 的 Laurent 展開式的主要部分爲

$$\psi_j(z) = \frac{c_{-1}^{(j)}}{z - z_j} + \cdots + \frac{c_{-m_j}^{(j)}}{(z - z_j)^{m_j}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

全純部分爲 $\varphi_j(z)$, 於是函數

$$F(z) = f(z) - \mathcal{P}(z) - \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z)$$

除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$ 外在 $\mathbb{C}$ 上全純, 而這些點是 $F(z)$ 的可去奇異點。事實上, 當 $z \to z_j$ 時,

$$\lim_{z \to z_j} (f(z) - \psi_j(z)) = \varphi_j(z_j),$$

而 $\sum_{m \ne j} \psi_m(z) - \mathcal{P}(z)$ 在 z_j 是全純的, 故 $\lim_{z \to z_j} F(z)$ 存在且有限。在 $z = \infty$, $f(z) - \mathcal{P}(z)$ 是 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的鄰域的 Laruent 展開式的全純部分, 故 $\lim_{z \to \infty} (f(z) - \mathcal{P}(z))$ 存在且有限, 而

$$\lim_{z \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z) = 0.$$

於是 $\lim_{z \to \infty} F(z)$ 有限, 故 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全純。由 Liouville 定理 $F(z)$ 爲一常數 c, 因此

$$f(z) = c + \mathcal{P}(z) + \sum_{j=1}^{k} \psi_j(z).$$

即爲有理函數, 定理因而證畢。

除去有理函數外的亞純函數, 稱爲超越亞純函數。超越亞純函數或以 $z = \infty$ 爲本性奇異點, 或以 $z = \infty$ 爲它的極點的極限點。在第二講中我們已經討論過單位圓盤的全純自同構群, 現在我們可以進一步定義出複平面 $\mathbb{C}$ 及擴充複平面 $\mathbb{C}^*$, 即 $\mathbb{C}$ 加上無窮遠點 ∞, 也即 Riemann 面 $\mathbb{S}^2$ 的自同構群。

3.3.1. 複平面 $\mathbb{C}$ 的全純自同構群 $Aut(\mathbb{C})$

若 $\alpha(z) \in Aut(\mathbb{C})$, 則 $\alpha(z)$ 一定將 ∞ 點映爲 ∞ 點。由於映射是自同構, 故爲一對一的, 因此, $\alpha(z)$ 在 ∞ 點有一單極點, 根據前面討論的結果, $\alpha(z)$ 一定是一個一次多項式, 即

$\alpha(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$。反過來, 若 $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, 則淺顯易見 $az + b \in Aut(\mathbb{C})$, 故 $Aut(\mathbb{C})$ 是由所有的線性變換

$$\{az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

所組成, 即 $Aut(\mathbb{C})$ 是由平移 (translation) $a(z) = z + b$ 及伸縮 (dilation) $d(z) = az$ 的複合所組成。

3.3.2. 擴充複平面的亞純自同構群 $Aut(\mathbb{C}^*)$

若 $\alpha(z) \in Aut(\mathbb{C}^*)$, 且 $\alpha(\infty) = \infty$, 由於自同構是一對一的, 故 $\alpha(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上是屬於 $Aut(\mathbb{C})$ 的, 因此, $\alpha(z) = cz + d$, 這裡 $c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$。我們也很容易證明

$$\alpha(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in Aut(\mathbb{C}^*),$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, 且 $ad - bc \neq 0$。

若 $\alpha(z) \in Aut(\mathbb{C}^*)$ 且 $\alpha(\infty) \neq \infty$, 則

$$\beta(z) = \frac{1}{\alpha(z) - \alpha(\infty)} \in Aut(\mathbb{C}^*),$$

且 $\beta(\infty) = \infty$, 所以 $\beta(z) = cz + d$, 這裡 $c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, 於是

$$cz + d = \frac{1}{\alpha(z) - \alpha(\infty)},$$

由此可解出 $\alpha(z)$, 得到 $\alpha(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, 這裡 $a = \alpha(\infty)c$, $b = d\alpha(\infty) + 1$, 故 $Aut(\mathbb{C}^*)$ 是由所有分式線性變換

$$\left\{\frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1\right\}$$

所組成, 即 $Aut(\mathbb{C}^*)$ 是由平移 $\alpha(z) = z+b$, 伸縮 $\alpha(z) = az$ 以及反演 (Inversion) $\alpha(z) = \dfrac{1}{z}$ 的複合所組成。如果令 $\dfrac{az + b}{cz + d}$ 與二階方陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 一一對應, 則 $Aut(\mathbb{C}^*)$ 與所有的二階方陣

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1\right\}$$

所組成的群相同構, 這個群稱爲二階特殊線性群, 記作 $SL(2, \mathbb{C})$, 這裡 $detA$ 爲矩陣 A 的行列式。

在複分析中有下面一個非常重要的定理。

定理 3.5. **單值化定理** (Uniformization theorem)

任意單連通的 Riemann 曲面一定一對一地全純等價於下面三個區域之一: 單位圓盤, 複平面 $\mathbb{C}$, 擴充複平面 $\mathbb{C}^*$, 即 Riemann 球面 S^2。

Riemann 曲面的意義將在下一講中詳細介紹。由上述的定理 3.5 及第二講中所提到的單位圓盤上的全純自同構群, 我們可以得出定理 3.5 中所敍述三種區域的自同構群, 即定義出了所有單連通 Riemann 曲面上一對一全純等價的區域的自同構群。在下一講中我們還將要證明在複變函數論中非常重要的 Riemann 映射定理 (Riemann mapping theorem): 任意邊界點至少有兩點的單連通區域一定一對一地全純等價於單位圓盤。所以在一對一全純等價的意義之下, 單連通區域只有三個。至於這個區域上的幾何性質, 我們將在第五講中作進一步地討論。

3.4. Weierstrass 因式分解定理、Mittag-Leffler 定理與插值定理 (Interpolation theorem)

在這一節中, 我們將討論三個構造性的定理。對於整函數 f 而言, 除了無窮遠點之外, 函數是全純的, 所以我們可以用第二講中的 Taylor 展開式來表達之: $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jz^j$。由上一節的討論中, 我們也知道若 $z=\infty$ 是整函數 f 的極點, 則 $f(z)$ 是一個多項式, 因此, 我們可以將整函數看成是多項式的自然推廣, 即 $f(z)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}a_jz^j$ 是一個無窮多次階的多項式。

對於多項式, 一個明確的表示便是用它的零點來表達, 若 $a_1,\ldots,a_n$ 為 n 次多項式 $P_n(z)$ 的零點, 則

$$P_n(z)=A(z-a_1)\cdots(z-a_n),$$

這裡 A 是一個複常數, 這個表示式稱為 $P_n(z)$ 的因式分解 (factorzation)。對於超越整函數, 是否也可以因式分解: 即如果 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 為整函數的無窮多個零點, 是否可將此函數表示為

$$A(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)\cdots=A\prod_{j=1}^{\infty}(z-a_j)?$$

由於上式中的乘積是無窮乘積, 這就牽涉到收斂的問題。而這個問題的答案正是 Weierstrass 因式分解定理 (Weierstrass factorization theorem)。為了證明這個定理, 我們先簡單地討論一下無窮乘積。

對複數序列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ 作乘積

$$\mathcal{P}_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k),$$

若 $1+a_k \neq 0$, $k=1,2,\ldots$, 則

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_n = \mathcal{P} \neq 0,$$

且 $\mathcal{P}$ 爲有限, 則稱無窮乘積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{3.9}$$

是收斂的, 且收斂到 $\mathcal{P}$, 記作 $\mathcal{P}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, 否則稱 (3.9) 是發散的。

由於當 $x\ge 0$ 時, $1+x\le e^x$, 故

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| \le (1+|a_1|)(1+|a_2|)\cdots(1+|a_n|) \le e^{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}$$

因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 與 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 同時收斂或同時發散。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 則稱 (3.9) 絕對收斂。於是有: 絕對收斂的無窮乘積一定收斂, 且絕對收斂的無窮乘積可以改變因子的順序而不影響無窮乘積的值。有關這個敍述, 讀者可以自行證之。

現在我們來討論整函數的因式分解。

如整函數 $f(z)$ 沒有零點, 則顯然 $f(z)$ 可以表爲 $f(z)=e^{\phi(z)}$, 這裡 $\phi(z)$ 是一整函數。事實上, 只要首先注意到函數 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ 在整個平面上解析, 它是一個整函數 $\phi(z)$ 的導數。從這一個事實經過計算就可以推知 $f(z)e^{-\phi(z)}$ 的導數爲零, 所以 $f(z)$ 是 $e^{\phi(z)}$ 的常數倍, 這一常數可以併在 $\phi(z)$ 之內。若 $f(z)$ 是一個只有有限個零點的整函數, 若 $0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_j\neq 0$, $j=1,\ldots,n$) 是 $f(z)$ 的零點, 其階分別爲 $m, m_1, \ldots, m_n$。令

$$p(z)=z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n},$$

則 $h(z)=\dfrac{f(z)}{p(z)}$ 是以 $z=0$, a_j, $j=1,\ldots,n$, 爲可去奇異點, 故 $h(z)$ 爲沒有零點的整函數, 於是 $h(z)=e^{\psi(z)}$, $\psi(z)$ 爲整函數。因此, $f(z)$ 可表爲

$$f(z)=z^m\left(1-\frac{z}{a_1}\right)^{m_1}\cdots\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}e^{\psi(z)},$$

即 $f(z)$ 可表爲一個多項式及一個沒有零點的整函數的乘積, 而此多項式是以 $f(z)$ 的零點爲零點, 且其階數相同。

若整函數 $f(z)$ 有無限多個零點且不恆等於零, 由於 $f(z)$ 的零點爲可數個, 所以我們可將 $f(z)$ 的零點按模的大小排列成一序列 ($z=0$ 除外, 將另作處理) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$$0<|a_n|\le|a_{n+1}|, \qquad \lim_{n\to\infty}|a_n|=\infty. \tag{3.10}$$

由於 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, 故對任意的正數 R, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^n$ 是收斂的。考慮無窮乘積

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right\}. \tag{3.11}$$

令

$$\begin{aligned}
P_n(z)&=\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1},\\
Q_n(z)&=\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)+P_n(z),\\
E_n(z)&=\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{P_n(z)}=e^{Q_n(z)},
\end{aligned}$$

則 (3.11) 即為 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}E_n(z)$。

對任意固定正數 R, 取正整數 N, 使得 $n\ge N$ 時, $|a_n|\ge 2R$, 考慮無窮乘積 $\prod\limits_{n=N}^{\infty}E_n(z)$, 當 $|z|\le R$, $n\ge N$ 時, $\left|\dfrac{z}{a_n}\right|\le\dfrac{1}{2}$, 故

$$\begin{aligned}
|Q_n(z)|&\le\frac{1}{n}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^n+\frac{1}{n+1}\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^{n+1}+\cdots\\
&\le\left(\frac{|z|}{|a_n|}\right)^n\frac{1}{1-\frac{|z|}{|a_n|}}\le 2\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n.
\end{aligned}$$

由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{R}{|a_n|}\right)^n$ 收斂, 故 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}Q_n(z)$ 在 $|z|\le R$ 上絕對且一致收斂, 故

$$\prod_{n=N}^{\infty}E_n(z)=\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}Q_n(z)\right),$$

在 $|z|\le R$ 上一致收斂。由 Weierstrass 奇異點定理 (定理 3.1) 知, 這個無窮乘積表示一個在 $|z|<R$ 上的全純函數, 且函數不為零, 而

$$\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{N-1}E_n(z)$$

的零點為 a_n $(n=1,\ldots,N-1)$, 而這些點都在 $|z|\le 2R$ 之中。因此, 在 $|z|<R$ 中的那些 a_n $(n=1,2,\ldots)$ 是 $\left(1-\dfrac{z}{a_1}\right)\prod\limits_{n=2}^{N-1}E_n(z)$ 的零點, 且在 $|z|<R$ 中只有這些零點。

當 $|z|<R$, n 充分大時, 可使 $|Q_n(z)|<1$, 不難證明 $|e^z-1|\leq\frac{7}{4}|z|$, 當 $|z|<1$ 時成立。所以

$$|E_n(z)-1|=|e^{Q_n(z)}-1|\leq\frac{7}{4}|Q_n(z)|\leq\frac{7}{2}\left(\frac{R}{|a_n|}\right)^n,$$

所以, $\prod\limits_{n=N}^{\infty}E_n(z)$ 當 N 充分大時, 在 $|z|\leq R$ 上絕對收斂。

於是對於已給的複數序列 (3.10), 存在一個以 a_n $(n=1,2,\ldots)$ 爲其零點的整函數

$$h(z)=\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{\infty}E_n(z),$$

這個無窮乘積對 z 絕對收斂, 且

$$P_N(z)=\left(1-\frac{z}{a_1}\right)\prod_{n=2}^{N}E_n(z)$$

在任意圓盤 $|z|<R$ 上一致收斂到 $h(z)$, 於是我們得到下面定理。

定理 3.6. Weierstrass **因式分解定理**

若 $f(z)$ 爲一整函數, $z=0$ 爲 $f(z)$ 的 m 階零點 (m 也可以爲零), 其餘零點爲 $a_1,a_2,\ldots$ 滿足 $0<|a_n|\leq|a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, 則 $f(z)$ 可表示爲

$$f(z)=z^me^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\cdot\exp\left\{\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}\right\}.\quad(3.12)$$

其中 $g(z)$ 爲一整函數。

證明: 如前面討論, 可以作出整函數 $h(z)$, 以 a_n $(n=1,2,\ldots)$ 爲其零點, 於是 $z^mh(z)$ 與 $f(z)$ 有相同零點及相同階數。所以 0, a_n $(n=1,2,\ldots)$ 爲

$$H(z)=\frac{f(z)}{z^mh(z)}$$

的可去奇異點, 且沒有零點, 故 $H(z)=e^{g(z)}$, 這裡 $g(z)$ 爲整函數, 定理因而證畢。

由於 $g(z)$ 不唯一, 故 $f(z)$ 的表示式也不唯一。

對於亞純函數, 我們可以期待怎樣的表示式呢? 首先從 Weierstrass 因式分解定理的證明中可得到: 任意亞純函數可以表爲兩個整函數的商。

證明: 若 $f(z)$ 爲一亞純函數, 於是存在整函數 $f_1(z)$, 它以 $f(z)$ 的極點爲其零點。令 $f_2(z)=f(z)f_1(z)$, 在 $f(z)$ 的極點 a 處定義

$$f_2(a)=\lim_{z\to a}f_2(z),$$

則 $f_2(z)$ 也是一個整函數。故 $f(z) = \dfrac{f_2(z)}{f_1(z)}$。

由於任意亞純函數可以表示成兩個整函數之商, 而由 Weierstrass 因式分解定理, 每個整函數可以表示成 (3.12) 的形式, 故每個亞純函數可表示爲兩個形如 (3.12) 式子的商。這時, 這個亞純函數可以用它的零點及極點明確地表示出來。

此外, 在上一節中討論過, 如果一個亞純函數 $f(z)$ 只有有限多個極點 $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 且 $z = \infty$ 是它的極點或可去奇異點, 則 $f(z)$ 爲有理函數, 並且有

$$f(z) = c + P(z) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z),$$

這裡 c 爲一常數, $P(z)$ 爲多項式, $\psi_j(z)$ 爲極點 $z = a_j$ 的主要部分。

對於一個超越亞純函數 $f(z)$, $z = \infty$ 或是它的本性奇異點, 或是它的極點的極限點。若 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇異點, 則 $f(z)$ 的極點爲有限多個, 故

$$U(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z)$$

是一個超越整函數, 因此

$$f(z) = U(z) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z).$$

若 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的極點的極限點, 這些極點是 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 按模的大小排列起來, $|a_n| \le |a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$。在 a_j 點, 其主要部分爲 $\psi_j(z)$ 也是已給的。是否存在亞純函數 $f(z)$, 以 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 爲其極點, 而以 $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ 爲相應的主要部分, 於是我們有

定理 3.7. (Mittag - Leffler **定理**)

存在這樣的亞純函數, 以 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 爲其極點, 且滿足 $|a_n| \le |a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$。而以 $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots$ 爲相應的主要部分。

證明: 在 a_j 點取小的鄰域 U_j, $j = 1, 2, \ldots$, 使得 $U_j \cap U_k = \emptyset$, 當 $j \neq k$, 取 C^∞ 函數 ψ_j, 使得 $\psi_j = 1$ 在 a_j 的一個小鄰域 $V_j \subset U_j$, $\psi_j = 0$ 在 U_j, $j = 1, 2, \ldots$ 的餘集合上, 於是在 $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 上定義 $u = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j \psi_j$, 則 u 在 $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ 上爲 C^∞ 且在 $V_j \setminus \{a_j\}$ 上的值爲 ψ_j, 即在 a_j 附近有我們所要求的主要部分。但 u 不是亞純的。令

$$\Psi = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}, & \text{當} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \\ 0, & \text{當} \quad z = a_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

由於在 $V_j \setminus \{a_j\}$ 上, $u=\psi_j$, 故當 $z \neq a_j$ 時, $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}}=0$, 即在 $V_j \setminus \{a_j\}$ 上, $\Psi=0$, 而由 Ψ 的定義, 當 $z=a_i$ 時, $\Psi=0$, 故 Ψ 爲連續函數。同理可證 Ψ 爲 C^∞ 的函數。於是由一維的 $\overline{\partial}$ - 問題的解 (定理 2.4), $\overline{\partial}$ - 問題

$$\frac{\partial V}{\partial \overline{z}}=\Psi$$

在 $\mathbb{C}$ 上有 C^∞ 的解 v, 這可表示爲第二講定理 2.4 中的 (1.4) 之形式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\wedge d\overline{\zeta},$$

於是 $f=u-v$ 即爲所求的亞純函數。顯然, 當 $z\in\mathbb{C}\setminus\{a_j\}_{j=1}^\infty$ 時, $\dfrac{\partial(u-v)}{\partial\overline{z}}=0$, 即 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 故當 $z\in\mathbb{C}\setminus\{a_j\}_{j=1}^\infty$ 時, f 是全純的。由於 $v\in C^\infty(\mathbb{C})$, 由 u 的定義, 當 z 取 a_j 附近的值時, f 有主要部分 $\psi_j(z)$。定理因而證畢。

用 $\overline{\partial}$ - 問題的解來證明 Mittag - Leffler 定理, 乾淨俐落。但如果用古典複分析的方法來證明, 可以將所得的亞純函數寫得更清楚。

定理 3.7′. (Mittag - Leffler **定理**) 假設 $f(z)$ 爲一亞純函數, a_n $(n=1,2,\ldots)$ 爲 $f(z)$ 的極點, 且滿足 $|a_n|\le|a_{n+1}|$, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\infty$, 則 $f(z)$ 可以寫成

$$f(z)=U(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\},$$

這裡 $\Psi_n(z)$ 爲 $f(z)$ 在極點 $z=a_n$ 處的主要部分, $P_n(z)$ $(n=1,2,\ldots)$ 爲多項式, $U(z)$ 爲整函數。

證明: 取正數 $\varepsilon_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty$。若 $a_1=0$, 則取 $P_1(z)=0$, 對 a_n $(\neq 0)$, $\Psi_n(z)$ 是 $(z-a_n)^{-1}$ 的多項式, 故在 $|z|<a_n$ 內全純, 因此可展成 Taylor 級數

$$\Psi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!}z^k,$$

當 $|z|<|a_n|$ 時成立。這個級數在 $|z|<\dfrac{1}{2}|a_n|$ 內一致收斂到 $\Psi_n(z)$, 故存在 λ_n, 使得

$$\left|\Psi_n(z)-\sum_{k=0}^{\lambda_n}\frac{\Psi_n^{(k)}(0)}{k!}z^k\right|<\varepsilon_n.$$

記 $P_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{\lambda_n}\dfrac{\Psi_n^{(k)}}{k!}z^k$。設 R 爲任意正數, 取正整數 $N=N(R)$, 使得 $n>N$ 時, $|a_n|>2R$; $n\le N$ 時, $|a_n|\le 2R$, 於是, 當 $n>N$, $|z|<R$ $\left(|z|<\dfrac{1}{2}|a_n|\right)$ 時,

$$\Big|\Psi_n(z)-P_n(z)\Big|<\varepsilon_n.$$

由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty$, 故 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上一致收斂。當 $n>N$ 時, $\Psi_n(z)$ 的極點 $z=a_n$ 不在 $|z|<R$ 內, 故由 Weierstrass 奇異點定理 $\Phi_n(z)=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}$ 在 $|z|<R$ 上全純, 於是

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{N}\{\Psi_n(z)-P_n(z)\}+\Phi_N(z)$$

在 $|z|<R$ 內, 以滿足 $|a_n|<R$ 的那些 a_n $(n=1,2,\ldots)$ 的點爲極點, 其主要部分是 $\Psi_n(z)$。由於 R 是任意的, 故 $\varphi(z)$ 即爲以 $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ 爲極點, 以 $\Psi_1(z),\Psi_2(z),\ldots,\Psi_n(z),\ldots$ 爲其相應主要部分的亞純函數。定義 $U(z)=f(z)-\varphi(z)$,

$$U(a_n)=\lim_{z\to a_n}\{f(z)-\varphi(z)\},$$

則 $U(z)$ 爲一整函數, 定理因而證畢。

若已給 m 個點 $z_1,\ldots,z_m$ 及 m 個複數值 $a_1,a_2,\ldots,a_m$, 一定可以找到一個多項式 $p(z)$, 使得

$$p(z_j)=a_j,\quad j=1,2,\ldots,m.$$

這只要從 m 個方程式 $p(z_j)=a_j$, $(j=1,2,\ldots,m)$ 中解出 $p(z)$ 的係數即可。同樣, 若已給 m 個點 $z_1,z_2,\ldots,z_m$ 及複數值 $a_{j,k}$ $(j=1,\ldots m,\ 0\le k\le n_{_j}-1)$, 這裡 $n_{_j}$ 爲 ≥ 1 的整數, 則可以找到多項式 $p(z)$, 使得

$$\frac{p^{(k)}(z_j)}{k!}=a_{j,k}$$

也就是可以找到多項式 $p(z)$, 使得 $p(z)$ 在 z_j 的 Taylor 展開式的開始 $n_{_j}$ 項是所給定的多項式。下面我們將證明一個十分一般的插值 (interpolation) 定理。

定理 3.8. (**插值定理**)

若 $z_1,z_2,\ldots$ 爲 $\mathbb{C}$ 中的一個離散點集合, $n_1,n_2,\ldots$, 爲一個正整數序列, $a_{j,k}$ $(j\ge 1,\ 0\le k\le n_{_j}-1)$ 爲一複數序列, 則存在一個整函數 $g(z)$ 使得

$$g^{(k)}(z_j)=k!a_{j,k}\qquad(j\ge 1,\ 0\le k\le n_{_j}-1)$$

成立。即如果預先給定一個點序列 $\{z_j\}$ 及每一點 z_j 上的 Taylor 展開式的開始 $n_{_j}$ 項, 則一定存在一個整函數, 在這些點上, 有這樣的 Taylor 展開式。

證明: 由 Weierstrass 因子分解定理, 可以找到整函數 $f(z)$, 使得 $f(z)$ 在 $z=z_j$ 處爲 $n_{_j}$ 重零點。由於 $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots$ 爲一離散序列, 故可以找到正數序列 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\ldots$ 使得以 z_j 爲中心, $2\varepsilon_j$ 爲半徑的圓盤 $D(z_j;2\varepsilon_j)$ 相互之間互不相交。作

$$P_j(z)=\sum_{0\le k\le n_j-1} a_{j,k}(z-z_j)^k,\quad j\ge 1.$$

對每個 j, 作 $\varphi_j\in C^\infty$, 使得 φ_j 的支集合在 $D(z_j;2\varepsilon_j)$ 之中, 且 $0\le\varphi_j\le 1$, 而在 $\overline{D}(z_j;\varepsilon_j)$ 上 $\varphi_j\equiv 1$, $j=1,2,\ldots$。

令 $\psi(z)\in C^\infty$, 作函數

$$g(z)=\sum_{j\ge 1}P_j(z)\varphi_j(z)-f(z)\psi(z). \tag{3.13}$$

由於 φ_j 的支集在 $\mathbb{C}$ 上互不相交, 故對每一點 $z\in\mathbb{C}$, $\sum\limits_{j=1}P_j(z)\varphi_j(z)$ 中最多只有一項不爲零, 所以這個式子是有意義的。我們要求出 ψ, 使得 $g(z)$ 是一個整函數, 即要求 $\dfrac{\partial g}{\partial\overline{z}}=0$。當 $z\in\mathbb{C}$ 時, 此即

$$\sum_{j\ge 1}P_j(z)\frac{\partial\varphi_j(z)}{\partial\overline{z}}=f(z)\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z).$$

令

$$h(z)=\sum_{j\ge 1}P_j(z)\frac{\partial\varphi_j(z)}{\partial\overline{z}},$$

則在 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\overline{D}(z_j;\varepsilon_j)$ 上, $h(z)\equiv 0$。在 $z=z_j$ 處, 取 $\dfrac{h(z)}{f(z)}=0$, 則 $\dfrac{h(z)}{f(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上是 C^∞ 的。h 有互不相交的緊緻支集合, 故由 $\overline{\partial}$ - 問題知 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}=\dfrac{h}{f}$ 有一個光滑的解 ψ。取這樣的 ψ, 則 (3.13) 定義了一個整函數, 在 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\overline{D}(z_j;\varepsilon_j)$ 上, $\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}=0$, 故 ψ 在 z_j 的附近是全純的。由於 $f(z)$ 在 $z=z_j$ 處有 $n_{_j}$ 重零點, 故由 (3.13) 所定義的 $g(z)$, 可以直接計算驗證: 當 $0\le k\le n_{_j}-1$ 時,

$$g^{(k)}(z_j)=P_j^{(k)}(z_j)=k!a_{j,k}$$

成立, 定理因而證畢。

3.5. 留數定理 (Residue Theorem)

若函數 $f(x)$ 在 $D(a;r)\setminus\{a\}$ 上全純 $(r>0)$, a 爲 $f(z)$ 的孤立奇異點, $f(z)$ 在 a 的留數 (residue) 定義爲

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz,$$

這裡 $0<\rho<r$。由於 $f(z)$ 在 $D(a;r)\setminus\{a\}$ 可展開成 Laurent 級數 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$, 所以 $\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}$。

若 $z=\infty$ 爲 $f(z)$ 的孤立奇異點, $f(z)$ 在 $R<|z|<\infty$ 內全純, 定義 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留數爲

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{-1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} f(z)dz,$$

這裡 $R<\rho<\infty$。由於 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的鄰域可展開成 Laurent 級數 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$, 故 $\operatorname{Res}(f,\infty)=-c_{-1}$。

若 a $(\neq\infty)$ 爲 $f(z)$ 的 m $(m\geq 1)$ 階極點, 於是 $f(z)$ 在 a 的鄰域內可寫成

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\,g(z),$$

而 $g(z)$ 在 $z=a$ 處全純, 且 $g(a)\neq 0$, 故

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)(z-a)^n.$$

因此,

$$\operatorname{Res}(f,a)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\,g^{(m-1)}(a).$$

而

$$g^{(m-1)}(a)=\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big\{(z-a)^mf(z)\Big\},$$

故

$$\operatorname{Res}(f,a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big\{(z-a)^mf(z)\Big\}.$$

特別當 $m=1$ 時,

$$\operatorname{Res}(f,a)=g(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

我們有如下的定理。

定理 3.9. (**留數定理**)

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 之外是全純的, 且 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 之外是連續的。假設 $\partial\Omega$ 爲可求長的簡單封閉曲線, 則

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k).$$

定理 3.9′. (**留數定理**)

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上除去 $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$ 外是全純的, $z_1, z_2, \ldots, z_n, \infty$ 爲 $f(z)$ 的孤立奇異點, 則 $f(z)$ 在所有這些孤立奇異點的留數之和爲零, 即

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Res}\,(f, z_k) + \text{Res}\,(f, \infty) = 0.$$

這兩個定理的證明是明顯的, 我們只要用 Cauchy 積分定理便立即可得到結論。所以證明在此從略。留數定理本身是十分簡單的, 重要的是可以用它來計算一些定積分的值。而這些定積分的被積函數的反導數函數往往是求不出來的。用留數定理求定積分有種種技巧, 如函數 $f(z)$ 的選取, 積分路線的選取等等。在這裡我們只舉幾個簡單的例子來說明。

例 1. 計算積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$。

解: 取 $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$, 則 $f(z)$ 在上半平面有唯一孤立奇異點 $z = i$, 它爲 $f(z)$ 的 $n+1$ 階極點。取 Ω 爲上半圓盤 $|z| < R$, $I_m(z) > 0$。於是

$$\begin{aligned}\text{Res}\,(f, i) &= \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right\}\bigg|_{z=i} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right\}\bigg|_{z=i}\\ &= \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(2i)^{n+1}} = \frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\text{Res}\,(f, i) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{dz}{(z^2+1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}, \quad (3.14)\end{aligned}$$

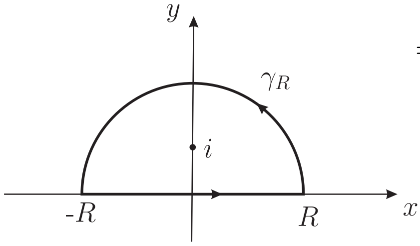


圖 A

這裡 γ_R 爲上半圓周 (見圖 A): $z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$。但

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{(1+R^2e^{2i\theta})^{n+1}},$$

當 $R \to \infty$ 時, 顯然這個積分 $\to 0$。因此, 在 (3.14) 中令 $R \to \infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = 2\pi i Res(f,i) = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}。$$

例 2. 計算 Dirichlet 積分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$。

解: 顯然 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, 因爲 $\frac{\sin x}{x}$ 爲偶函數。考慮 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$。取 Ω 爲上半平面的半圓環 (見圖 B), 其邊界爲:

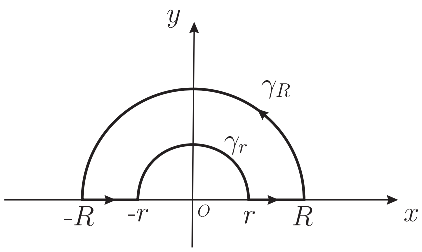


圖 B

$$-R < z < -r; \qquad r < z < R;$$
$$\gamma_r : z = re^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi;$$
$$\gamma_R : z = Re^{i\theta}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

由於 $f(z)$ 在這個半圓環中全純, 由 Cauchy 積分定理,

$$\int_r^R f(x)dx + \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

而

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}}{Re^i\theta} iRe^{i\theta} d\theta = i\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta + iR\cos\theta} d\theta,$$

故

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \le \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta.$$

但當 $0 \le \theta \le \pi/2$ 時, $\frac{2}{\pi}\theta \le \sin\theta$, 故

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \le \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}),$$

當 $R \to \infty$ 時, 這是 $\to 0$ 的。因此, 當 $R \to 0$ 時, $\int_{\gamma_R} f(z)dz \to 0$。另一方面,

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = i\int_{\pi}^{0} e^{-r\sin\theta + ir\cos\theta} d\theta = i\int_{\pi}^{0} (1 + O(r))d\theta = -\pi i + O(r),$$

故當 $r \to 0$ 時, $\int_{\gamma_r} f(z)dz \to -\pi i$。而

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx,$$

於是在 $\displaystyle\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_R} f(z)dz+\int_{\gamma_r} f(z)dz=0$ 中令 $r\to 0$, $R\to\infty$ 得

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}。$$

例 3. 計算 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2dx$ 及 $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2dx$。

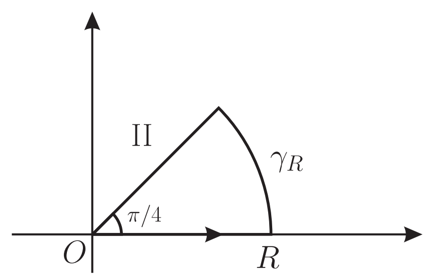


圖 C

解: 取 $f(z)=e^{iz^2}$ 及 Ω 爲由 $\mathrm{I}: 0\le z\le R$; $\mathrm{II}: re^{i\frac{\pi}{4}}$, $0\le r\le R$ 及 $\gamma_R=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$ 所圍成的扇形區域 (見圖 C)。於是由 Cauchy 積分定理

$$\int_{\mathrm{I}} f(z)dz+\int_{\mathrm{II}} f(z)dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz=0.$$

而

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}iRe^{i\theta}d\theta,$$

故

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right|\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta\le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4}{\pi}\theta}d\theta=\frac{\pi}{4R}\Big(1-e^{-R^2}\Big).$$

當 $R\to\infty$ 時, 上式 $\to 0$, 故

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f(z)dz+\int_{\mathrm{II}} f(z)dz\right)=0,$$

即

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx-\int_0^\infty e^{ix^2e^{i\frac{\pi}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}dx=0.$$

這就有

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx=e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

但由微積分我們已知 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 因此

$$\int_0^\infty e^{ix^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

於是

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

3.6. 解析延拓

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, 如果存在一個包含 Ω 的區域 U, 並且有函數 $F(z)$ 在 U 上全純, 且在 Ω 上 $F(z) = f(z)$, 則稱 $f(z)$ 可解析延拓 (或全純延拓) 到 $U \setminus \Omega$ 。由全純函數的唯一性定理, 如果在 U 內 F 存在, 則是唯一的。同樣, 如果 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 分別在區域 Ω_1, Ω_2 上全純且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_3 \neq \emptyset$, 而在 Ω_3 上 $f_1 = f_2$, 則在 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (圖 D) 上定義

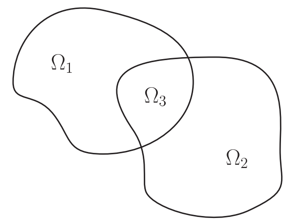


圖 D

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \Omega_1; \\ f_2(z), & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

於是 f 在 Ω 上全純, 稱 f_1, f_2 互爲解析延拓。

最自然, 最重要的解析延拓的方法是用冪級數來進行。由 Abel 定理, 一個冪級數

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{3.15}$$

存在一個收斂半徑 R, 在 $|z| < R$ 內級數絕對收斂且在其內任一緊緻子集合上一致收斂, 所以這個冪級數在 $|z| < R$ 是一個全純函數, 記作 $f(z)$。如果 $z_0 \in D(0; R)$, 則 $f(z)$ 可以在 $z = z_0$ 處展開成 Taylor 級數

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

若其收斂半徑爲 ρ, 則 $\rho \geq R - |z_0|$。

如果 $\rho > R - |z_0|$, 則 $D(z_0; \rho)$ 有一部分在 $D(0; R)$ 之外, 於是 $f(z)$ 可以解析延拓到 $D(z_0; \rho) \setminus D(0; R)$ 上去。若 $\rho = R - |z_0|$, 則 $D(z_0; \rho)$ 與 $D(0; R)$ 相切, 設其切點爲 ξ_0 。這表明 $f(z)$ 不能在 ξ_0 這個點解析延拓出去, 我們稱 ξ_0 爲 $f(z)$ 的一個奇異

點。顯然, 如果 R 是 (3.15) 的收斂半徑, 則 (3.15) 一定在 $|z|=R$ 上至少有 $f(z)$ 的一個奇異點。否則的話, 則 $f(z)$ 可以在 $|z|=R$ 上任一點解析延拓出去, 即對於 $|z|=R$ 上任一點 ξ, 都有 $D(\xi,r_\xi)$ 及 $g_\xi(z)$, 而 $g_\xi(z)$ 在 $D(\xi;r_\xi)$ 上全純, 且 $g_\xi(z)=f(z)$ 當 $z\in D(0;R)\cap D(\xi;r_\xi)$。由於 $|z|=R$ 是緊緻集合, 故由 Heine-Borel 定理, 在 $\{D(\xi;r_\xi)\}$ 上可以選取有限個 $D(\xi_1;r_{\xi_1}),D(\xi_2;r_{\xi_2}),\ldots,D(\xi_m;r_{\xi_m})$ 覆蓋 $|z|=R$。令

$$G=\bigcup_{k=1}^{m}D(\xi_k;r_{\xi_k}),$$

ρ 爲 $|z|=R$ 到 ∂G 的距離, 顯然 $\rho>0$。於是

$$\{R-\rho<|z|<R+\rho\}\subset G.$$

在 G 內定義 $\Phi(z)=g_{\xi_k}(z)$ 當 $z\in D(\xi_k;r_{\xi_k})$, $(k=1,\ldots,m)$, 則 $\Phi(z)$ 爲 G上的單値全純函數。如 $D(\xi_k;r_{\xi_k})\cap D(\xi_j;r_{\xi_j})\neq\emptyset$, $k\neq j$, 則

$$\Big(D(\xi_k;r_{\xi_k})\cap D(\xi_j;r_{\xi_j})\Big)\cap D(0;R)\neq\emptyset,$$

在這部分, $g_{\xi_k}(z)=g_{\xi_j}(z)=f(z)$ 。由全純函數的唯一性定理, 在 $D(\xi_k;r_{\xi_k})\cap D(\xi_j;r_{\xi_j})$ 上, $g_{\xi_k}(z)=g_{\xi_j}(z)$ 。在 $G\cap D(0;R)$ 上, $\Phi(z)=f(z)$, 故 $f(z)$ 可解析延拓到 $G\cup D$ 。而這包有 $D(0;R+\rho)$, 這與 R 爲 (3.15) 的收斂半徑的定義相互矛盾。

因此, 在收斂圓周上, (3.15) 一定有奇異點, 例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $z=1$ 處爲它的奇異點。下面這個著名的例子說明有這樣的冪級數, 它的收斂圓周上每一點都是奇異點。

例.

$$f(z)=z^{1!}+z^{2!}+\cdots+z^{n!}+\cdots. \tag{3.16}$$

解. 由於

$$a_n=\begin{cases}1, & \text{若 } n=k!;\\ 0, & \text{若 } n\neq k!.\end{cases}$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1.$$

因此, (3.16) 的收斂半徑爲 $R=1$, 即 $f(z)$ 在 $D(0;1)$ 上全純。若 $z_0\in D(0;1)$, $|z_0|=\dfrac{1}{2}$, $f(z)$ 在 z_0 處有 Taylor 展開式

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

延長線段 $\overline{Oz_0}$ 與 $|z|=1$ 的交點爲 ξ_0, 如能證明 $g(z)$ 的收斂半徑爲 $\dfrac{1}{2}$, 則表明 $f(z)$ 不能在 ξ_0 處解析延拓。如果不然, 即若 $g(z)$ 的收斂半徑 $\rho > \dfrac{1}{2}$, 則 $D(\xi_0;\rho)\cap D(0;1)\neq\emptyset$, 於是在 $D(\xi_0;\rho)$ 中有 $|z|=1$ 的一段圓弧 σ, $\xi_0\in\sigma$ 。由於形如 $\exp\left\{\dfrac{2\pi ip}{q}\right\}$ (p, q 爲整數, $\dfrac{p}{q}$ 爲既約分數) 的點在 $|z|=1$ 上處處稠密, 故在 σ 上一定有點 $\xi_1=\exp\left\{\dfrac{2\pi ip}{q}\right\}$, 而 $\lim\limits_{r\to 1} g(r\xi_1)=g(\xi_1)$ $(0<r<1)$ 。但當 $z\in D(0;1)$ 時, $g(z)=f(z)$, 故 $\lim\limits_{r\to 1} f(r\xi_1)=g(\xi_1)$。由於

$$f(r\xi_1)=\sum_{n=1}^{q-1} r^{n!}\xi_1^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

顯然

$$\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}>\sum_{n=q}^{N} r^{n!}>(N-q)r^{N!}.$$

於是當 $r\to 1$ 時, $\sum\limits_{n=q}^{\infty} r^{n!}$ 可以大於任何正整數, 所以

$$\lim_{r\to 1}|f(r\xi_1)|=\infty,$$

這與 $\lim\limits_{r\to 1} f(r\xi_1)=f(\xi_1)$ 相互矛盾, 故 ξ_0 爲 $f(z)$ 的奇異點。

一個函數稱爲在一點 z_0 附近是解析 (或全純) 的, 如果這個函數在這點附近可以展開成收斂冪級數, 這是函數局部解析 (或局部全純) 的定義。這個定義與第一講中的定義是相符合的。有了解析延拓的概念, 可以定義整體解析 (或整體全純) 函數。

從一個局部全純函數 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 出發, 如其收斂半徑爲 R, 若 $a_1\in D(a;R)$, 則得另一個冪級數

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n,$$

其收斂半徑爲 $R_1\geq R-|a-a_1|>0$, 稱全純函數 $f(z)$, $f_1(z)$ 爲解析元素, 而 $f_1(z)$ 爲 $f(z)$ 的解析延拓。如有 m 個解析元素

$$f_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)}(z-a_k)^n, \qquad k=1,2,\ldots,m,$$

f_k 是 f_{k-1} 的解析延拓, 則 f_m 也是 f 的解析延拓。將所有的由 $f(z)$ 出發的解析延拓得到的解析元素的全體組成一個集合, 這個集合稱爲整體解析 (整體全純) 函數 (global analytic function) 。

完全解析 (完全全純) 函數 (complete analytic function) 是一個整體解析函數包含有其中任何一個解析元素的所有解析延拓。一般來說, 這是一個多值函數。所有解析延拓所對應的收斂圓之和稱爲完全解析函數的存在域。這當然不能再延拓出去, 因此存在域的邊界點都是完全解析函數的奇異點。

—本文作者龔昇任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—

更正啓事

本刊第 34 卷第 3 期 (135號) 第 20 頁第 3 行到第 4 行 "學校幾何課程的重整 — 爲何教和如何教演繹幾何?" 一文中提及項武義及蘇式冬兩位教授的描述「當時 (1970年代) 項武義返回中國大陸參與數學實驗教材的編訂, 而幾何組的組長就是蘇式冬。」作者張家麟、黃毅英、林智中先生們轉其友人意見, 提出以下兩點更正。特此刊登, 並謝謝作者們的來信告知。

(一) 1978年項武義教授返回中國大陸時, 提出了一個《關於中學數學實驗教材的設想》, 並沒有參與具體的教材編訂工作。

(二) 蘇式冬教授當時只是教育部負責組織教材的編寫和實驗研究工作的人, 不是幾何組長。詳情可見教材前言。