數學傳播 34卷4期, pp. 46-49

“雙胞胎三角形”的幾個不等式

鄰守文

設 G 爲 $\triangle ABC$ 內一點, BG、CG 分別交 AC、AB 於點 E、F。我們稱 $\triangle BGF$ 和 $\triangle CGE$ 爲一組“雙胞胎三角形”。

在研究“雙胞胎組”三角形的面積時, 我們發現幾個有趣的不等式。以下用 $S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面積。

定理 1. 設 G 爲 $\triangle ABC$ 內一點, BG、CG 分別交 AC、AB 於點 E、F, 則

$$0<\frac{S_{\triangle BGF}+S_{\triangle CGE}}{S_{\triangle ABC}}\le 6-4\sqrt{2}.$$

證明: 下界爲0是顯然的, 因爲 E、F 可任意靠近 C、B。下面證明上界:

設 $\dfrac{AF}{AB}=x$, $\dfrac{AE}{AC}=y$ 則 $0<x,y<1$, 在 $\triangle ABE$ 中由 Menelaus 定理有 $\dfrac{BG}{GE}\cdot\dfrac{EC}{CA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$, 所以 $\dfrac{BG}{GE}=\dfrac{CA}{EC}\cdot\dfrac{FB}{AF}=\dfrac{1}{1-y}\cdot\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1-x}{x(1-y)}$, $\dfrac{BG}{BE}=\dfrac{1-x}{1-xy}$.

$$\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle ABE}}\cdot\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BF\cdot BG\cdot AE}{BA\cdot BE\cdot AC}=\frac{(1-x)^2y}{1-xy},$$

同理 $\dfrac{S_{\triangle CGE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{x(1-y)^2}{1-xy}$.

令 $x+y=u$

於是 $$\frac{S_{\triangle BFG}+S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{y(1-x)^2+x(1-y)^2}{1-xy}$$

$$=4+\frac{x+y+xy(x+y)-4}{1-xy}\le 4+\frac{x+y+\left(\frac{x+y}{4}\right)^2(x+y)-4}{1-\frac{(x+y)^2}{4}}$$

$$=4+\frac{u+\frac{u^3}{4}-4}{1-\frac{u^2}{4}}=4-\left(u+2-\frac{8}{u+2}-2\right)\le 4-\left(2\sqrt{(u+2)\cdot\frac{8}{u+2}}\right)$$

$$=6-4\sqrt{2}.$$

故 $0 < \dfrac{S_{\triangle BGF} + S_{\triangle CGE}}{S_{\triangle ABC}} \le 6 - 4\sqrt{2}$。

其中當且僅當 $x = y = \sqrt{2} - 1$ 時等號成立。

當 G 在中線 AD 上時, 我們有以下結果:

推論 1: 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的中線 AD 上異於 A、D 的一點, BG、CG 的延長線分別交 AC、AB 於 E、F, 則 $0 < \dfrac{S_{\triangle BGF} + S_{\triangle CGE}}{S_{\triangle ABC}} \le 6 - 4\sqrt{2}$。

推論1是《數學通報》2007年6月號問題1676的結論。

推論 2: 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的中線 AD 上異於 A、D 的一點, BG、CG 的延長線分別交 AC、AB 於 E、F, 則 $0 < \dfrac{S_{\triangle BGF} \cdot S_{\triangle CGE}}{S^2_{\triangle ABC}} \le 17 - 12\sqrt{2}$。

證明: 下界顯然可得, 下面證明上界。

設 $\dfrac{AG}{AD} = x$, $(0 < x < 1)$, 則 $\dfrac{AG}{GD} = \dfrac{x}{1-x}$, 易得 $\dfrac{AF}{FB} = \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{x}{2(1-x)}$。

所以 $\dfrac{BF}{AB} = \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{2(1-x)}{2-x}$, 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle BGF} = S_{\triangle CGE} &= \frac{2(1-x)}{2-x} S_{\triangle ABG} = \frac{2(1-x)}{2-x} \cdot x S_{\triangle ABD} \\ &= \frac{2(1-x)}{2-x} \cdot x \cdot \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{x-x^2}{2-x} S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

所以 $\dfrac{S_{\triangle BGF} \cdot S_{\triangle CGE}}{S^2_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{x-x^2}{2-x}\right)^2$。

因為 $\dfrac{x-x^2}{2-x} = x + 1 - \dfrac{2}{2-x} = 3 - \left(2 - x + \dfrac{2}{2-x}\right) \le 3 - 2\sqrt{2}$。

於是 $\dfrac{S_{\triangle BGF} \cdot S_{\triangle CGE}}{S^2_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{x-x^2}{2-x}\right)^2 \le \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$。

定理 2: G 為 AD 上一點, BG、CG 分別交 AC、AB 於點 E、F, 且 $\dfrac{AG}{GD} = \lambda$ 則

(i) $\dfrac{S_{\triangle BFG} + S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ABC}} \ge \dfrac{2\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$;

(ii) $\dfrac{S_{\triangle BFG} \cdot S_{\triangle CEG}}{S^2_{\triangle ABC}} \le \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2}$.

證明: 在 $\triangle AGC$ 和 $\triangle BGC$ 中, 因爲 GC 是公共邊, 於是 $\dfrac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle BGC}}=\dfrac{AF}{FB}$, 同理 $\dfrac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle BGC}}=\dfrac{AE}{EC}$。故

$$\begin{aligned}\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}&=\frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle BGC}}+\frac{S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle BGC}}=\frac{S_{\triangle AGC}+S_{\triangle AGB}}{S_{\triangle BGC}}\\&=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BGC}}{S_{\triangle BGC}}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BGC}}-1=\frac{AD}{GD}-1=\frac{AG}{GD},\end{aligned}$$

即 $$\frac{AG}{GD}=\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}. \tag{1}$$

設 $\dfrac{AF}{FB}=x$, $\dfrac{BD}{DC}=y$ 由 Ceva 定理有 $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$, 則

$$\frac{EA}{CE}=\frac{AF}{FB}+\frac{BD}{DC}=xy,\ \text{並 (1) 式得 } x+xy=\lambda \tag{2}$$

所以 $x(1+y)=\lambda$, $x=\dfrac{\lambda}{1+y}$。又 $\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{y}{1+y}$,

$$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\lambda}{1+\lambda},\quad \frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle ABG}}=\frac{BF}{AB}=\frac{1}{1+x}.$$

所以 $\dfrac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\dfrac{y}{(1+y)(1+x)}$, 同理 $\dfrac{S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\dfrac{1}{(1+y)(1+xy)}$。故

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle BFG}+S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ABC}}&=\frac{\lambda}{1+\lambda}\Big[\frac{y}{(y+1)(1+x)}+\frac{1}{(y+1)(1+xy)}\Big]\\&=\frac{\lambda}{1+\lambda}\Big[\frac{y}{1+y+\lambda}+\frac{1}{1+y+\lambda y}\Big]\\&=\frac{\lambda}{1+\lambda}\Big[1-\frac{(\lambda^2+2\lambda)y}{(1+\lambda)(y^2+1)+(\lambda^2+2\lambda+2)y}\Big]\\&\ge\frac{\lambda}{1+\lambda}\Big[1-\frac{(\lambda^2+2\lambda)y}{2(1+\lambda)y+(\lambda^2+2\lambda+2)y}\Big]=\frac{2\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}.\end{aligned}$$

故 $\dfrac{S_{\triangle BFG}+S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle ABC}}\ge\dfrac{2\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}$。

當且僅當 $y=1$ 即 D 爲 BC 的中點時, 等號成立。

(ii). 由 (i) 的證明, 並 (2) 式知 $x=\dfrac{\lambda}{1+y}$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle BFG}+S_{\triangle CEG}}{S^2_{\triangle ABC}}&=\Big(\frac{\lambda}{1+\lambda}\Big)^2\cdot\frac{y}{(1+y)^2(1+x)(1+xy)}\\&=\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\cdot\frac{y}{(1+y)^2\Big(1+\frac{\lambda}{1+y}\Big)\Big(1+\frac{\lambda y}{1+y}\Big)}\\&\le\Big(\frac{\lambda}{1+\lambda}\Big)^2\frac{y}{(1+\lambda)\cdot 2y+(2+2\lambda+\lambda^2)y}=\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2}.\end{aligned}$$

故 $S_{\triangle BFG}S_{\triangle CEG}\le\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2}S^2_{\triangle ABC}$。

當且僅當 $y=1$, 即 D 爲 BC 中點時等號成立。

參考文獻

1. 鄒守文, 模擬訓練數學奥林匹克初中訓練題 (15)[J], 中等數學, 2008, 1。
2. 鄒守文, 數學奥林匹克問題初188, 中等數學 [J], 2006, 10。

—本文作者現任教安徽省南陵縣春谷中學—