數學傳播　34卷4期, pp. 24-30

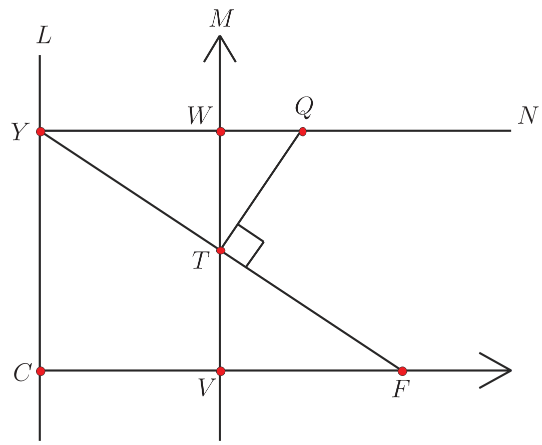
拋物線的斜角坐標方程式和拋物線弓形面積

張海潮

本文從拋物線的 (準線—焦點) 定義出發, 以相似形比例關係導出拋物線滿足的各類方程式 (第一節), 並據以得到拋物線比例性質 (第二節)。此一比例性質是阿基米德以槓桿法和窮盡法求拋物線弓形面積的基礎, 我們將在三、四兩節重現阿基米德的論述。

一. 拋物線滿足的方程式

先複習拋物線的標準式。如圖一所示, 拋物線的焦點 F, 準線 L 和過拋物線頂點 V 的切線 M, CVF 是拋物線的對稱軸, $VF = VC$。



圖一

在 L 上任取一點 Y , 連 YF 交 M 於 T, 過 Y 作直線 N 平行於 VF , 並交 M 於 W; 過 T 作 YF 的中垂線交 N 於 Q , 則 Q 在以 F 爲焦點, L 爲準線的拋物線上 (註一)。在直角三角形 YQT 中, 有 $YW.WQ = WT^2$, 又因 $WT = \frac{1}{2}CY$, 所以

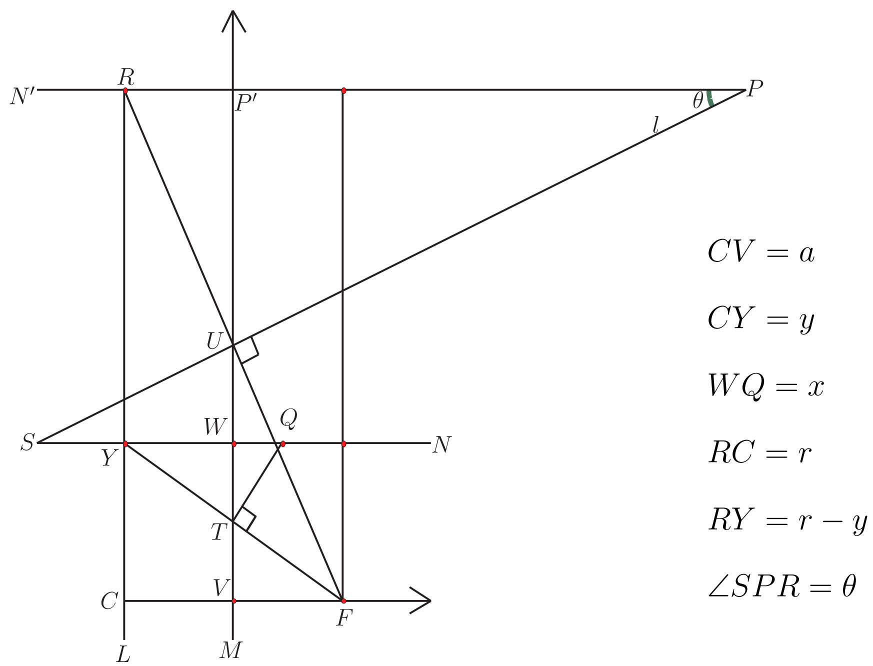
$$4YW.WQ = CY^2 \tag{1}$$

如果將 VF 看成 x 軸, VW 看成 y 軸, 則 (1) 式相當於

$$y^2 = 4ax \tag{2}$$

其中 $a = YW$ 是拋物線的焦距, $CY = y, WQ = x$。

接下來固定拋物線上一點 P 及過 P 點的切線 l(見註一)。如圖二所示, 切線 l 交 N 於 S, 交 M 於 U;N' 與 VF 平行並交 M 於 P', 交 L 於 R。



圖二

因為

$$\triangle SWU \sim \triangle PP'U, SW : P'P = WU : P'U \tag{3}$$

令 $RC = r$, 則 $RY = r - y$ 並由 (1)、(2) 知 $P'P = r^2/4a$。

在圖二中,

$$SW = SQ - WQ = SQ - x, \qquad WU = \frac{1}{2}RC - CY = \frac{r}{2} - y, \qquad P'U = \frac{1}{2}RC = \frac{r}{2}.$$

將相關的量代入 (3), 得到

$$SQ - x : r^2/4a = \frac{r}{2} - y : r/2 \qquad \text{或} \qquad SQ - x = \frac{r}{2a}(\frac{r}{2} - y)$$

再將 x 以 $y^2/4a$ 代入, 得

$$SQ=\frac{r^2}{4a}-\frac{ry}{2a}+\frac{y^2}{4a}=\frac{1}{4a}(r-y)^2=\frac{1}{4a}RY^2$$

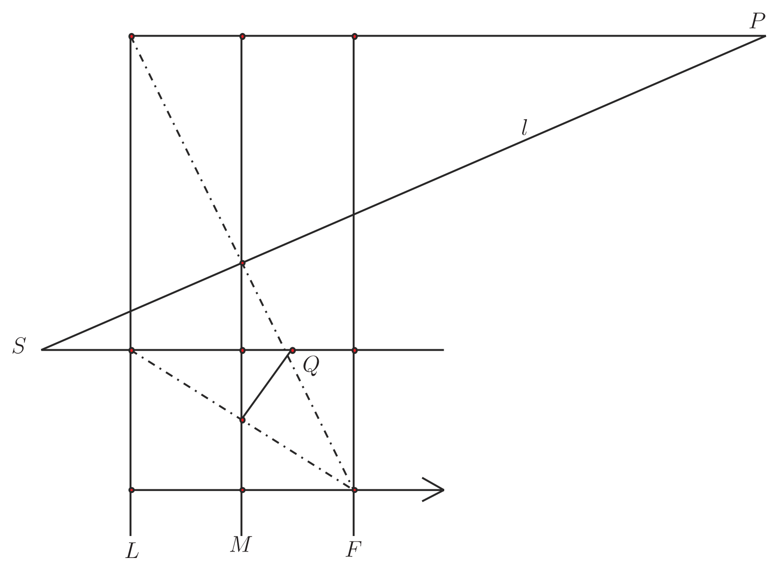
由於 l 和拋物線的對稱軸夾定角 θ , 所以

$$SQ:PS^2=\frac{1}{4a}\Big(\frac{RY}{PS}\Big)^2=\frac{1}{4a}\sin^2\theta$$

若以 l 與 N' 兩直線作爲夾角 θ 的斜角坐標軸, 原點定爲 P, 則 Q 點滿足

$$\sin^2\theta.PS^2=4a(SQ) \tag{4}$$

此即拋物線在斜角坐標 $l-N'$ 中滿足的方程式。易見當 P 是頂點 V 時, $\theta=90°$, 此時 (4) 式回歸到 (1)、(2) 的標準式。總結以上的討論如下 (圖三):



圖三

固定拋物線上一點 P, l 是拋物線過 P 點的切線, S 是 l 上任一點, Q 在拋物線上並且 SQ 與拋物線的對稱軸平行, 則 $SQ:SP^2$ 是一個定值, 與 S 無關。

二. 拋物線比例性質

如圖四所示, PT 是拋物線過 P 點的切線, SK、TJ 均與拋物線的對稱軸平行, Q 在拋物線上, 延長 PQ 交 TJ 於 R。

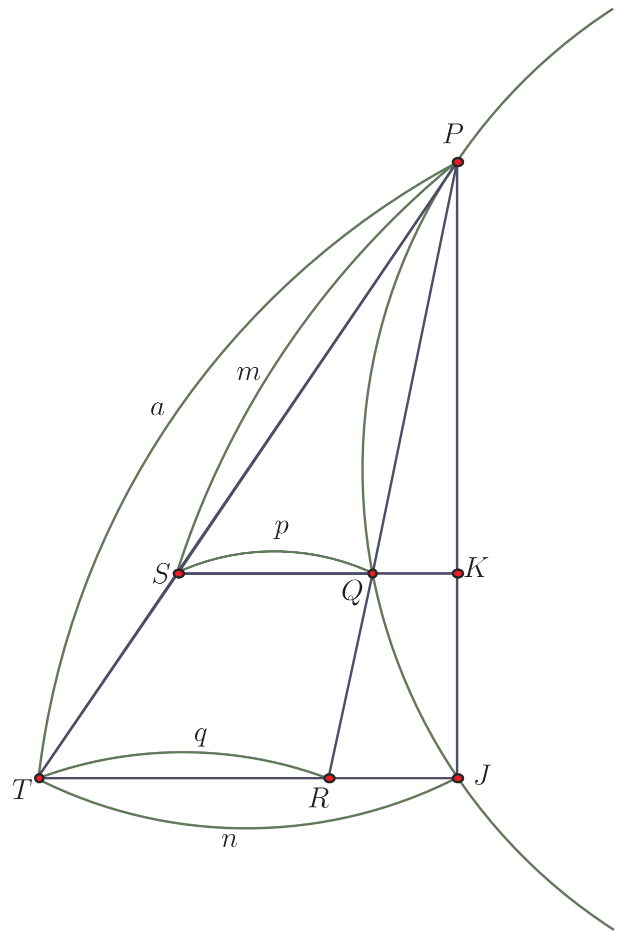


圖 四

由上一節的結果,

$$(PS=m, SQ=p, PT=a, TJ=n, TR=q)\frac{m^2}{p}=\frac{a^2}{n} \text{ 或 } \frac{m}{p}=\frac{a^2}{mn}$$

因爲 $SK//TJ$, 所以 $\frac{a}{q}=\frac{m}{p}=\frac{a^2}{mn}$, 得到 $\frac{n}{q}=\frac{a}{m}$, 從而 $\frac{SK}{SQ}=\frac{n}{q}$, $\frac{a}{m}=\frac{PJ}{PK}$ 或

$$\frac{SK}{QK}=\frac{PJ}{KJ} \tag{5}$$

(5) 式稱爲拋物線比例性質 (註二)

三. 以槓桿法求弓形面積

續圖四, 假設 PR 是 $\triangle PTJ$ 底邊 TJ 的中線, PR 交拋物線於 $Q, SQ=QK, LI$ 平行對稱軸, 並將 PR 延長一倍到 U 點:

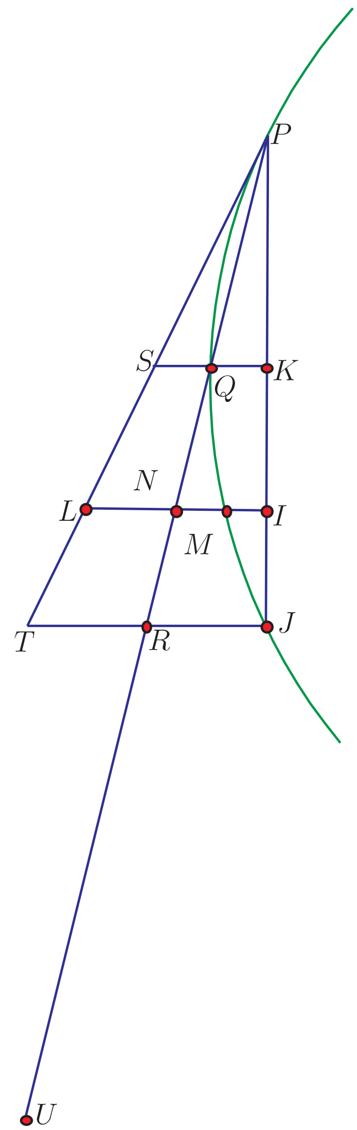


圖 五

由式 (5) 拋物線比例性質得 $LI:MI=PJ:IJ=PR:RN=RU:RN$ 或

$$MI.RU=LI.RN \tag{6}$$

當 I 沿 JP 從 J 變化到 P 時, MI 掃過拋物線弓形 PQJ, 此時 LNI 以 RN 爲力矩, 從 TJ 掃過 $\triangle PTJ$。以 R 爲支點, (6) 式的左邊因此可以看成弓形 PQJ 掛在 U 點的力矩, (6) 式的右邊可以看成 $\triangle PTJ$ 掛在 $\triangle PTJ$ 重心位置的力矩, 因此 (弓形 $PQJ).UR=(\triangle PTJ).\frac{1}{3}PR$。由於 $UR=PR$, 所以 3(弓形 $PQJ)=\triangle PTJ$ 又因 $\triangle PTJ=4\triangle PQJ$, 所以 (註三) 弓形 $PQJ=\frac{4}{3}\triangle PQJ$ 注意到 $PK=KJ, SQ=QK$。

四. 以窮盡法求弓形面積

如圖六所示, PJ 是拋物線的弦, CD 切拋物線於 Q 並且滿足 $CD//PJ, CP//QK//DJ$ // 對稱軸。以 Q 爲原點, CD, QK 爲斜角坐標軸, 拋物線滿足 $CP : QC^2 = DJ : QD^2$; 又因爲 $CP = DJ$, 所以 $QC = QD$, 亦即 K 是 PJ 的中點。再取 QC 的中點 E, 作 $EG//CP$, 交拋物線於 F。因爲 $EF : QE^2 = CP : QC^2$, 所以 $CP = 4EF$。以下圖表示 (圖七)

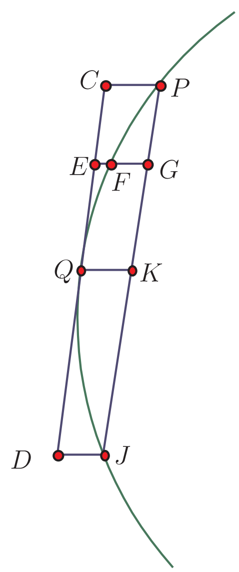


圖 六

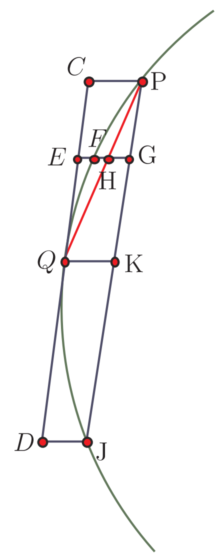


圖 七

連 PQ 交 EG 於 H, 則 $EH = \frac{1}{2}PC$, 但因 $EF = \frac{1}{4}PC$, 因此有 $EF = FH = \frac{1}{2}HG$, 所以 $\triangle PFQ = 2\triangle PFH = \triangle PHG = \frac{1}{4}\triangle PQK$ 或 (圖八, F, F' 的取法如上) 斜線部分面積 $= \frac{1}{4}\triangle PQJ$。

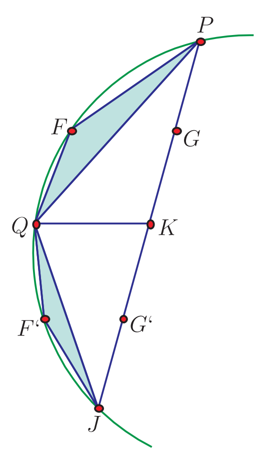


圖 八

以同樣的方法繼續填充拋物線弓形 PQJ, 因此而得一無窮等比級數 $(\triangle PQJ)(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots)=\frac{4}{3}\triangle PQJ$, 此即阿基米德的窮盡法, 結論與上一節的槓桿法相同: 拋物線弓形 PQJ 面積 $=\frac{4}{3}\triangle PQJ$(註四)。

註一: TQ 是 YF 的中垂線, 所以 $QY=QF$, 因此 Q 在拋物線上。至於 TQ, 一方面可以看成是 (當 Y 變動時) 拋物線的包絡線; 另一方面也可以證明 TQ 直線與拋物線只在 Q 點相交, 這表示 TQ 是拋物線在 Q 點的切線。請參考數學傳播30卷第一期, 45頁張海潮等人所著《圓錐曲線的光學性質》。

註二: C. H. Edwards 在所著《The Historical Development of the Calculus》第37頁提到此一拋物線比例性質和相關延伸時, 有下列的評論: Archimedes quotes these facts without proof, referring to earlier treatises on the conics by Euclid and Aristaeus. (阿基米德引用歐幾里得和阿里斯泰奧斯早期有關錐線的結果, 並未給出證明。) 此一比例性質並見 S. Stein 寫的《阿基米德幹了什麼好事!》第7章—譯者陳可崗, 2004年, 天下遠見出版。Stein 在該書的附錄 A 中提出了一個基於仿射變換的證明。

註三: 阿基米德以拋物線比例性質爲基礎, 從力矩的觀點討論拋物線弓形面積, 見曹亮吉著《微積分》2.3頁, 歐亞出版社, 1990年。並見《阿基米德幹了什麼好事!》第7章。

註四: 同註三。

—本文作者爲台大數學系退休教授—