數學傳播 34卷3期, pp. 83-90

用 O. Stolz 定理求一些不定式的極限

胡紹宗

定不定式的值, 總的原則是想方設法消除其 “不定性”, 方法有多種多樣, 但利用 O. Stolz 定理求某些數列不定式的極限, 往往可得心應手, 且更爲便捷。爲了證明此定理, 先證明如下不等式:

若分數 $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \ldots, \dfrac{a_n}{b_n}$ 的分母是正數, 則

$$\min\frac{a}{b} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \le \max\frac{a}{b} \tag{$*$}$$

其中 $\min\dfrac{a}{b}$ 與 $\max\dfrac{a}{b}$ 分別是各分數 $\dfrac{a_i}{b_i}$ 中的最小值和最大值。

證: 由題設, 有

$$\begin{array}{lll}
\min\frac{a}{b} \le \frac{a_1}{b_1} \le \max\frac{a}{b} & \text{或} & b_1\min\frac{a}{b} \le a_1 \le b_1\max\frac{a}{b} \\
\min\frac{a}{b} \le \frac{a_2}{b_2} \le \max\frac{a}{b} & \text{或} & b_2\min\frac{a}{b} \le a_2 \le b_2\max\frac{a}{b} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\min\frac{a}{b} \le \frac{a_n}{b_n} \le \max\frac{a}{b} & \text{或} & b_n\min\frac{a}{b} \le a_n \le b_n\max\frac{a}{b}
\end{array}$$

上面各式的各端相加,

$$(b_1+b_2+\cdots+b_n)\min\frac{a}{b} \le a_1+a_2+\cdots+a_n \le (b_1+b_2+\cdots+b_n)\max\frac{a}{b}$$

因此
$$\min\frac{a}{b} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \le \max\frac{a}{b}.$$

僅當各分數相等時等式纔成立。

O. Stolz 定理: 若 $y_n \to +\infty$, 且 $y_{n+1} > y_n$, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

只須等式右邊的極限已知其存在 (有限或無窮)。

證: 先假定 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$ (有限數), 則對 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N$, 使當 $n>N$ 時, 有

$$\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{或}\qquad A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

也就是, 不論怎樣的 $n>N$, 一切分數

$$\frac{x_{N+1}-x_N}{y_{N+1}-y_N},\ \frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{y_{n-1}-y_{n-2}},\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

都在 $\left(A-\dfrac{\varepsilon}{2},A+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 之中。上述各分數的分子之和

$$(x_{N+1}-x_N)+(x_{N+2}-x_{N+1})+\cdots+(x_{n-1}-x_{n-2})+(x_n-x_{n-1})=x_n-x_N,$$

分母之和

$$(y_{N+1}-y_N)+(y_{N+2}-y_{N+1})+\cdots+(y_{n-1}-y_{n-2})+(y_n-y_{n-1})=y_n-y_N,$$

又因 n 增大時 y_n 隨著增大, 各分數的分母都是正數, 所以由不等式 $(*)$, $\dfrac{x_n-x_N}{y_n-y_N}$ 也在 $\left(A-\dfrac{\varepsilon}{2},A+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 中,

$$\text{即}\quad\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

由恆等式 (很容易驗證)

$$\frac{x_n}{y_n}-A=\frac{x_N-Ay_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-A\right)$$

可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n}-A\right|&\le\left|\frac{x_N-Ay_N}{y_n}\right|+\left|\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-A\right)\right|\\&\le\left|\frac{x_N-Ay_N}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-A\right|\end{aligned}$$

當 $n>N$ 時, 右端第二項 $<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 由於 $y_n\to+\infty$, 所以第一項在 $n>N'$ 時也 $<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (並可取 $N'>N$), 也就是當 $n>N'$ 時

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\qquad\text{即}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, 則當 n 充分大時有 $x_n-x_{n-1}>y_n-y_{n-1}$, 當 $y_n\to+\infty$ 時, x_n 也 $\to+\infty$。

研究 $\dfrac{y_n}{x_n}$。由前結果, 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0.$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty.$$

例 1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$ (收斂數列 $\{a_n\}$ 的首 n 個值的 "算術平均值" 與數列有相同的極限)。並據此求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$。

(**證法** 1.) 在 O. Stolz 定理內, 命 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $y_n=n$, 則有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}a_n=a.\end{aligned}$$

由此, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$。

(**證法** 2.) 由題設 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 即對 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N_1$, 當 $n>N_1$ 時, 有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

而 $$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na}{n}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)+(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\&\le\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{(a_{N_1+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\&\le\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\&<\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\quad\left(\because\ \frac{n-N_1}{n}<1\right)\end{aligned}$$

令 $\quad M=\max\{|a_1-a|,|a_2-a|,\ldots,|a_{N_1}-a|\}$,

則 $\quad \dfrac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\dfrac{N_1M}{n}$,

於是 $\quad \left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\dfrac{N_1M}{n}+\dfrac{\varepsilon}{2}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_1M}{n}=0$, 對上述 $\varepsilon>0$, $\exists\ N_2$, 當 $n>N_2$ 時, $\dfrac{N_1M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 則當 $n>N$ 時, 有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

解: 命 $x_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$, $y_n=n$,

由 O. Stolz 定理,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})-(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n-1]{n-1})}{n-(n-1)}\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.
\end{aligned}$$

當 $n>2$ 時, $\sqrt[n]{n}>1$, 命 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$ $(\lambda_n>0)$

由牛頓二項式定理,

$$\begin{aligned}
n&=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n\\
&>\frac{n(n-1)}{2!}\lambda_n^2=\frac{n}{2}(n-1)\lambda_n^2>\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\lambda_n^2\quad\left(\because\ \text{當 } n>2\text{ 時}, n-1>\frac{n}{2}\right)\\
&=\frac{n^2}{4}\lambda_n^2
\end{aligned}$$

即 $\quad n>\dfrac{n^2}{4}\lambda_n^2$, 從而 $0<\lambda_n<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$,

因 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$, 故由追斂性定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$,

於是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\lambda_n) = 1+0 = 1,$

所以 原式 $= 1$。

例 3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$ $(a>1)$

(**解法** 1.) 爲了便於利用 O. Stolz 定理, 先求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k}$ $(a>1)$。

當 $k \le 0$ 時, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty,$

當 $k > 0$ 時, 它是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式,

當 $k = 1$ 時, 由 O. Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{n-(n-1)} = \lim_{n\to\infty} a^n\Big(1-\frac{1}{a}\Big) = +\infty,$$

當 $0 < k < 1$ 時, $\dfrac{a^n}{n^k} > \dfrac{a^n}{n} \to +\infty$ $(n\to\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty,$

當 $k > 1$ 時, 有 (至少在充分大的 n 時)

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n}\right]^k > \frac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n},$$

令 $a^{\frac{1}{k}} = a'$, 因 $a > 1$, 故 $a' > 1$,

於是 $\dfrac{a^n}{n^k} > \dfrac{(a^{\frac{1}{k}})^n}{n} = \dfrac{(a')^n}{n} \to +\infty$ $(n\to\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$$

綜上可知, 當 $a > 1$ 時, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty$, 所以

當 $a > 1$ 時, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$。

(**解法** 2.) 利用 L'Hospital 法則。

這裡值得注意的是, 雖然利用 L'Hospital 法則可以求某些數列不定式的極限, 但不能直接利用。這是因爲數列函數在 ∞ 的任何鄰域即開區間 (G,∞) $(\forall\ G > 0)$ 內都是無法求導數的。那麼究竟怎樣使用 L'Hospital 法則計算數列不定式的極限呢? 理論依據是:

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ 也必存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

事實上, 設 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$, 則由函數極限的 $\varepsilon-M$ 定義, 對 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ M>0$, 使當 $x>M$ 時, 有 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$, 當然, 當 $n>M$ 時, 也有 $\left|\dfrac{f(n)}{g(n)}-A\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=A$。

因此, 對於數列不定式的極限, 可先轉化爲相應形式的函數不定式的極限, 再用 L'Hospital 法則對後者求得結果, 也就是前者所要答案。

此題應利用 L'Hospital 法則求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}$。

當 $k\le 0$ 時, 顯然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$,

當 $k>0$ 時, 設小於 k 的最大整數爲 n, 即 $0\le n<k\le n+1$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^x(\ln a)^2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}{a^x(\ln a)^3}\\&\vdots\ \vdots\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)x^{k-n-1}}{a^x(\ln a)^{n+1}}\\&\qquad(\text{使用 } n+1 \text{ 次 L'Hospital 法則})\end{aligned}$$

因 $k\le n+1$, 當 $x\to+\infty$ 時,

(i) 當 $k=n+1$, 則分子 $\to k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$, 分母 $\to+\infty$,
於是 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$,

(ii) 當 $k<n+1$, 則分子 $\to 0$, 分母 $\to+\infty$, 也有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0\ (a>1)$。

例 4.

(i) 設 $z_n=\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ (k 爲正整數), 求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$。

(ii) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}$。

(iii) 設 $U_n=n\Big(z_n-\dfrac{1}{k+1}\Big)=\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$。

解: (i) 它是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式

令 $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$, 應用 O. Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - \left[n^{k+1} - (k+1)n^k + \dfrac{(k+1)k}{2!}n^{k-1} - \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!}n^{k-2} + \cdots + (-1)^{k+1}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \dfrac{(k+1)k}{2!}n^{k-1} + \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!}n^{k-2} - \cdots + (-1)^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k+1) - \dfrac{(k+1)k}{2!}\cdot\dfrac{1}{n} + \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!}\cdot\dfrac{1}{n^2} - \cdots + (-1)^k\cdot\dfrac{1}{n^k}}$$

$$= \frac{1}{k+1}$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n z_n = +\infty \quad \left(\because \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{z_n} = 0\cdot(k+1) = 0\right).$$

(iii) 它在第一種形式表示 $\infty\cdot 0$ 型的不定式, 而在第二種形式表示 $\infty - \infty$ 型的不定式。

$$u_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}$$

令 x'_n 等於分子, y'_n 等於分母,
再應用 O. Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x'_n}{y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - x'_{n-1}}{y'_n - y'_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - [n^{k+1} - (n-1)^{k+1}]}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - \left[(k+1)n^k - \dfrac{(k+1)k}{2!}n^{k-1} + \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!}n^{k-2} - \cdots + (-1)^k\right]}{(k+1)\left\{n^k - \left[n^k - kn^{k-1} + \dfrac{k(k-1)}{2!}n^{k-2} - \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}n^{k-3} + \cdots + (-1)^k\right]\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(k+1)k}{2!}n^{k-1} - \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!}n^{k-2} + \cdots + (-1)^{k+1}}{(k+1)kn^{k-1} - \dfrac{(k+1)k(k-1)}{2!}n^{k-2} + \dfrac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{3!}n^{k-3} - \cdots + (-1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(k+1)k}{2!} - \dfrac{(k+1)k(k-1)}{3!}\cdot\dfrac{1}{n} + \cdots + (-1)^{k+1}\dfrac{1}{n^{k-1}}}{(k+1)k - \dfrac{(k+1)k(k-1)}{2!}\cdot\dfrac{1}{n} + \dfrac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{3!}\cdot\dfrac{1}{n^2} - \cdots + (-1)^{k+1}\dfrac{1}{n^{k-1}}}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

(註) 我們知道, 在 O. Stolz 定理中, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 必存在, 且二者相等。

但若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 不存在, 則並不能確定 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 也不存在。

例如, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\cos n}{n}$ (令 $x_n=2n+\cos n$, $y_n=n$)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\cos n-[2(n-1)+\cos(n-1)]}{n-(n-1)}\\&=\lim_{n\to\infty}[2+\cos n-\cos(n-1)]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(2-2\sin\frac{1}{2}\sin\frac{2n-1}{2}\right)\quad\text{不存在。}\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+\cos n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{\cos n}{n}\right)=2+0=2$。

參考文獻

1. 華東師範大學數學系編, 《數學分析》, 第三版, 高等教育出版社, 2001 年 7月。
2. 復旦大學數學系主編, 《數學分析》, 第二版, 上海科學技術出版社, 1978 年 3月。
3. 華羅庚著, 《高等數學引論》, 科學出版社, 1979 年 4月。
4. T. M. 菲赫金哥爾茨著, 《微積分學教程》, 人民教育出版社, 1978 年 4月。

—本文作者任教中國安徽省阜陽師範學院—