數學傳播 34卷3期, pp. 49-73

複分析五講 第二講

Cauchy 積分定理與 Cauchy 積分公式

龔 昇 · 張德健

2.1. Cauchy - Green 公式 (Pompeiu 公式)

Cauchy 積分理論是複變函數論中三個主要組成部分之一, 有了 Cauchy 積分理論, 複變函數論才形成一門獨立的學科, 並且導出一系列在微積分中得不到的結果。我們先從 Cauchy - Green 公式開始, 這是上一章中的定理 1.1 (複形式的 Green 公式) 的直接推論。

定理 2.1. (Cauchy - Green **公式**, Pompein **公式**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲 C^1 邊界, 即 $\partial\Omega$ 爲光滑曲線, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, 即 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上有一階連續偏導數, 則

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi_0}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi_0}\iint_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\cdot\frac{dA}{\zeta - z}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

證明: 在 z 點的附近作一個以 z 爲中心, ε (> 0) 爲半徑的小圓盤 $D(z;\varepsilon)$, 且 $D(z;\varepsilon) \subset \Omega$。記 $\Omega_{z,\varepsilon} = \Omega \setminus D(z;\varepsilon)$ 在 $\Omega_{z,\varepsilon}$ 中考慮微分形式

$$\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

則由第一講之定理 1.1得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial D_{z,\varepsilon}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right).$$

由 d_ζ 的定義知,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}} d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) &= \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}(\partial + \overline{\partial})\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) \\ &= \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right) + \iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\overline{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right). \end{aligned}$$

由於

$$\partial\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\zeta\wedge d\zeta=0$$

以及

$$\overline{\partial}\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta+f\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)d\overline{\zeta}\wedge d\zeta,$$

而 $\dfrac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\dfrac{1}{\zeta-z}=0$, 所以 $\overline{\partial}\left(\dfrac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\dfrac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta$.

因此

$$\iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}d_\zeta\left(\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\right)=\iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}.$$

另一方面, 由於

$$\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta,$$

而由假設, $f(\zeta)\in C^1(\overline{\Omega})$, k 存在常數 c, 使得

$$|f(\zeta)-f(z)|<c|\zeta-z|$$

在 $\partial D(z;\varepsilon)$ 上成立, 於是

$$\left|\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|<c\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\left|\frac{\zeta-z}{\zeta-z}\right||d\zeta|=2\pi\varepsilon\cdot c,$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時, 上述積分 $\to 0$, 而當 $\zeta\in\partial D(z;\varepsilon)$時, ζ 可表爲 $\zeta=z+\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$, 於是

$$\int_{\partial D(z;\varepsilon)}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon e^{i\theta}id\theta}{\varepsilon e^{i\theta}}=2\pi i f(z).$$

因此,

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-2\pi i f(z)=\iint_{\Omega_{z,\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{\zeta-z}+O(\varepsilon),$$

這裡 $O(\varepsilon)$ 表示一個量, 當此量除以 ε, 而讓 $\varepsilon\to 0$ 時, 其值趨於常數, 在上式中令 $\varepsilon\to 0$, 即得到 (1.1), 定理 2.1因而證畢。

由定理 2.1, 我們立即可以得到下面之結果。

定理 2.2. (Cauchy **積分公式**) 若 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 爲有界區域, 且 $\partial\Omega$ 爲 C^1 邊界, $f(z)$ 爲 Ω 上的全純函數, 且 $f(z)\in C^1(\overline{\Omega})$, 則

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{1.2}$$

由此我們還可以得到

定理 2.3. (Cauchy **積分定理**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, 且 $\partial\Omega$ 爲 C^1 邊界, $F(z)$ 爲 Ω 上的全純函數, 且 $F(z) \in C^1(\overline{\Omega})$, 則

$$\oint_{\partial\Omega} F(\zeta)d\zeta = 0. \tag{1.3}$$

證明: 我們不妨假設原點 $o \in \Omega$, 令 $f(z) = zF(z)$, 以此代入 (1.2) 式中, 再令 $z = 0$, 即得到 (1.3) 式, 定理因而證畢。

由上面的討論, 我們知道 Cauchy 積分定理可由 Cauchy 積分公式推出。當然, 定理 2.3 也可以由定理 2.1直接證明之。 反過來說, 由 Cauchy 積分定理可以導出 Cauchy 積分公式。在 Ω 中固定一個點 z_0, 考慮 $\Omega_{z_0,\varepsilon} = \Omega \setminus D(z_0;\varepsilon)$, 取 $F(z) = \dfrac{f(z)}{z-z_0}$, 如同證明定理 2.1那樣, 我們可以立即得到定理 2.2, 因此定理 2.2同定理 2.3是相互等價的, 這兩個相互等價的定理即是複變函數論的重要基石之一。

Cauchy - Green 公式的另一個重要應用是解一維的 $\overline{\partial}$ - 問題, 這個結果將會在下一講中用到。若 ϕ 爲一個連續函數, 使 $\phi \neq 0$ 的所有的點之集合的閉包 (closure) 稱爲 ϕ 的支集 (support), 記作 Supp(ϕ)。

定理 2.4. (**一維的** $\overline{\partial}$ **- 問題的解**) 若 $\phi(z) \in C^1(\mathbb{C})$, 且有緊緻支集, 即其支集爲緊緻的, 令

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta, \tag{1.4}$$

則 $u(z) \in C^1(\mathbb{C})$, 且爲 $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = \phi(z)$ 的解。

證明: 固定 $z \in \mathbb{C}$, 令 $\zeta - z = \xi$, 則

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\xi + z)}{\xi} d\overline{\xi} \wedge d\xi.$$

由於 $\dfrac{1}{\xi}$ 在任意緊緻集合上可積, 故 $u(z)$ 爲連續函數, 若 $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, 則

$$\frac{u(z+h) - u(z)}{h} = \frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\phi(\xi + z + h) - \phi(\xi + z)}{h} d\overline{\xi} \wedge d\xi.$$

固定 z 與 ξ, 當 $h \to 0$ 時,

$$\frac{\phi(\xi + z + h) - \phi(\xi + z)}{h} \to \frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi + z),$$

由於 $\phi\in C^1(\mathbb{C})$, 且有緊緻支集, 所以

$$\frac{\phi(\xi+z+h)-\phi(\xi+z)}{h}\to\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi+z),$$

對 ξ 及 z 來講是一致的, 所以我們有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(u(z+h)-u(z)\Big)\\&=\frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(\xi+z)d\overline{\xi}\wedge d\xi\\&=\frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta,\end{aligned}\tag{1.5}$$

這裡 $\zeta=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 而這個極限對 $\mathbb{C}$ 中任意緊緻集合的點 z 來講是一致的, 故 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是連續函數, 同理

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{1}{\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\beta}(\xi+z)d\overline{\xi}\wedge d\xi=\frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial\phi}{\partial\beta}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta.\tag{1.6}$$

且 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 是連續函數, 故 $u\in C^1(\mathbb{C})$。

由公式 (1.5) 及 (1.6) 立即得到

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}=\frac{-1}{2\pi i}\iint_{\mathbb{C}}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta.\tag{1.7}$$

由於 $\phi(z)$ 有緊緻支集 $\mathrm{Supp}(\phi)$, 則存在 $R>0$, 使得 $\mathrm{Supp}(\phi)\subset D(0;R)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R\}$。於是由公式 (1.7) 得到: 取 $\varepsilon>0$, 則

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}=\frac{-1}{2\pi i}\iint_{D(0;R+\varepsilon)}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}d\overline{\zeta}\wedge d\zeta.$$

由 Cauchy - Green 公式得到上式右邊等於

$$\phi(z)-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D(0;R+\varepsilon)}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

而 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{\partial D(0;R+\varepsilon)}\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0$, 故得 $\dfrac{\partial u}{\partial\overline{z}}(\zeta)=\phi(z)$, 定理因而證畢。

顯而易見, 若 $\phi(z)\in C^k(\mathbb{C})$ 有緊緻支集, 則由公式 (1.4) 所定義的 $u(z)\in C^k(\mathbb{C})$, 這裡 $k\in\mathbb{N}$ 或 $k=\infty$。同樣顯然的是: 若 $\phi(z)\in C^k(\mathbb{C})$, 其支集爲互不相交的緊緻集合的聯集 (有限個或無限個), 則定理 2.4依然成立。

2.2. Cauchy - Goursat 定理

Cauchy 當初建立的積分公式與積分定理就是定理 2.2及定理 2.3的形式。後來 Goursat 去掉了 $f(z) \in C^1(\overline{\Omega})$ 的條件, 成爲 Cauchy-Goursat 積分公式與積分定理, 從而成爲一般通常應用的公式與定理。

定理 2.2′. (Cauchy-Goursat **積分公式**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲簡單封閉曲線, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{2.1}$$

定理 2.3′. (Cauchy-Goursat **積分定理**) 若 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 爲有界區域, $\partial\Omega$ 爲簡單封閉曲線, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$上連續, 則有

$$\oint_{\partial\Omega} f(\zeta) d\zeta = 0. \tag{2.2}$$

顯然定理 2.2′ 與定理 2.3′ 是相互等價的, 這裡我們只證明定理 2.3′, 用的是傳統的方法, 我們先要證明下面兩個引理。

引理 2.1. 設 $f(z)$ 爲在區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的連續函數, γ 是這個區域內的任意一條逐段光滑曲線, 則對任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在一條內接於 γ, 且完全在 Ω 內的折線 Σ, 使得

$$\left| \int_\Sigma f(z)dz - \int_\gamma f(z)dz \right| < \varepsilon$$

成立。

證明: 在 Ω 內取一個閉子區域 $\overline{D} \subset \Omega$, 使得 $\gamma \subset \overline{D}$, 由於 $f(z)$ 在 Ω 上連續, 故在 $\overline{D}$ 上一致連續, 因此, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得對 $\overline{D}$ 內任意滿足 $|z - w| < \delta$ 的兩點, $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ 都成立。我們分 γ 爲 n 段, 長度都小於 δ 的弧 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, 且內接於 γ 作折線 Σ, 使它的連接線段 $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ 正好對著這些弧, 以 $z_0, z_1, \ldots, z_n$ 表示折線 Σ 的頂點。由於每一段 γ_k 的長度都小於 δ, 故每個弧段上任意兩點的距離都小於 δ, 對 l_k 上的任意兩點也是如此, 積分 $\int_\gamma f(z)dz$ 有近似值

$$S = f(z_0)\Delta z_1 + f(z_1)\Delta z_1 + \cdots + f(z_{n-1})\Delta z_{n-1},$$

這裡 $\Delta z_k = \int_{\gamma_k} dz$, 這也可以表示爲

$$S = \int_{\gamma_0} f(z_0)dz + f_{\gamma_1} f(z_1)dz + \cdots + \int_{\gamma_{n-1}} f(z_{n-1})dz.$$

於是

$$\int_{\gamma} f(z)dz - S = \int_{\gamma_0}(f(z)-f(z_0))dz + \int_{\gamma_1}(f(z)-f(z_1))dz + \cdots + \int_{\gamma_{n-1}}(f(z)-f(z_{n-1}))dz.$$

由於在每段 γ_k 上都有 $|f(z)-f(z_k)|<\varepsilon$, 故

$$\left|\int_{\gamma} f(z) - S\right| < \varepsilon|\gamma_0| + \varepsilon|\gamma_1| + \cdots + \varepsilon|\gamma_{n-1}| = \varepsilon L$$

這裡 L 爲 γ 的長度, 由於 Δz_k 也可以表示成 $\int_{l_k} dz$, 故同樣地,

$$\int_{\Sigma} f(z) - S = \int_{\ell_0}(f(z)-f(z_0))dz + \int_{\ell_1}(f(z)-f(z_1))dz + \cdots + \int_{\ell_{n-1}}(f(z)-f(z_{n-1}))dz.$$

同樣得到

$$\left|\int_{\Sigma} f(z)dz - S\right| < \varepsilon|\ell_0| + \varepsilon|\ell_1| + \cdots + \varepsilon|\ell_{n-1}| = \varepsilon(|\ell_0| + |\ell_1| + \cdots + |\ell_{n-1}|) < \varepsilon L.$$

故

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\Sigma} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\gamma} f(z)dz - S\right| + \left|\int_{\Sigma} f(z)dz - S\right| \\ &< \varepsilon L + \varepsilon L = 2\varepsilon L.\end{aligned}$$

這就證明了引理 2.1。

引理 2.2. 若 $f(z)$ 是在單連通區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上的全純函數, 則沿 Ω 內任一條逐段光滑封閉曲線 γ 所取的積分 $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$。

證明: 由引理 2.1, 任給 $\varepsilon > 0$, 任意一條逐段光滑封閉曲線 γ 都可用一條封閉折線 Σ 來內接之, 且

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\Sigma} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

成立。

如果對任意封閉折線, 引理 2.2成立即 $\int_{\Sigma} f(z)dz = 0$, 由此即可得出引理 2.2對任意逐段光滑封閉曲線也都成立。

對任意封閉折線, 我們均可添加直線段, 使之分解成若干個三角形之和。因爲在添加的這些線段上, 積分的值相互抵消, 於是在封閉折線上的積分等於在這些三角形上的積分總和, 如果能證明在三角形 (如圖 1) 上, 引理 2.2是成立的。那引理 2.2對任意逐段光滑封閉也都成立。現在我們來證明引理 2.2對三角形成立。

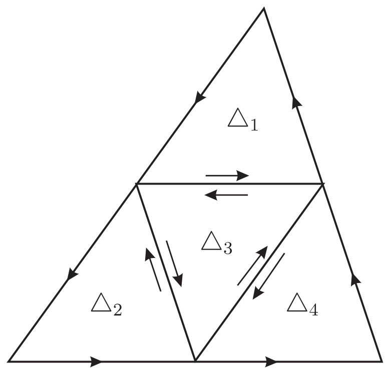

圖1

設在 Ω 內任一三角形邊界 $\triangle$ 上, $f(z)$ 的積分的絕對值為 M, 即

$$\left|\int_{\triangle} f(z)dz\right| = M.$$

現要證明 $M=0$, 二分三角形的每一邊, 兩兩相接這些分點, 給定的三角形被分為四個全等的三角形, 它們的周界分別為 $\triangle_1$ $\triangle_2$, $\triangle_3$ 及 $\triangle_4$, 於是

$$\int_{\triangle} f(z)dz = \left(\int_{\triangle_1} + \int_{\triangle_2} + \int_{\triangle_3} + \int_{\triangle_4}\right) f(z)dz.$$

由於 $|\int_{\triangle} f(z)dz| = M$, 故至少有一個 $\triangle_k$ $(k=1,2,3,4)$ 使得 $|\int_{\triangle_k} f(z)dz| \geq \frac{M}{4}$。不妨設此為 $\triangle_1 = \triangle^{(1)}$, 於是 $|\int_{\triangle^{(1)}} f(z)dz| \geq \frac{M}{4}$, 對 $\triangle_1$ 用同樣方法分成四個全等三角形, 又可找到一個三角形 $\triangle^{(2)}$, 使得 $|\int_{\triangle^{(2)}} f(z)dz| \geq \frac{M}{4^2}$, 這樣可以無限止的進行下去, 於是得到一個三角形序列

$$\triangle = \triangle^{(0)}, \quad \triangle_1 = \triangle^{(1)}, \quad \triangle^{(2)}, \ldots, \triangle^{(n)}, \ldots$$

前一個包含後面一個, 而且

$$\left|\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz\right| \geq \frac{M}{4^n}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.3}$$

以 L 表示 $\triangle$ 的周長, 於是 $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \ldots, \triangle^{(n)}, \ldots$ 的長度為 $\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2^2}, \ldots, \dfrac{L}{2^n}, \ldots$。當 $n \to \infty$ 時, 這趨於零, 故存在一點 z_0, 屬於所有的 $\triangle^{(n)}$, $(n=0,1,2,\ldots)$, 對於任給 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 只要 $|z-z_0| < \delta$, 就有

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

成立, 即 $|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)|<\varepsilon|z-z_0|$ 成立, 當 n 充分大時, $\triangle^{(n)}$ 全落在 $D(z_0;\varepsilon)$ 之中, 顯然 $\int_{\triangle^{(n)}} dz=0$ 及 $\int_{\triangle^{(n)}} zdz=0$, 故

$$\int_{\triangle^{(n)}} f(z)dz=\int_{\triangle^{(n)}}(f(z)-f(z_0)-(z-z_0)f'(z_0))dz.$$

$$\left|\int_{A^{(n)}} f(z)dz\right|<\int_{A^{(n)}}\varepsilon\cdot|z-z_0||dz|.$$

但 $|z-z_0|$ 爲 $A^{(n)}$ 上任意一點 z 到這三角形內一點 z_0 的距離, 故

$$|z-z_0|<\frac{L}{2^n}.$$

因此

$$\left|\int_{A^{(n)}} f(z)dz\right|<\varepsilon\cdot\frac{L}{2^n}\cdot\frac{L}{2^n}=\varepsilon\cdot\frac{L^2}{4^n}, \tag{2.4}$$

比較式子 (2.3) 與 (2.4), 即得 $M<\varepsilon L^2$ 對任意 $\varepsilon>0$ 都成立, 故 $M=0$, 引理 2.2 因而證畢。

現在我們來證明定理 2.3′。

定理 2.3′ 的證明: 我們先證明定理 2.3′ 對具有特殊性質的 Ω 成立。

若 $\partial\Omega$ 爲由 $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 及兩條可求長連續曲線

$$MN: y=\varphi(x),\quad a\le x\le b$$
$$PQ: y=\psi(x),\quad a\le x\le b$$

所圍成的區域 (見圖 2), 其中 $\varphi(x)<\psi(x)$ $(a<x<b)$, 假定 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 要證

$$\oint_{MNQPM} f(z)dz=0. \tag{2.5}$$

作直線 $x=a+\varepsilon$, $x=b-\varepsilon$ 及

$$M'N': y=\varphi(x)+\eta,\quad a\le x\le b$$
$$P'Q': y=\psi(x)-\eta,\quad a\le x\le b$$

其中 ε, η 爲充分小的正數, 由於 Ω 爲單連通區域, 故

$$\oint_{M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'} f(z)dz=0.$$

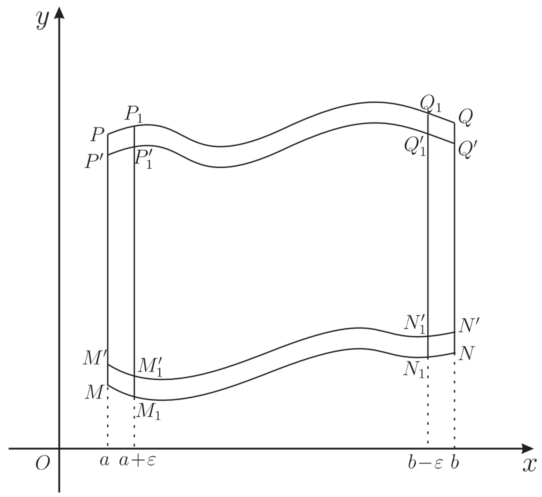

圖2

其中 $M_1'N_1'Q_1'P_1'M_1'$ 爲由上述兩條直線及兩條曲線所圍成的區域的邊界。固定 ε, 令 $\eta \to 0$, 由於 $f(z)$ 在 $\overline{\Omega}$ 上一致連續, 故有

$$\int_{M_1'N_1'} f(z)dz \to \int_{M_1N_1} f(z)dz, \quad \int_{Q_1'P_1'} f(z)dz \to \int_{Q_1P_1} f(z)dz,$$

$$\int_{P_1'M_1'} f(z)dz \to \int_{P_1M_1} f(z)dz, \quad \int_{N_1'Q_1'} f(z)dz \to \int_{N_1Q_1} f(z)dz,$$

因此

$$\oint_{M_1N_1Q_1P_1M_1} f(z)dz = 0.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 同理可得

$$\int_{M_1N_1} f(z)dz \to \int_{MN} f(z)dz, \quad \int_{Q_1P_1} f(z)dz \to \int_{QP} f(z)dz,$$

如能證明: 當 $\varepsilon \to 0$ 時,

$$\int_{P_1M_1} f(z)dz \to \int_{PM} f(z)dz, \quad \int_{N_1Q_1} f(z)dz \to \int_{NQ} f(z)dz,$$

則 (2.5) 得證。這裡只證後一個極限, 前一個極限同理可證。令

$$y_\varepsilon = \max\{\varphi(b), \varphi(b-\varepsilon)\}, \quad Y_\varepsilon = \max\{\psi(b), \psi(b-\varepsilon)\},$$

於是

$$\int_{NQ} f(z)dz = i\int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} f(b+iy)dy = i\left(\int_{\varphi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\right) f(b+iy)dy,$$

$$\int_{N_1Q_1} f(z)dz = i\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{\psi(b-\varepsilon)} f(b-\varepsilon+iy)dy = i\bigg(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\bigg) f(b-\varepsilon+iy)dy.$$

所以

$$\int_{NQ} f(z)dz - \int_{N_1Q_1} f(z)dz = i\int_{y_\varepsilon}^{Y_\varepsilon} \Big(f(b+iy) - f(b-\varepsilon+iy)\Big)dy + iE(\varepsilon), \quad (2.6)$$

這裡

$$E(\varepsilon) = \bigg(\int_{\phi(b)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b)}\bigg) f(b+iy)dy - \bigg(\int_{\varphi(b-\varepsilon)}^{y_\varepsilon} + \int_{Y_\varepsilon}^{\psi(b-\varepsilon)}\bigg) f(b-\varepsilon+iy)dy.$$

由於 $f(z)$ 的一致連續性, 當 $\varepsilon \to 0$ 時, (2.6) 右邊的第一項趨於零。而當 $\varepsilon \to 0$ 時, $y_\varepsilon, Y_\varepsilon$ 分別以 $\varphi(b)$, $\psi(b)$ 爲極限, 故 $E(\varepsilon)$ 中的四個積分均爲零, 於是當 $\varepsilon \to 0$ 時, $\int_{N_1Q_1} f(z)dz \to \int_{NQ} f(z)dz$。

這就證明了: 當 Ω 爲這種特殊區域時, 定理 $2.3'$ 成立, 但對任意區域 Ω, 均可用有限條平行於 y 軸的輔助線, 將 Ω 劃分成具有上述形狀的區域, 而在輔助線上, 積分相互抵消, 故定理 $2.3'$ 得證。

定理 $2.3'$ 對多連通區域也是對的, 因爲這可以將多連通區域用若干曲線將它分割成若干個單連通區域之聯集, 而在輔助線上的積分都是相互抵消的。

這也可敘述爲: 若 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 爲 $n+1$ 條可求長的曲線, 而 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 全在 γ_0 之內, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 中每一條曲線都在其他各條曲線的外部, Ω 爲由 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 所圍成的區域, 即 Ω 的邊界 $\partial\Omega$ 由 $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ 所組成, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

由定理 $2.3'$, 若 $f(z)$ 在 Ω 上全純, z_0, z 爲 Ω 內兩點, 我們便可以定義 $f(z)$ 的積分爲

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

這個積分不依賴於路徑的選擇, 顯然, $F'(z) = f(z)$ 成立。

2.3. Taylor 級數與 Liouville 定理

由 Cauchy 積分公式及 Cauchy 積分定理, 我們立即得到一系列重要的推論, 這一講中剩下的內容都是講這些重要的推論。

定理 2.5: 若 $f(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 則 $f(z)$ 在 Ω 上每一點, 各階導數都存在, 且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

若 $z_0 \in \Omega$, $\overline{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$, 則 $f(z)$ 在 $D(z_0; r)$ 中可展開成 Taylor 級數

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j. \tag{3.2}$$

這級數在 $\overline{D}(z_0; r)$ 中絕對和一致收斂, 且有

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}} d\zeta. \tag{3.3}$$

證明: 設 $z_0 \in \Omega$, 作小圓盤 $D(z_0; r) \subset \Omega$, 由定理 $2.2'$ 知, 若 $z \in D(z_0; r)$, 則

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

於是

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta. \end{aligned}$$

即

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta.$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta \\ &= \frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

若 z_0 到 $\partial\Omega$ 的距離爲 d, i.e., $d = \min\{|z_0 - \zeta|, \zeta \in \partial\Omega\}$, 取 $r = \frac{d}{2}$, 於是

$$|\zeta - z| = |(\zeta - z_0) - (z - z_0)| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}.$$

但是 $|\zeta - z_0| \ge d$, 故

$$\left|\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta\right| \le \frac{M \cdot L}{d/2 \cdot d^2} = \frac{2ML}{d^3}.$$

這裡 $M = \max\limits_{\zeta\in\partial\Omega} |f(\zeta)|$, $L = \partial\Omega$ 的長度。在 (3.4) 中令 $z \to z_0$, 由上述估計式便得到

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^2}.$$

這便證明了 (3.1) 在 $n = 1$ 時成立。

若 (3.1) 在 $n = k \ge 1$ 時成立, 即

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

成立。由於

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

而 $|z - z_0| < r \le |\zeta - z_0|$, 故 $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, 於是

$$\frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^j. \tag{3.5}$$

因而得到

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \cdots\right)^{k+1} d\zeta \\ &= f^{(k)}(z_0) + \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} d\zeta + O(|z - z_0|^2) \end{aligned}$$

於是有

$$\frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(z_0)}{z - z_0} = \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} d\zeta + O(|z - z_0|).$$

令 $z \to z_0$, 即得 (3.1), 當 $n = k + 1$ 時也成立, 即

$$f^{(k+1)}(z_0) = \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}} d\zeta.$$

由數學歸納法, (3.1) 對任意的 $n = 1, 2, \ldots$ 都成立。

將 (3.5) 代入 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$, 由 (3.1) 即得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j=0}^{\infty}(z-z_0)^j\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}d\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j. \end{aligned}$$

這便證明了 (3.2) 式與 (3.3) 式。

定理 2.5說明了一個重要的事實: 對於複變數函數而言, 如果一個函數的一階導數存在, 則任意階導數都存在, 而且可以展成 Taylor 級數, 也就是說這個函數是解析的。這個性質對實變數而言是沒有的。這顯示了複變函數與實變函數的根本差異之一, 在第一講中, 我們定義一個複變函數 $f(z)$ 在區域 Ω 上是全純的, 若 $f(z)$ 在 Ω 上每一點, 其導數是存在的, 由定理 2.5 知道, 這也可以定義爲: $f(z)$ 在 Ω 上每一點 z 全純, 如果在這點的一個鄰域中, $f(z)$ 可以展開成爲收斂冪級數, 顯然, 這兩種定義是等價的。

由定理 2.5, 我們立即得到

定理 2.6. (1) Cauchy 不等式。若 $f(z)$ 在 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上全純, $\overline{D}(z_0;R)\subseteq\Omega$, 則

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(z_0)\right|\le\frac{k!M}{R^k},\quad k\in\mathbb{N} \tag{3.6}$$

成立, 這裡 $M=\max\limits_{z\in\overline{D}(z_0;R)}|f(z)|$。

(2) 若區域 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, K 爲 Ω 中的一個緊緻集合, V 爲 K 的一個鄰域且在 Ω 中是相對緊緻的 (即相對於 Ω, V 是緊緻的), 則對每一個在 Ω 中全純的函數 $f(z)$, 存在常數 c_n ($n\in\mathbb{N}$), 使得

$$\sup_{z\in K}\left|f^{(n)}(z)\right|\le c_n\cdot\|f\|_{L(V)},\quad n\in\mathbb{N} \tag{3.7}$$

這裡 $\|f\|_{L(V)}$ 爲 f 在 V 上的 L^1 模, 即

$$\|f\|_{L(V)}=\iint_V|f(\zeta)|dA.$$

Cauchy 不等式給出全純函數的各階導數的模在一點的估計。而定理 2.6 (2) 的 (3.7) 不等式給出全純函數的各階導數的模在一個緊緻集合上的估計。

定理 2.6 **的證明**: 此定理的第一個結果是顯然的, 現在我們來證明式子 (3.7) 在集合 V 上作一個光滑函數 ψ, 具有如下的性質: 在 V 上有緊緻支集, 且在集合 K 的鄰域 (包含在 V

中) 上取值爲 1, 這樣的函數 ψ 是存在的。可以在許多實分析的書中找到證明, 我們在此就不敍述其證明了。對 ψf 應用定理 2.1 Cauchy-Green 公式, 則有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{\psi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\iint_{\Omega}\frac{\partial(\psi f)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

由於在 Ω 上, f 爲全純, 故 $\dfrac{\partial(\psi f)}{\partial\overline{\zeta}}=f\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}$, 但是 $\psi(\zeta)$ 的支集在 V 中, 而 V 在 Ω 上相對緊緻, 故有

$$\psi(z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{V}f\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

若 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}$ 的支集爲 K_1, 則 K_1 爲 V 中的緊緻子集合, 故 K 與 K_1 之間的距離 $d(K,K_1)>0$。

若 $z\in K$, 則有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

在上式中, 對 z 求 n 次導數, 得到

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\iint_{K_1}f(\zeta)\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

於是就有

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{2\pi}\iint_{K_1}|f(\zeta)|\cdot\left|\frac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right|\cdot\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{|\zeta-z|^{n+1}}.$$

由於 $d(K,K_1)>0$, 故有 c_1 使得 $\dfrac{1}{|\zeta-z|}<c_1$ 對於任意 $z\in K$, $\zeta\in K_1$ 都成立。而 $\left|\dfrac{\partial\psi(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right|$ 顯然在 K_1 上有界, 故有 c_n' 使得

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z)\right|&\le c_n'\iint_{K_1}|f(\zeta)|\cdot|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|\\&\le c_n'\iint_{V}|f(\zeta)|\cdot|d\zeta\wedge d\overline{\zeta}|=c_n\cdot\|f\|_{L(V)}.\end{aligned}$$

這裡 c_n, c_n' 爲只依賴於 n 的常數, 這便完成我們對 (3.7) 的證明。

由定理 2.5, 我們立即得到 Cauchy - Goursat 定理之逆定理。

定理 2.7. (Morera **定理**) 若 $f(z)$ 在 Ω 上連續, 且沿 Ω 中任意一條可求長閉曲線的積分爲零, 則 $f(z)$ 在 Ω 上全純。

證明: 任取一點 $z_0 \in \Omega$, 由於在 Ω 上任一可求長閉曲線的積分爲零, 故

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \quad z \in \Omega,$$

不依賴於路徑的選擇, 且 $F'(z) = f(z)$, 於是 $F(z)$ 爲 Ω 上全純函數, 由定理 2.5, $F(z)$ 的二階導數, 即 $f(z)$ 的導數 $f'(z)$ 也是存在的, 故 $f(z)$ 在 Ω 上是全純函數, 定理因而證畢。

由定理 2.5, 我們還可以得到下面這個重要的結果。

定理 2.8. (Liouville **定理**) 若 $f(z)$ 在全平面 $\mathbb{C}$ 上全純且有界, 則 $f(z)$ 爲一常數函數。

證明: 若 $|f(z)| \leq M$ 對所有 $z \in \mathbb{C}$ 都成立, 則固定 $z_0 \in \mathbb{C}$, 作一圓盤 $D(z_0; R)$, 由 Cauchy 不等式, 我們得到

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

令 $R \to +\infty$, 得到 $f'(z_0) = 0$。由於 z_0 爲 $\mathbb{C}$ 上任意一點, 故 $f'(z) = 0$ 對任意 $z \in \mathbb{C}$ 都成立。因此, $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上爲常數。

Liouville 定理表明: 在整個複平面 $\mathbb{C}$ 上全純且有界的函數, 只有常數, 這個定理我們在以後還會作進一步的討論。在本節中, 我們最後來證明下面定理。

定理 2.9. (Riemann **定理**) 若 f 在去掉一點 z_0 的圓盤 $\widetilde{D}(z_0; r) = D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ 內全純, 且 f 在 $\widetilde{D}(z_0; r)$ 上有界, 則 f 可以解析延拓到 $D(z_0; r)$ 之上, 即存在 $D(z_0; r)$ 上定義的全純函數 F, 使得 $F|_{\widetilde{D}(z_0;r)} = f$。

證明: 我們不妨假設 $z_0 = 0$, 定義

$$G(z) = \begin{cases} z^2 f(z), & \text{當} \quad z \in \widetilde{D}(0; r) \\ 0, & \text{當} \quad z = 0, \end{cases}$$

則 $G(z)$ 在 $D(0; r)$ 上連續可導, 且滿足 Cauchy-Riemann 方程, 這是因爲

$$\lim_{z \to 0} \frac{G(z) - 0}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 f(z) - 0}{z} = \lim_{z \to 0} z f(z) = 0.$$

故 $\dfrac{dG(z)}{dz} = 0$, 而當 $z \neq 0$ 時,

$$G'(z) = z^2 f'(z) + 2z f(z).$$

顯然, $G'(z) \to 0$, 當 $z \to 0$, 由第一講的定理 2.1, $G(z)$ 是在 $D(0; r)$ 上的全純函數, 故 $G(z)$ 可以在 $z = 0$ 處展開成 Taylor 級數

$$G(z) = 0 + 0 \cdot z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{3.8}$$

此級數在 $D(0;r)$ 中一致收斂, 定義

$$F(z)=\frac{G(z)}{z^2}=a_2+a_3z+a_4z^2+\cdots \tag{3.9}$$

顯然, 級數 (3.8) 與 級數 (3.9) 有相同之收斂半徑, 這可由第一講 Abel 定理中的 (5.2) 式得到, 故 $F(z)$ 在 $D(0;r)$ 上全純, 且在 $\widetilde{D}(0;r)$ 中, $f(z)=F(z)$, 定理證畢。

2.4. 有關全純函數零點的一些結果

若 $f(z)$ 在區域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全純, 如果 $z_0\in\Omega$, 且 $f(z_0)=0$, 則稱 z_0 爲 $f(z)$ 的零點。若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 有級數展開

$$a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots, \quad a_m\neq 0$$

則稱 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 處有 m 重零點, 由 Cauchy 積分公式及 Cauchy 積分定理可以得到一系列有關零點的結果。

定理 2.10. (**代數基本定理**) 若 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 爲 n 次多項式, 則至少有一個 z_0, 使得 $p(z_0)=0$, z_0 稱爲方程式 $p(z)=0$ 的根。

證明: 如果本定理的結論不對, 則 $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上全純。由於當 $z\to\infty$ 時, $p(z)\to\infty$, 所以 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界, 由 Liouville 定理知道, $f(z)$ 爲常數, 即 $p(z)$ 爲常數, 得到矛盾, 定理因而證畢。

定理 2.11. 若 $f(z)$ 在區域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全純, 則 $f(z)$ 的零點的集合 $\{z\in\Omega: f(z)=0\}$ 在 Ω 上沒有聚集點 (accumulation point), 除非 $f(z)$ 在 Ω 上恆等於零。

證明: 假設上述定理不對, 若 $z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots$ 爲 $f(z)$ 在 Ω 上的零點, 且存在 $z_0\in\Omega$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z_0$。我們不妨假設 $z_0=0$, 由於 $f(z)$ 在 Ω 上全純且 $0\in\Omega$, 所以我們可以將 $f(z)$ 在 $z=0$ 展開成 Taylor 級數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$

由於數列 $\{z_n\}$, $n=1,2,\ldots$, 爲 $f(z)$ 的零點, 故 $f(z_n)=0$, 於是

$$0=\lim_{n\to\infty}f(z_n)=f(\lim_{n\to\infty}z_n)=f(0).$$

故得到 $a_0=0$, 因此

$$f(z)=a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$$

這就有 $a_1 = \dfrac{f(z)}{z} + O(z)$, 取 $z = z_n$, 我們得到

$$a_1 = \frac{f(z_n)}{z_n} + O(z_n) = O(z_n).$$

令 $n \to \infty$, 即得到 $a_1 = 0$。同樣方法可以得到 $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$, 即 Taylor 級數的所有的係數均爲零, 故 $f(z) = 0$, 因此, 若 $f(z)$ 不是在 Ω 上恆等於零的函數, 集合 $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ 在 Ω 上沒有聚集點, 定理因而證畢。

由定理 2.11 我們立即得到: 假設 $g_1(z)$, $g_2(z)$ 爲區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的兩個全純函數, E 爲 Ω 中一個有聚集點的集合, 其聚集點在 Ω 中。如果這個聚集點也在 E 上, 則 $g_1(z) = g_2(z)$, 則在 Ω 上我們也得到 $g_1(z) = g_2(z)$, 即全純函數在 Ω 上的值, 可以由聚集點在 Ω 內的點集合的值完全決定。例如: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, 當 z 爲實數時成立, 故 z 爲複數時也成立。同樣道理一些三角恆等式取實數值時成立, 即可導出在複數時也成立。

定理 2.12. (**幅角原理**) (Argument principle) 若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, $\gamma \subset \Omega$ 爲一條正定向簡單封閉曲線, 且在 Ω 中可連續地縮成一點, $f(z)$ 在 γ 上不爲零, 則 $f(z)$ 在 γ 內有有限個零點, 零點的個數 k (重數計算在內) 爲

$$k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

註解: 若記 $w = f(z)$, 則有

$$k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w}.$$

這裡 Γ 爲 γ 在 $w = f(z)$ 映射下的影像, 這方程式說明當 z 沿著 γ 的正方向轉動一圈時, $w = f(z)$ 在 Γ 上沿正方向繞原點轉動的總圈數, 恰好等於 f 在 γ 內的零點的個數, 所以這個定理被稱爲幅角原則。

幅角原理的證明: 這裡我們只證明 $k = 1$ 的情形, 其他的情形同理可證。

我們不妨假設 γ 爲一個正定向的圓, 且 $f(z)$ 在 $z = 0$ 處有單零點, 於是 $f(z)$ 在 $z = 0$ 處有 Taylor 級數的展開:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots .$$

於是 $f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots$, 因此

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)}&=\frac{a_1z+2a_2z+3a_3z^2+\cdots}{a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots}\\&=\frac{1}{z}\cdot\frac{a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots}{a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots}\\&=\frac{1}{z}\left(1+\frac{a_2z+2a_3z^2+\cdots}{a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots}\right)\\&=\frac{1}{z}+\frac{a_2+2a_3z^2+\cdots}{a_1+a_2z+\cdots}=\frac{1}{z}+h(z).\end{aligned}$$

由於 $f(z)$ 在 $z=0$ 處只有單零點, 故 $a_1\neq 0$, 所以 $h(z)$ 在 $z=0$ 的附近是全純的, 因此

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma h(z)dz=1.$$

這是因爲 $\oint_\gamma h(z)dz=0$。

定理 2.13. (Hurwitz **定理**) 若 $\{f_j\}$ 爲 $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ 上的全純函數序列, 在 Ω 內的緊緻集合上收斂到一個函數 f, 若所有的 f_j 在 Ω 上全不等於零, 則 f 或是恆不等於零或是恆等於零。

證明: 對於任一點 $z\in\Omega$, 在 Ω 中取一條簡單封閉曲線 γ, 且 z 在 γ 所包圍的區域內, 由於 f_j 在 Ω 上全純, 故由 Cauchy 積分公式

$$f_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f_j(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

由於 $\{f_j\}$ 在 Ω 內的緊緻集合一致收斂, 故

$$\lim_{j\to\infty}f_j(z)=\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f_j(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_r\lim_{j\to\infty}f_j(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

所以,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

因此, $f(z)$ 爲全純函數。同樣我們可以證明 $f_j'(z)$ 在 Ω 內的緊緻集合一致收斂到 $f'(z)$。

若 $f(z)\not\equiv 0$, 則由定理 2.11, $f(z)$ 的零點是離散的, 取 γ 不經過這些零點, 於是當 $j\to\infty$ 時,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f_j'(\zeta)}{f_J(\zeta)}d\zeta\to\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$

但由假設及幅角原理, 我們知道

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f_j'(\zeta)}{f_j(\zeta)}d\zeta=0.$$

因此, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \dfrac{f_j'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = 0$, 即 $f(z)$ 在 Ω 上沒有零點。

若 $f_j(z) = \dfrac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$, 則 $f_j(z) \to f(z) \equiv 0$ 在 Ω 上一致收斂, 這便說明了定理的另一個結論。

定理 2.14. (Rouché **定理**) 若 $f(z)$, $g(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, γ 爲 Ω 內可求長簡單封閉曲線且在 γ 上滿足

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \tag{4.1}$$

則 f, g 在 γ 內有相同的零點的個數。

證明: 由 (4.1) 知, 在 γ 上 $|f(z)| > 0$, 且 $g(z) \neq 0$, 假如在 γ 上存在一點 z_0 使得 $g(z_0) = 0$, 則我們得到 $|f(z_0)| < |f(z_0)|$, 這是不可能的! 令 N_1, N_2 爲 f, g 在 γ 內零點的數目, 則由幅角原理得到

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz, \qquad N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz.$$

於是得到

$$\begin{aligned} N_2 - N_1 &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z_0)}{f(z)}\right)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{f(z)g(z)}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{(g/f)'(z)}{(g/f)(z)}dz. \end{aligned}$$

令 $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$, 則 $N_2 - N_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \dfrac{F'(z)}{F(z)}dz$。

但 (4.1) 告訴我們 $|F(z) - 1| < 1$, $w = F(z)$ 將 γ 映爲 Γ, Γ 不經過原點且不包含原點, 這是因爲 Γ 在 $|w - 1| < 1$ 之內, 由 Cauchy 積分定理, 得到 $\int_\Gamma \dfrac{dw}{w} = 0$, 即 $N_1 = N_2$, 定理因而證畢。

在代數基本定理中我們己證明: 若 $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ 爲 n 次多項式, 則 $p(z)$ 至少有一個根, 即存在零點 z_0 使得 $p(z) = 0$。現在我們用 Rouché 定理, 立即可以證明: 若 $a_n \neq 0$, 則 $p(z)$ 有且只有 n 個零點, 即 $p(z) = 0$ 有且只有 n 個根, 這可以證明如下:

令 $g(z) = a_n z^n$, 則當 $|z| = R$ 足夠大時,

$$\begin{aligned} |p(z) - g(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0| < |g(z)| \\ &= |a_n||z|^n = |a_n|R^n \end{aligned}$$

成立, 故由 Rouché 定理, 在 $|z| < R$ 內, $p(z)$ 與 $g(z)$ 有相同的零點個數, 而 $a_n z^n$ 顯然有 n 個零點, 故 $p(z)$ 也是如此。

作爲 Rouché 定理的推論, 我們有

定理 2.15. 若 $f(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, $w_0 = f(z_0)$, $z_0 \in \Omega$, 若 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 重零點, 則對於充分小的 $r > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得對於 $D(w_0;\rho)$ 內每一個點 A, 函數 $f(z) - A$ 在 $D(z_0;r)$ 內恰有 m 個零點。

證明: z_0 是 $f(z)-f(z_0)$ 的 m 重零點, 故由定理 2.11 知, 存在 $r > 0$, 使得 $f(z)-f(z_0)$ 在 $\overline{D}(z_0;r) \subset \Omega$ 上, 除去 z_0 外, 沒有其他的零點, 而在 $|z-z_0| = r$ 上, $|f(z)-f(z_0)| \geq \rho$ $(\rho > 0)$, 於是在 $D(z_0;\rho)$ 內任意點 A, 當 $|z-z_0| = r$ 時, $|A - w_0| < |f(z) - f(z_0)|$ 成立, 此即

$$|f(z_0) - A| = |(f(z) - f(z_0)) - (f(z) - A)| < |f(z) - f(z_0)| \quad \text{成立。}$$

由 Rouché 定理, $f(z) - A$ 與 $f(z) - f(z_0)$ 在 $D(z_0;r)$ 上有相同的零點個數, 而 $f(z) - f(z_0)$ 在 $D(z_0;r)$ 上有 m 重零點, 故 $f(z) - A$ 在 $D(z_0;r)$ 上也有 m 個零點。定理的證明因而完畢。

2.5. 最大模原理, Schwarz 引理與全純自同構群

作爲 Cauchy 積分公式的另一重要推論是最大模原理, 這是一個十分有用的結果, 在敘述這個定理之前, 我們先證明全純函數的均值性質。

均值性質: 若 $f(z)$ 在 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, $z_0 \in \Omega$, 若 $r > 0$, 使得 $\overline{D}(z_0;r) \subset \Omega$, 則由 Cauchy 積分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

成立, $\partial D(z_0;r)$ 上的點 ζ 可以表示成 $\zeta = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 於是 Cauchy 積分公式成爲

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \qquad (5.1) \end{aligned}$$

這便是全純函數的均值性質, 這說明了 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 的值等於 $f(z)$ 在 $\partial D(z_0;r)$ 上的值的平均。在 (5.1) 的兩邊取實部與虛部, 於是得到: 調和函數也有均值性質。反過來, 我們也可

證明具有均值性質的連續函數一定是調和函數。這便告訴我們函數具有均值性質, 若且唯若函數是調和函數, 所以調和函數也可定義爲有均值性質的函數。

現在利用全純函數的均值性質來證明

定理 2.16. (**最大模原理**) (Maximum modulus principle) 若 $f(z)$ 在區域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 上全純, 如有點 $z_0 \in \Omega$ 使得 $|f(z_0)| \geq |f(z)|$, 對所有的 $z \in \Omega$ 都成立, 則 $f(z)$ 爲常數函數。

證明: 我們先乘以模爲 1 的常數, 使得 $M = f(z_0) \geq 0$, 令

$$U = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\},$$

則 $U \neq \varnothing$, 因爲我們已知 $z_0 \in U$。由於 f 爲 Ω 上的連續函數, 故 U 爲一個閉集合。現在來證明 U 也是一個開集合。假設 $w \in U$, 取 $r > 0$ 使得 $D(w, r) \subset \Omega$, 取 $r' > 0$ 使得 $r' < r$。由全純函數的均值性質

$$\begin{aligned} M = f(w) &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + r'e^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(w + r'e^{i\theta}) \right| d\theta \leq M. \end{aligned}$$

由於上式左, 右兩端相等, 故所有不等式中的等號成立, 即

$$f(w + re^{i\theta}) = |f(w + re^{i\theta})| = M.$$

對所有的 θ 及 $0 < r' < r$ 都成立, 於是

$$\{w + r'e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 < r' < r\} \subset U.$$

也就是說: 對 U 中任意一點 w, 一定存在一個開的小圓盤, 這個小圓盤中的任意一點都屬於 U, 故 U 爲一開集合。因此 U 是 Ω 中的非空, 即開又閉的集合。由於 Ω 是連通的, 故 U 只能是 Ω, 即 $U = \Omega$, 因此, $f(z) = f(z_0)$, $\forall z \in \Omega$, 定理因而證畢。

註解:

(1) 在證明最大模原理中我們用到了一個事實, 一個連通集合的非空部分集合, 如果是既開又閉, 則這個部分集合一定是集合自己; 這個結果非常有用, 讀者不妨自行證之。

(2) 作爲最大模原理的直接推論有: 若 $f(z)$ 在有界區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全純, 在 $\overline{\Omega}$ 上連續, 並且不是常數, 則 $|f(z)|$ 只能在 $\partial\Omega$ 上取最大值。

(3) 在最大模原理的證明中, 只用到了函數的均值性質, 所以最大模原理對調和函數也是成立的。

由最大模原理, 我們立即推導出下面的結果。

定理 2.17. (Schwarz **原理**) 若 $f(z)$ 爲將單位圓盤 $D=D(0;1)$ 映到 D 的全純函數, 且 $f(0)=0$, 則

$$|f(z)|\le|z| \quad \text{及} \quad |f'(0)|\le 1$$

成立。而 $|f(z)|=|z|$ 在 D 中一點 $z\neq 0$ 處成立, 或 $|f'(0)|=1$ 成立, 若且唯若 $f(z)=e^{i\alpha}z$, 這裡 $\alpha\in\mathbb{R}$。

證明: 令

$$G(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)}{z}, & \text{當} \quad z\neq 0\\ f'(0), & \text{當} \quad z=0,\end{cases}$$

則 $G(z)$ 在 D 上全純, 對函數 $G(z)$ 在 $\{z:|z|\le 1-\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ 上應用最大模原理, 得到

$$|G(z)|\le\frac{\max\limits_{|z|=1-\varepsilon}|f(z)|}{1-\varepsilon}<\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 即得 $|G(z)|\le 1$ 在 D 上成立。當 $z\neq 0$ 時, $|f(z)|\le|z|$ 成立, 而當 $z=0$ 時, $|G(0)|=|f'(0)|\le 1$.

若 $|f(z)|=|z|$ 在 D 中一點 $z\neq 0$ 處成立, 即 $|G(z)|=1$ 在 D 中一點 $z\neq 0$ 處成立, 由最大模原理, $|G(z)|=1$ 對所有 $z\in D$ 都成立, 故 $G(z)=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, 即 $f(z)=e^{i\alpha}z$, 同樣我們可以證明 $|f'(0)|=1$ 成立時, $f(z)=e^{i\alpha}z$, 定理因而證畢。

由 Schwarz 引理立即可以得到單位圓盤 D 的全純自同構群。假設 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 爲一區域, 我們定義 Ω 上的全純自同構群如下:

全純函數 $f(z)$ 在 Ω 上定義, 若 $f(z)$ 將 Ω 單值全純地映射到本身, 則稱 $f(z)$ 爲 Ω 的全純自同構。Ω 上所有全純自同構組成一個群, 這個群稱爲區域 Ω 的全純自同構群, 記作 $\mathrm{Aut}(\Omega)$。

現在我們來刻劃 $\mathrm{Aut}(D)$。

先來證明: 若 $a\in D$, 則 $\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\in\mathrm{Aut}(D)$.

顯然 φ_a 在 $\overline{D}$ 上全純, $\varphi_a(a)=0$, 且 $\varphi_a:\partial D\to\partial D$, 這是因爲對於 $|z|=1$, 有

$$|\varphi_a(z)|=\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=\left|\frac{1}{z}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|=\left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\right|=1.$$

所以 $\varphi_a(z)$ 將 D 的內部映爲 D 的內部。

再來證明 $\varphi_a(z)$ 在 D 上是單值的。

若有 $z_1, z_2 \in D$, 且

$$\frac{z_1 - a}{1 - \overline{a}z_1} = \frac{z_2 - a}{1 - \overline{a}z_2},$$

則 $(z_1 - a)(1 - \overline{a}z_2) = (z_2 - a)(1 - \overline{a}z_1)$, 此即 $(z_1 - z_2)(1 - |a|^2) = 0$。由於 $|a| < 1$, 故 $z_1 = z_2$, 這就證明了 $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(D)$.

令 $w = \varphi_a(z) = \dfrac{z - a}{1 - \overline{a}z}$, 於是 $w - \overline{a}zw = z - a$,

$$z = \frac{w + a}{1 + \overline{a}w} = \varphi_{-a}(w).$$

故有 $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$, 顯然這也屬於 $\mathrm{Aut}(D)$, 我們稱 φ_a 爲 Möbius 變換, 所有 Möbius 變換組成的群, 稱爲 Möbius 變換群, 這是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的一個子群。另外, 旋轉

$$w = \rho_\alpha(z) = e^{i\alpha}z, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

顯然也是屬於 $\mathrm{Aut}(D)$, 而所有旋轉所組成的群稱爲旋轉群, 這也是 $\mathrm{Aut}(D)$ 的一個子群。

定理 2.18. (**單位圓盤上的全純自同構群**) 若 $f \in \mathrm{Aut}(D)$, 則存在複數 a, $|a| < 1$ 及 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(z) = \varphi_a \circ \rho_\alpha(z).$$

換句話說, $\mathrm{Aut}(D)$ 中的元素都是由 Möbius 變換及旋轉之合成而成的。

證明: 若 $f(0) = b$, 令 $G = \varphi_b \circ f$, 則

$$G(0) = \varphi_b \circ f(0) = \varphi_b(b) = 0.$$

由 Schwarz 引理得知, $|G'(0)| \leq 1$, 同樣可對 G^{-1} 應用 Schwarz 引理得到

$$\left|\frac{1}{G'(0)}\right| = \left|(G^{-1})'(0)\right| \leq 1,$$

於是 $|G'(0)| = 1$, 這便得到 $G(z) = e^{i\alpha}z = \rho_\alpha(z)$, 即

$$\varphi_b \circ f = \rho_\alpha.$$

所以 $f = \varphi_{-b} \circ \rho_\alpha$, 取 $-b = a$, 即得到定理之結論。

由上面的定理可以導出下面重要的結果。

定理 2.19. (Schwarz - Pick **引理**) 若 f 是將 D 映入到 D 內的全純函數, 且將 $z_1, z_2 \in D$ 映爲 $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, 則

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - w_1\overline{w}_2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\overline{z}_2}\right| \tag{5.2}$$

及

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} \le \frac{|dz|}{1-|z|^2} \tag{5.3}$$

成立, 等號成立若且唯若 $f \in \mathrm{Aut}(D)$.

證明: 令 $\varphi(z)=\dfrac{z+z_1}{1+\overline{z}_1 z}$, $\psi(z)=\dfrac{z-w_1}{1-\overline{w}_1 z}$。
顯然, $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(D)$, 且

$$\psi\circ f\circ\varphi(0)=\psi\circ f(z_1)=\psi(w_1)=0.$$

故 $\psi\circ f\circ\varphi$ 滿足 Schwarz 引理的條件, 因此, 當 $z(\neq 0)\in D$ 時

$$|(\psi\circ f\circ\varphi)(z)|\le|z|$$

成立, 令 $z=\varphi^{-1}(z_2)$, 則有

$$|\psi\circ f(z_2)|\le|\varphi^{-1}(z_2)|$$

此即 $|\psi(w_2)|\le|\varphi^{-1}(z_2)|$, 這便是 (5.2)。

當 $z=0$ 時, 則由 Schwarz 引理, 就有

$$|(\psi\circ f\circ\varphi)'(0)|\le 1,$$

此即 $|\psi'(w_1)f'(z_1)\varphi'(0)|\le 1$. 但是

$$\varphi'(z)=\frac{1-z_1\overline{z}_1}{(1+\overline{z}_1 z)^2}, \qquad \varphi'(0)=1-|z_1|^2;$$
$$\psi'(z)=\frac{1-w_1\overline{w}_1}{(1-\overline{w}_1 z)^2}, \qquad \psi'(w_1)=\frac{1}{1-|w_1|^2}.$$

所以得到 $|f'(z_1)|\le\dfrac{1-|w_1|^2}{1-|z_1|^2}$, 此即 (5.3) 式。

由 Schwarz 引理, 等號成立若且唯若 $(\psi\circ f\circ\varphi)(z)=e^{i\alpha}z=\rho_\alpha(z)$, 故 $f=\psi^{-1}\circ\rho_\alpha\circ\varphi^{-1}\in\mathrm{Aut}(D)$。定理因而證畢。

註解: 事實上在 D 上可以定義度量 (一般稱爲雙曲度量 hyperbolic metric 或 Poincaré metric),

$$d_z s^2=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$$

則 (5.3) 就是 $d_w s^2\le d_z s^2$, 所以定理 2.19也可敍述爲:

如果 $w=f(z)$ 爲 D 上全純函數, 將 D 映入 D 內, 則其 Poincaré 度量是不增的, f 保持 Poincaré 度量若且唯若 $f\in \mathrm{Aut}(D)$, 於是定理 2.19給出了 Schwarz 引理的明確微分幾何的意義。

—本文作者龔昇任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—