數學傳播 34卷3期, pp. 39-48

Hua 引理及其應用

林開亮

1. Hua 引理的歷史

在 1949年發表的短文 [5] 中, 華羅庚解決了古典射影幾何的一個難題。在證明主要結果的過程中, 華先生用一個巧妙的推理得到一個有趣的命題, 這個命題立即被 Jacobson 和 Rickart 在次年聯合發表的文章 [8] 中加以引用並表述成以下形式:

Hua **引理**: 設 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 是兩個具有分配律的代數系(algebra) (未必可結合的環, non-associative ring), J 是$\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的一個保持加法的映射, 使得對任意的 $a, b \in \mathfrak{A}$, 有 $(ab)^J = a^J b^J$ 或 $(ab)^J = b^J a^J$, 則 J 是一個同態 (homomorphism) 或反同態 (anti-homomorphism) 。

華羅庚在 [5] 中借助上述引理證明了下述結果:

定理 1: 設 σ 是除環 (division ring) K 到自身的一個滿射 (surjective map), 滿足

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b), \qquad \sigma(aba) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a), \qquad \sigma(1) = 1.$$

則 σ 或者是一個自同構 (automorphism) 或者是一個反自同構 (anti-automorphism)。

1951年, Jacobson 的 Lectures in Abstract Algebra 第一卷 [9] 出版, 將華羅庚的上述引理收入到環論一章的習題中。

1953年, E. Artin 在對 Bourbaki 的代數學書評 [1] 中建議在新一版中收入華羅庚的下述漂亮定理到體論部分。

定理 2: 設 σ 是除環 D 到 D' 之間的一個映射, 滿足 $\sigma(a+b) = \sigma(a)+\sigma(b)$, $\sigma(1) = 1'$, 而且對 $a \neq 0$ 有 $\sigma(a) \neq 0$ 且 $\sigma(a)^{-1} = \sigma(a^{-1})$, 則 σ 是一個同態或反同態。

Artin 緊接著指出了這個定理與華羅庚的結果之間的聯繫, 即這裏有一個 "神奇的" (amazing) 非交換恒等式[1]

$$a-(a^{-1}+(b^{-1}-a)^{-1})^{-1}=aba$$

上述恒等式一般稱爲 Hua 恒等式, 它甚至在 Jordan 代數中也成立。應該公正地指出, 上述恒等式以及定理 2是 Artin 首先指出的。就筆者所知, 華羅庚已發表的論文中並沒有出現這個恒等式 (雖然他擅長發現並應用一些恒等式, 如他對 Cartan-Brauer-Hua 定理以及華不等式的證明)。

未及 Bourbaki 代數學出版第二版, Artin 的幾何代數 [2], 1957年問世, 他在這本書中詳細地論證了上述定理並且給出了它在射影幾何上的應用。此前華羅庚在 1950年創刊的《中國科學》上重新 (略有推廣) 發表了 [5] 中的結果並由此給出了所謂射影幾何基本定理的詳細證明。

定理 3: 凡廣義射影變換將調和點列變到調和點列。反之, 凡使得調和點列仍變爲調和點列的變換必定是某個廣義射影變換。

Artin 在他的這本專著中證明了一個形式略微不同 (可視爲上述定理的仿射形式) 的結果, 即下述

定理 4: 一條直線 K 到其自身的保持 (有限) 調和點列的雙射 σ 具有下面的形式

$$\sigma(x)=ax^{\tau}+b$$

這裏 $a\neq 0$ 且 τ 是 K 的一個自同構或反自同構。

在 $K=\mathbb{R}$ 爲實數域的情形, 這個結果曾爲德國數學家 von Staudt (1798-1867) 得到, 於是這個幾何定理又稱爲 von Staudt-Hua 定理。在 $K=\mathbb{C}$ 的情形, 華羅庚對此定理是極爲瞭解的。把這個定理從複數域推廣到各種類型的複矩陣空間是華羅庚 1940年代研究矩陣幾何的主要動機。

1974年 Jacobson 的 Basic Algebra 第一卷 [10] 出版, 採納了 Artin 的建議將上述定理 2收入到環論一章的習題中。1977年, P. M. Cohn 的 Algebra 第二卷 [4] 出版, 由於

1. Artin 的這個恒等式可以從 Jacobson 的一個有意思的環論結果得到。Jacobson 注意到, 在一個環中, 如果 $1-ba$ 可逆, 則 $1-ab$ 可逆, 事實上有

$$(1-ab)^{-1}=1+a(1-ba)^{-1}b.$$

特別的, 在一個除環中, 若 $a\neq b^{-1}$, 則上式成立。在上式兩邊同時左乘 a^{-1} 得到

$$a^{-1}(1-ab)^{-1}=a^{-1}+(1-ba)^{-1}b$$

這就是

$$(a-aba)^{-1}=a^{-1}+(b^{-1}-a)^{-1}$$

兩邊取逆再移項就得到神奇的恒等式。

作者對除環情有獨鐘, 書中專闢一節討論了華羅庚的上述定理 2以及除環中另一個有名的結果 Cartan-Brauer-Hua 定理。最可喜的是, Cohn 這裏 (p.252) 給出的 Hua 引理的證明完全歸結爲一個簡單的群論事實— 一個群不能寫成兩個眞子群的並置, 使得華羅庚原先的計算論證變得好懂多了。這是一個以思想代替計算的典型例子。我們下面將應用相同的手法解決線性代數和量子力學基礎中的兩個問題。

2. 線性代數中的 Hua 引理及其應用

我們的目標是證明下述

定理 5: 設 B 是域 F 上向量空間 V 上的雙線性型, 使得由 $B(x,y)=0$ 定義的正交關係是對稱的, 即 $B(x,y)=0 \Leftrightarrow B(y,x)=0$, 則 B 是對稱的或者反對稱的。

這個結果首先出現在 Artin 的專著 [2] 中, 後來 Jacobson 又作爲定理收錄在 [10] 中, 他們的證明是計算性質的。通過與環論中的 Hua 引理比較, 作者找到了一個更簡單的證明。只要我們注意到下述看似平凡的結論, 也就是線性代數中的 Hua 引理:

引理 1: 設 B 是域 F 上向量空間 V 上的雙線性型, 使得對任意的 $x,y\in V$ 或者有 $B(x,y)=B(y,x)$ 或者有 $B(x,y)=-B(y,x)$, 則 B 是對稱的或反對稱的。

證明: 對固定的 $x\in V$, 使得 $B(x,y)=B(y,x)$ 成立的 $y\in V$ 構成一個子空間U_x, 使得 $B(x,y)=-B(y,x)$ 成立的 $y\in V$ 也構成一個子空間 W_x。由條件有 $V=U_x\cup W_x$。由於 V 不能寫成兩個眞子空間的並, 於是 $U_x=V$ 或 $W_x=V$。現在變動 x, 令 $V_1=\{x\in V|U_x=V\}$, $V_2=\{x\in V|W_x=V\}$, 再用一次上述事實, 得到 $V_1=V$ 或 $V_2=V$。按照 V_1, V_2 的定義, 這分別對應 $B(x,y)=B(y,x)$ 一致成立或 $B(x,y)=-B(y,x)$ 一致成立, 即 B 對稱或反對稱。

定理 5**的證明**: 對任意的 $x,y\in V$, 令

$$z=B(x,x)y-B(y,x)x$$

則

$$B(z,x)=B(x,x)B(y,x)-B(y,x)B(x,x)=0$$

從而

$$B(x,z)=B(x,x)B(x,y)-B(y,x)B(x,x)=0$$

也就是

$$B(x,x)(B(x,y)-B(y,x))=0 \tag{1}$$

在上式中互換 x, y 有

$$B(y,y)(B(x,y)-B(y,x))=0 \tag{2}$$

又在 (1) 中用 $x+y$ 代替 x, 有

$$B(x+y,x+y)(B(x,y)-B(y,x))=0 \tag{3}$$

又由極化恒等式

$$B(x,y)+B(y,x)=B(x+y,x+y)-B(x,x)-B(y,y)$$

聯合 (1), (2), (3) 就有

$$(B(x,y)+B(y,x))(B(x,y)-B(y,x))=0 \tag{4}$$

從而 $B(x,y)=B(y,x)$ 或 $B(x,y)=-B(y,x)$, 由引理 1 即得結論。

我們這裏對定理 5的表述與 Artin [2] 中表述略有差異, 那裏的結論是 (在相同條件下) B 是對稱的或交錯的。所謂交錯, 就是 $B(x,x)=0$ 對一切 $x\in V$。但是容易看到這個結論與我們的結論沒有區別: 當特徵不爲 2時, 反對稱的一定是交錯的 $B(x,x)=-B(x,x)=0$, 而當特徵是 2時, 反對稱型與對稱型一致。按照這個結果, 我們只限於研究對稱的與交錯的雙線性型, 它們對應的幾何通常稱爲正交幾何與辛幾何。

讀者或許要問: 令 $z=B(x,x)y-B(y,x)x$ 這一步是如何來的? 任何一個熟悉 Schmidt 正交化過程的人都應該能想到這一點。即爲了利用正交的假定, 我們自然應該想到將一個向量沿著另一個向量做正交投影。用同樣的辦法, 我們可以證明線性代數中的一個基本結果, 在歐氏空間中, 保持正交關係不變的線性變換一定是某個正交變換的常數倍[2]。在某種程度上, 下面將要敍述的 Wigner 定理就是這個結果在酉空間上的類似。

其實, 引理 1的證明只用到 V 的加法群結構 (甚至群的交換性也是不需要的), 因此定理 5可以直接推廣到任意交換整環上的雙線性型, 但對除環上的半線性型不成立 (見 Artin [2])。

3. Hua 引理在量子力學中的應用

利用類似的推導, 我們可以證明下述 Hua-Wigner 引理:

引理 2: 設 T 是酉空間 V 到自身的一個變換, 使得對任意的 $x,y\in V$ 有 $|(Tx,Ty)|=|(x,y)|$, 且 $\mathrm{Re}(Tx,Ty)=\mathrm{Re}(x,y)$, 則 T 保持加性, 即對任意的 $x,y\in V$ 有 $T(x+y)=$

2. 一個更簡單的證明是利用平形四邊形爲棱形當且僅當對角線互相垂直的這一幾何事實的代數表達 $(x+y)\perp(x-y)\iff(x,x)=(y,y)$ 構造兩個互相正交的向量 $\|y\|x+\|x\|y$ 與 $\|y\|x-\|x\|y$。

$Tx+Ty$。事實上, T 是酉變換或反酉變換, 也就是說, T 是保持內積並且是線性的, 或者使內積共軛並且是共軛線性的。

證明略去, 基本思路如引理 1。T 是保持加性的提示: 要證 $z=T(x+y)-Tx-Ty=0$。在內積空間中爲證明一個向量 v 爲 0, 只要證 $(v,v)=0$, 再注意到 $\mathrm{Re}(v,v)=(v,v)$ 與 T 保實部的條件[3]。

利用引理 2, 可以證明量子力學中關於對稱的基本定理 Wigner 定理。爲敍述這個定理, 我們先給出量子力學的一些基本數學框架。

量子力學中, 一個物理系統的狀態由某個酉空間 (通常假定是一個可分的 Hilbert 空間) 的一條直線 $\langle v\rangle$ 給出, 更確切地說, 其相空間是射影空間 $\mathbb{P}(V):=V-\{0\}/\mathbb{C}^*$, 其元素 (點) 是非零向量的等價類, 兩個非零向量 x, y 等價當且僅當 x, y 線性相關, 我們把 x 所在的等價類記爲 $[x]$。於是關於物理系統的任何有意義的斷言從數學上講都是關於射影空間的點的。特別的, 兩個狀態之間的躍遷機率由內積在對應直線上誘導給出 (下面有確切定義)。一個基本的問題是, 決定相空間內這種保持躍遷機率的變換。Wigner 1930年代解決了這個問題, 得到結論說這類變換只能是由酉空間上的酉變換或反酉變換誘導的射影變換, 這個結果就告訴我們酉變換在量子力學中的重要性, 特別地, 它肯定了酉表示在量子力學中的重要性, Sternberg [13] 有附錄專門討論這個定理。Wigner 原先的證明有含糊的地方, 其實那裏缺少的正是一個類似於 Hua-Wigner 引理之類的結果, (見 A. Messian [12] 或 Weinberg [14] 的討論, 並與 Wigner [15] 比較), 1960年代起許多數學物理學家先後重新論證並推廣了這個結果, 其中以 Bargmann 的文章 [3] 最具可讀性, 這篇文章在極爲初等的水準上填補了 Wigner 原先的證明中的漏洞。

爲敍述定理, 我們需要指出一些基本的事實。首先, V 上的線性變換或共軛線性變換 U 可以誘導出 $\mathbb{P}(V)$ 上的一個變換 $[U]$, 原因是這兩類變換保持線性相關性。用運算式把這個誘導變換 $[U]$ 寫出來就是

$$[U]:[x]\mapsto[Ux]$$

其次, V 上的酉內積在 $\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(V)$ 上可以誘導出一個函數, 即

$$([x],[y])\mapsto\left|\frac{(x,y)^2}{(x,x)(y,y)}\right|$$

它代表著躍遷機率[4], 由 Cauchy 不等式, 它介於 0和 1之間。

3. 有另一個稍微不同的證明, 基於 Hermite 型的極化恒等式。

4. 在幾何上可以看成$\mathbb{P}(V)$上的一個度量, 這一點可以有更準確的說明, 例如參考 C. A. Faure and A. Frölicher 著 *Modern Projective Geometry*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

爲便於討論, 我們引進一個定義, 向量空間 V 到自身的兩個映射 U_1, U_2 稱爲射影等價的, 如果它們能在 $\mathbb{P}(V)$ 上誘導出相同的射影變換。

定理 6 (**Wigner 定理**): 設 T 是射影酉空間 $\mathbb{P}(V)$ 到自身的一個映射, 且保持躍遷機率不變, 則 T 是 V 上某個酉變換或反酉變換 U 誘導的, 即 $T=[U]$ 對某個酉變換或反酉變換。

說明: 通常酉變換是指酉空間中滿足 $U^*U=UU^*=I$ 的線性變換。這裏我們簡單地稱 V 上的保持酉內積的線性變換爲酉變換, 而反酉變換是指 V 到自身的一個滿足以下條件的映射 U:

$$U(x+y)=Ux+Uy, \qquad U(\lambda x)=\bar{\lambda}Ux, \qquad (Ux,Uy)=\overline{(x,y)}$$

Wigner 定理的證明: 對每個一維子空間 $\langle v\rangle$, 選取其中一個單位向量 v 並指定一個單位向量 $v'\in T\langle v\rangle$ 與之對應, 對其他的單位向量 $w\in\langle v\rangle$, 令 $Tw=\lambda v'$, 其中 λ 是 w 關於 v 的 Fourier 係數, 事實上 $\lambda=\dfrac{(w,v)}{(v,v)}$。我們以公式 $Tx=\|x\|T\Big(\dfrac{x}{\|x\|}\Big)$ 將 T 擴張到整個空間 V 上去 (令 $T0=0$)。

現在立即可以驗證這個擴充了的變換 (仍記爲 T) 保持任意兩個向量的內積的模長不變。由此可以推出 T 保持向量之間的線性相關性, 特別地, 有下面的結果: 若非零向量 x, y 互相正交, 則存在模長爲 1的兩個複數 $\alpha_{x,y}$, $\beta_{x,y}$ 使得 $T(x+y)=\alpha_{x,y}Tx+\beta_{x,y}Ty$。爲看出這一點, 首先注意到, 當 $x\perp y$ 時 $Tx\perp Ty$。我們知道[5], 爲證明某向量 z 在兩個單位正交向量 $\dfrac{Tx}{\|Tx\|}$, $\dfrac{Ty}{\|Ty\|}$ 生成的子空間上, 只需要驗證 Parseval 等式

$$\|z\|^2=\left\|\Big(z,\frac{Tx}{\|Tx\|}\Big)\right\|^2+\left\|\Big(z,\frac{Ty}{\|Ty\|}\Big)\right\|^2$$

成立。特別地, 可以驗證這個等式對 $z=T(x+y)$成立。而且可以算出 $T(x+y)$ 關於 Tx, Ty 的 Fourier 係數分別是

$$\alpha_{x,y}=\frac{(T(x+y),Tx)}{\|Tx\|^2}, \qquad \beta_{x,y}=\frac{(T(x+y),Ty)}{\|Ty\|^2} \tag{5}$$

由此易見它們的模長是 1。

下面從這條性質出發構造一個與 T 射影等價的加性變換 U。思路是這樣的, 由於 T 的上述性質依賴于兩個向量正交的條件, 我們先固定一個向量 x_0 並考慮其正交補 $V_0=\langle x_0\rangle^{\perp}$。在 V_0 上構造出 U 之後再將它延拓到整個空間 V, 因此不妨假定 V 的維數 $\dim V\geq 2$。

5. 例如, 參見 Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, §64, Theorem 1。

假定 $\lambda : V \mapsto \mathbb{C}$ 是一個使得由 $U(x) = \lambda(x)T(x)$ 定義的變換在 V 上是加性的。對某固定的單位向量 x_0, 考慮 $y \in V_0 = \langle x_0 \rangle^{\perp}$, 則由前面的結果有

$$U(x_0 + y) = \lambda(x_0 + y)T(x_0 + y) = \lambda(x_0 + y)(\alpha_{x_0,y}Tx_0 + \beta_{x_0,y}Ty) \tag{6}$$

因爲 U 是加性的, 所以

$$U(x_0 + y) = Ux_0 + Uy = \lambda(x_0)Tx_0 + \lambda(y)Ty \tag{7}$$

比較 (6) 、(7) 兩式的右邊就有

$$\lambda(x_0 + y) = \frac{\lambda(x_0)}{\alpha_{x_0,y}}, \qquad \lambda(y) = \frac{\lambda(x_0)}{\alpha_{x_0,y}}\beta_{x_0,y} \tag{8}$$

這就是說 λ 在 V_0 和 V_0 關於 x_0 的平移空間 $\{x_0\} + V_0$ 的值由 $\lambda(x_0)$ 完全確定。

下面我們取定 $\lambda(x_0) = 1$ 並用 (7), (8) 定義 U 在 V_0 以及 $\{x_0\} + V_0$ 上的作用, 那麼容易看到 U 在已定義的集合上與 T 射影等價 (由公式 (5) 可見, $\alpha_{x_0,y}$, $\beta_{x_0,y}$ 模長爲 1)。由 Hua-Wigner 引理, 爲證明 U 在 V_0 上是加性的, 只要證明 $\mathrm{Re}(Ux, Uy) = \mathrm{Re}(x, y)$。這一點已經由 Bargmann [3] 給出了精彩的證明, 我們照搬過來。注意到 U 在定義域上滿足以下帶限制的加性條件, 即對任意的 $y \in V_0$ 有 $U(x_0 + y) = Ux_0 + Uy$。於是對任意的 $x, y \in V_0$ 有

$$\|(U(x_0 + x), U(x_0 + y))\| = \|(x_0 + x, x_0 + y)\|$$

也就是

$$\|1 + (Ux, Uy)\| = \|1 + (x, y)\|$$

這就是

$$\mathrm{Re}(Ux, Uy) = \mathrm{Re}(x, y)$$

由 Hua-Wigner 引理, U 在 V_0 上是一個酉變換或反酉變換。

由於 $V = \langle x_0 \rangle \perp V_0$, 很明顯有唯一的方式將 U 線性地或共軛線性地延拓到 V: 對任意的 $x \in V$, 寫 $x = \gamma x_0 + y$, 並按照 U 在 V_0 上是酉變換還是反酉變換, 分別令$Ux = \gamma Ux_0 + Uy$ 或 $Ux = \overline{\gamma}Ux_0 + Uy$。容易驗證, 如此得到的 U 在整個 V 上與 T 射影等價, 而且在整個空間上都是加性的。再一次利用 Hua-Wigner 引理, 知 U 是 V 上的酉變換或反酉變換。證畢。

上述證明主要參考了 Bargmann 的文章, 他在文章中還把 Wigner 定理推廣到四元數除環 $\mathbb{H}$ 上的 Hermite 空間上去。引理 2曾出現在 Sharma 和 Almeida 1990年發表的同一主

題的論文 [13] 中, 他們的證明是計算性質的, 大多數物理學家給出的證明也都是計算性質的, 作者在分析 Bargmann 的論文時通過類比華羅庚引理獨立地得到了這個引理。

文獻 [11] 將 Wigner 定理與經典的射影幾何的基本定理[6] ($\dim V \geq 3$) 機械地聯繫起來, 是生搬硬套的一個代表。正如我們上面看到的, Wigner 定理其實與一維射影幾何的基本定理 – von Staudt-Hua 定理的關聯更緊密[7]。

小結: 量子力學中的 Wigner 定理相當於一維射影幾何的 von-Staudt-Hua 定理; Hua-Wigner 引理相當於 Hua 同態反同態引理。

B. Simon [14] 用 Wigner 定理證明了其他兩個類似的定理 (p.330 定理 2.2與 2.3), 筆者期望, 可用 Hua-Wigner 引理的證明思想簡化那裏給出的證明。

最後的評述: 據說, Dieudonné 習慣說:「數學家希望因爲他們最難的定理而被人們記住, 但是大多數時候, 正是他們最簡單的結果在後人中流傳。」作者期望, 華羅庚先生的名字至少能因爲這個漂亮的引理特別是它的思想及其最簡單的應用而被人們記住。

據華羅庚先生的弟子徐利治先生說, 華羅庚將研究成果按照被引用的層次和程度的不同分爲三個等級: 在綜述性或介紹性文章中被引用是一般引用, 第三等; 在學術專著中被引用並且具體結果被錄出是第二等; 作爲正文被寫進教科書是最高級的引用, 是第一等。今天筆者在這裏將華先生的這個小結果介紹給讀者是一般引用, 鑒於這個思想方法的簡單性和美學價值, 筆者期望, 在不多久的明天, 這些內容可以寫進本科生線性代數和量子力學的教材中。我相信, 華先生與 Wigner 先生一定會含笑九泉的。

参考文獻

1. E. Artin, *Review of Bourbaki's Algebra*, Bull. A.M.S. **59**, 474-479, 1953.
2. E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, New York, 1957.
3. V. Bargmann, *Note on Wigner's theorem on symmetry operations*, J. Math, Phys. **5**, 862-868, 1964.
4. P. M. Cohn, *Algebra Vol.* 2, London, Wiley, 251-253, 1977.
5. Look-Keng Hua, *On the automorphisms of a sfield*, Proc. Nat. Acad. U.S.A. **35**, 386-389, 1949.
6. 華羅庚, 環之准同構及對射影幾何的一應用, 中國科學, **1**, 1-6, 1950。
7. 華羅庚, 萬哲先, 《典型群》, 上海, 上海科技出版社, 1963。
8. N. Jacobson and C. E. Rickart, *Jordan homomorphisms of rings*, Trans. A.M.S. **69**, 479-502, 1950.

6. 例如, 見 Artin [2]。
7. 四元數體 $\mathbb{H}$ 上的 Wigner 定理與經典的射影幾何的基本定理的聯繫更爲緊密一些。而這些結果其實已經蘊含在 Dieudonné 的 *La Géométie des Groupes Classiques* 一書以及註脚 3中提到的文獻。

9. N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. 1, v. Nostrand, Princeton, 1951.
10. N. Jacobson, *Basic Algebra*, vol. 1, Freeman, San Francisco, 1974.
11. J. S. Lomont and P. Mendelson, *The Wigner untiarity-antiuntiarity theorem*, Ann. Math. **78**, 548-559, 1963.
12. A. Messian, 《量子力學》(第二卷), 陳學俊, 余加莉譯, 北京, 科學出版社, 1986。
13. C. S. Sharma and D. F. Almeida, *A direct proof of Wigner's theorem on maps which preserve transition probabilities between pure states of quantum systems*, Ann. Phys, **197**, 300-309, 1990.
14. B. Simon, *Quantum dynamics: from autmorphim to Hamiltonian*, 327-349 in Studies in Mathematical Physics, Essays in Honor of Valentine Bargmann, edited by E. H. Lieb, B. Simon, and A. S. Wightman, Princeton University, 1976.
15. S. Sternberg, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1994.
16. V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1985.
17. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, London, Cambridge University Press,1995.
18. E. P. Wigner, *Group Theory and its Applications to Quantum Mechaics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959.

—本文作者爲中國大陸首都師範大學研究生—

以下摘自審稿意見, 經徵得審稿人同意後提供讀者做進一步的參考

(1) It would be nice to explain the motivation of considering semi-automorphisms, i.e. additive maps satisfying $(aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma$.

The story dated back to G. Ancochea's paper (Journal für Math. 184 (1942), 192-198). Ancochea was a Spanish mathematician. In this paper, he generalized von Staudt's Theorem : cross ratio and automorphisms of the projective line defined over a division ring D. He succeeded in showing that, if D is the real quaternion algebra, then an additive morphism $\sigma : D \to D$ satisfying $\sigma(ab)+\sigma(ba) = \sigma(a)\sigma(b)+\sigma(b)\sigma(a)$ is either an automorphism or an anti-automorphism.

In a subsequent paper, Ancochea was able to generalize the above result to any central division algebra D (i.e. finite-dimensional over its center) if $char\, D \neq 2$ (Ann. Math. 48(1947), 192-198). Actually he proved more; his result was valid for any semi-simple finite-dimensional K-algebra A so long as $1/2 \in K$.

Then came Irving Kaplansky. Kaplansky realized that, if D is a central division algebra and $1/2 \in D$, the additive morphism satisfying $\sigma(ab)+\sigma(ba) = \sigma(a)\sigma(b)+\sigma(b)\sigma(a)$ is equivalent to that satisfying $\sigma(aba) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)$ (Duke Math. J. 14(1947), 521-527). However, if $char\, D = 2$, then the assumption $\sigma(aba) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)$ is stronger. Using this definition of semi-automorphisms ($\sigma(aba) = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)$), Kaplansky gave a generalization of Ancochea's Theorem when D is a central division algebra.

Hua's paper (Proc. National Acad. Sci. 35(1949) 386-389) provided an elegant new proof. It instilled three new ingredients, (i) his proof was valid for any division ring D, (ii) implicit in the proof of Theorem 1 of his paper was Hua's Lemma discussed in the paper under review, (iii) Theorem 3 of Hua's paper was announced without proof; this theorem related the question to the geometry of matrices. The proof of Theorem 3 was provided in Hua's paper (Acta. Math. Sinica 1 (1951), 44-51).

(2) We should point out that the generalization of von Staudt's Theorem didn't originate solely from Ancochea's papers. In fact, early in 1945 Hua himself embarked on the study of geometries of matrices and generalization of von Staudt's Theorem (Trans. Amer. Math. Soc. 57(1945), 441-481).

On the other hand, it is not clear what was the driving force which pushed Hua to study geometries of matrices. Was it Siegel's paper (Amer. J. Soc. 65(1943), 1-86)? Or, did Hua study it on his own? It is peculiar that Siegel's name was mentioned in Hua's paper only till 1947 (Trans. Amer. Math. Soc. 61(1947), 229-255).

(3) Hua's Lemina was stated explicitly in the paper of Jacobson and Rickart (Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950), 479-502; Lemma 1). The fact that Hua's Lemma was valid even for non-associative ring was emphasized by Jacobson and Rickart. A short proof of this lemma was given, which was different from Hua's proof.

Ancochea's Theorem on semi-automorphisms was interpreted in term of Jordan algebra automorphisms by Jacobson.

Let A be an associative ring. Define a Jordan structure A^+ associated with A: the additive structure of A^+ is the same as that of A, while the Jordan product of A^+ is defined as $a * b = ab + ba$ where ab and ba are the usual products in A (in case $char\, A = 2$, we may use Kaplansky's aba-trick). Jacobson recast Ancochea's Theorem as follows : If A and B are associative algebras, then any Jordan isomorphism from A^+ onto B^+ arises from an isomorphism from A to B or B^{opp} (under suitable assumptions) (see, Jacobson Amer. J. Math. 70(1948), 317-326, Theorem 2, page 442; Florie Jacobson and Jacobson, Trans. Amer. Math. Soc. 65(1949), 141-169, Theorem 9, page 165).

In these two papers of Jacobson, the papers of Ancochea and Kaplansky were cited, but not Hua's paper because it hadn't appeared.

In the paper of Jacobson and Rickart (Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950), 479-502), Hua's paper was cited and it was stated explicitly that Hua's Theorem implied that a Jordan automorphism of any divison ring (no restriction of the division ring) is either an automorphism or an anti-automorphism.

But Jacobson and Rickart went one step further. They showed that, a Jordan homomorphism from A^+ to B^+ arose from an homomorphism from A to B or B^{opp} where A, B were associative rings and B was an integral domain. Similar generalizations of the above theorem are pursued by Jacobson and other people; but it is out of interest to this report (see, for example, Jacobson, Structure and representations of Jordan algebras, AMS Colloq. Publ. vol. 39, 1968).