數學傳播 34卷3期, pp. 13-33

學校幾何課程的重整——為何教和如何教演繹幾何?

張家麟 · 黃毅英 · 林智中

引言

幾何既有悠久的歷史, 亦是數學中重要的分支。傳統上, 幾何教學者肩負著獨特的教學任務。經過半世紀的轉折後, 演繹幾何及培養幾何論證能力的教學在不同地區重新得到重視 (參閱 De Villiers, 2003; Heinze et al, 2008)。香港在2000年提出要注重從不同角度去學習幾何 (香港課程發展議會, 1999), 到2009年, 香港推行新高中數學課程, 演繹幾何得到了進一步的強調 (香港課程發展議會及香港考試及評核局, 2007), 然而一些學生與教師反映, 此中的學與教均有不少不順暢的地方。事實上, 這絕對不是一個僅屬於香港的問題, 取與香港鄰近、幾何課程相近的台灣爲例, 研究指出, 在學過幾何證明單元之後, 僅約四分之一的初中三年級 (國三) 學生能建構出考試中可以得滿分的證明 (Lin, Cheng, & linfl team, 2003), 由此可知, 幾何論證涉及許多複雜的學習因素, 這當然涉及複雜的課程實施 (包括教師相關知識等), 但在此之前, 課程設計與鋪排本身也是極須探討的。在提出我們觀點之前, 可先回顧香港數學課程幾何部分的發展和今天的狀況。

幾何教學沿革

「打倒歐家店」

在1960年新數學運動以前, 在香港與不少其他地區, 數學是以教授算術、代數、幾何、三角等幾門知識爲主 (鄧國俊等, 2006)。幾何基本上就是學習傳統的歐氏幾何系統。隨著新數學運動的「火紅年代」冒起, 提倡要盡早引入一些更貼近時代發展的數學結構, 以及這些結構的相關嚴謹概念, 如近世代數等。香港的不少學校也深受影響, 當時在教授新數學的學校裏, 以較流行半群學社的教科書而言, 中一學的是邏輯、集合與群, 中二學關係與映射。當然中間亦不乏幾何基本概念、對稱圖形等課題, 而平面演繹幾何的學習, 則在中三、學過了幾何變換、坐標幾何

後才學的 (School Mathematics Monoid, 1965a, 1965b, 1966, 1968a, 1968b, 1969)[1]。這時教的與學的「新數內容」究竟有多明白、或多不明白, 就不得而知了, 反正都是新鮮事物, 加上豐富的活動 (如摺紙, 把正方體切成三個角錐體等) 也足夠令教師與學生「樂在其中」了。反而要等學生在中三才學習演繹幾何, 就好像有「費時失事」之感, 因爲對一些幾何性質作嚴格推導時, 學生在低年班已利用各種學習活動認識過了 (黃毅英, 黃家樂, 2001)。

探討當時歷史, 新數學運動的其中一個目標是期望在最快速度把學生帶到數學的前沿, 而正如現今的口號一樣, 要刪除課程中之「繁、難、多、舊」, 平面幾何恐怕被認定爲「難」與「舊」一類。當然要引入新課題, 包括數學結構 (受布爾巴基 Bourbaki 學派的影響), 統計概率等新課題, 也無可避免地有取就要有捨。綜合當時一些人士的想法, 學習幾何的主要作用可能有兩個。(一), 認識和運用一些幾何規律; (二), 作邏輯推理的訓練。當時的人會覺得, 對於 (一), 學習坐標幾何會更有效。而對於第二點, 他們會認爲不如學符號邏輯更爲直接 (黃毅英, 黃家樂, 2001, 頁32)。然而, 對幾何學習有深刻體會的人卻會指出, 學習幾何最可貴的是經歷 (一) 與 (二) 的有機結合, 它讓學習者把「思維中的幾何圖像」展現於紙上, 作爲啓動假設、呈示結論的依據, 然後通過演繹推證將完備的理論發展出來。失卻這學習經歷, 絕不是代數環或域等學習可以補償的 (Menger, 1971)。我們要學的不只是 subject, 而是一個 discipline (陸鴻基, 2009, 頁83)。

百廢待興

在新數學運動偃旗息鼓後, 本港甚至西方國家, 陸陸續續有提出某種形式恢復教授演繹幾何, 呼聲時強時弱。這種「演繹幾何」當然不局限幾何知識 (因爲新數學時期亦沒有取締掉), 也不一定最傳統的歐氏公理系統, 而是一些幾何推理、論證和尺規作圖等。問題正正是傳統幾何應以何種形式重新出現。

在此期間, 亦有不同的想法出現, 例如梁鑑添 (1971) 便綜合出「直觀派」、「代數派」、「變換派」、「實用派」等主張, 而美國國家數學教師議會所提出「多視角幾何」(geometry from multiple perspectives) 的想法 (Coxford, 1993、Geddes, 1992), 在香港的議會中也有人提到。當然電腦互動幾何平台亦是一個討論焦點 (可參閱 De Villiers (2003) 及 Lopez-Real & Leung (2006) 等)。

在香港, 幾何推導題其實已悄悄地推上了日程。以往可能由於考生水平的「下降」, 會考數學已極少出現整道的證明題。當時的想法是透過找未知角或邊長等, 已能考核到一點點的幾何推導。1990年代, 由於香港積極參與國際數學奧林匹克而發覺香港隊於幾何推導特別吃虧, 這成爲了重新考慮證明題的一個誘因。科目委員基本上同意這個觀點, 只是就如何給出「理由」有

[1]半群學社於1965年首先推出英文教科書, 翌年推出中文版, 嗣後每年版本的內容都有所改動, 較合理的是按一個學習順序去分析, 即如1965年中一、1966年中二、1967年中三等, 但礙於年代久遠, 現只能就可找到的版本作出描述, 但亦應能看出梗概。

不同意見。有一些委員, 由於批改的考慮, 要求考生寫出通用理由。如「等腰三角形底角相等」之類。但又有提出如只寫「等腰三角形性質」、甚或「iso△」又如何。亦有委員提出不如索性提供一個標準理由的清單, 當時反對這些樣版化做法的亦不多。經過一輪討論後, 結果以第一年作試點。當年不用寫理由, 只須對一些證明作步驟上的塡充, 這個做法雖然看來有點怪, 但卻發放了一個清楚的訊息就是會考是會從新考幾何證明題的。而在隨後幾年的試題就成功由「怪誕」的幾何證明塡充題過渡到正式的證明題了 (見附錄一)。

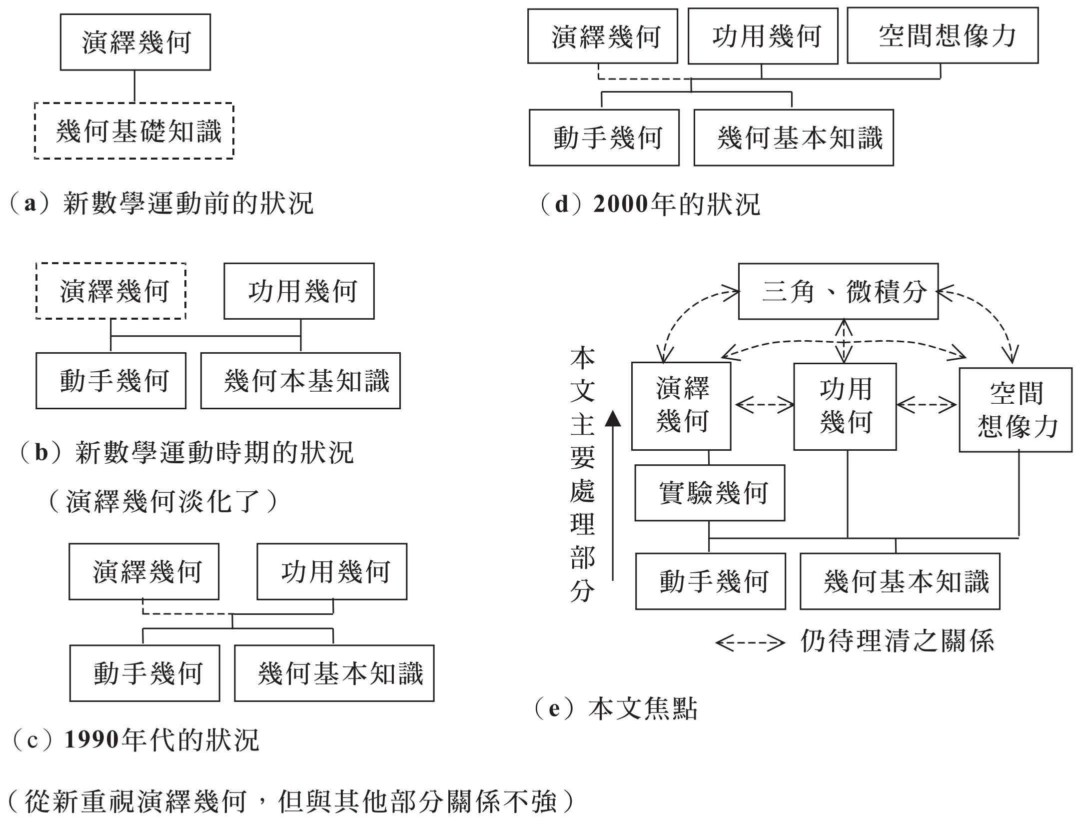
其實關於怎樣教傳統幾何的文章及書籍如汗牛充棟, 如 Durell & Wright (1925)、Moise (1974)、Wallace & West (2004)、項武義 (1994)、張景中 (1995) 等論述。我們並不太缺乏相關的知識。而這些書文雖然提供了甚爲豐富的素材, 但沒有勾畫出一個教程 (這不是這些書文的重點)。故此, 我們仍須探索一個適合現況的課程鋪排, 促使更有效的恢復中學教授傳統幾何。

香港幾何教學的現況

圖一粗略地勾劃了數十年來香港數學課程幾何部分的演變。首先說明這些只是一些示意圖, 不必嚴格區分不同「方塊」的內容。事實上, 當中無可避免地有所重疊。此外, 要澄淸幾個用詞。幾何基本知識包括了小學階段對圖形的認識等。新數學以後, 加強了動手部分, 如摺紙、繡曲線等。故加插了「動手幾何」這一方塊, 明顯地這兩者不是分割地進行的, 不過當中實驗幾何的含量不多 (故在 (e) 部分把實驗幾何特別提出來)。演繹幾何 (又或推理論證幾何) 早期從較嚴謹的歐氏系統出現, 後來抽出其中一些部分作出推理, 而非由公設開始。而功用幾何 (暫未找到一個更佳的名詞) 是指其功能集中於找到一些幾何結果, 如找出一些未知的邊和角等, 如不區限於用尺規, 其中包括坐標幾何、甚至向量、複數等。無論如何爲了簡單示意, 這些名稱均是籠統處之, 不必拘執。

如圖一所示, 在新數學運動以前, 香港中學數學課程的幾何部分主要建基於小學的幾何基本知識而進入歐氏系統甚至由公理、定義學起[2], 新數學運動所謂「打倒歐家店」, 認爲利用演繹幾何訓練邏輯思維沒學習符號邏輯那麼直接, 於是淡化了演繹幾何。而若要達到某些幾何結果, 可用「功用幾何」代替。1990年代重新提出幾何證明, 但未必要在全面恢復教授演繹系統。但如何把幾何證明與其他幾何部分連結起來尙待深思: 到1999年之數學課程 (香港課程發展議會, 1999), 又提出了空間想像力這一塊, 中學加入了一些新的課題、如幾何變換對稱、透視圖案等, 但幾個方塊之間的關係仍有待理順。

[2]當時課程沒有統一, 故亦可能因學校不同而殊。



（a）新數學運動前的狀況

（b）新數學運動時期的狀況（演繹幾何淡化了）

（c）1990年代的狀況（從新重視演繹幾何，但與其他部分關係不強）

（d）2000年的狀況

（e）本文焦點

圖一. 香港幾何教學之演變

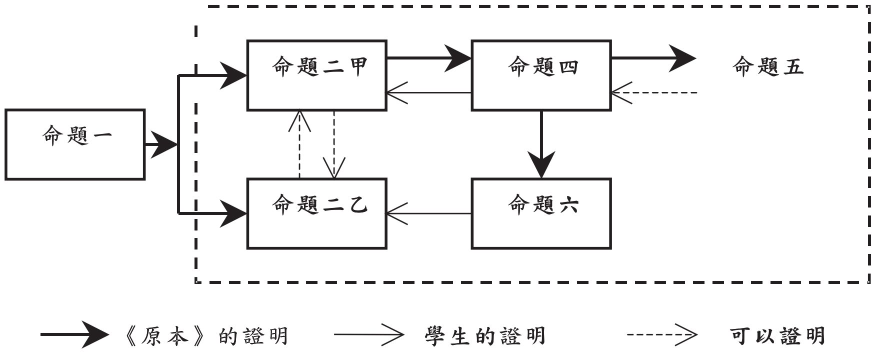
無論如何, 演繹幾何重新得到重視, 但如何與幾何基本知識有更好的銜接, 便是本文的重點。當然我們亦了解到這一主線與功用幾何及空間想像力間的關係仍須進一步理清, 然這並非本文所涉及的範圍。不過亦會在討論部分給出一些想法。

恢復演繹幾何教學的一些想法

伍鴻熙的想法

雖然傳統幾何教學大多依據歐幾里德 (Euclid: 約365B.C. - 275B.C.) 的《原本》(Element)。衆所周知, 它不是一本好的教科書: 因爲這不是它成書的原意。在第一次數學危機過後,《原本》的任務就是將數學建基於邏輯公理系統之上, 並以比例理論搗塞了第一次數學危機的相關漏洞, 試圖建立一個邏輯上無懈可擊的體系。這個體系在某些地方, 以學習而言, 可能是不自然的, 也不一定須安排照它的次序去學。例如梁子傑、黃毅英、蕭文強 (2008) 提出利用相似三角形的檢定法則 (即《原本》卷 VI、命題四) 去證明截距定理 (即卷 VI、命題二甲) 是犯上邏

輯上「貓兒追自己尾巴」的圈套! 利用相似三角形檢定法則 (即命題六) 去證明中點定理 (即卷 VI、命題二乙), 並沒有犯上邏輯上的圈套 (圖二)。但我們依舊可以問, 為何我們推理的次序要根據《原本》卷 VI 的次序呢?



圖二.《原本》卷 VI 其中幾道命題間之關係

當然這個獨特的例子有其背後的理由。伍鴻熙 (Wu, 1996) 曾提過, 雖然我們可以利用 SAS 足以推出 SSS 及 ASA, 但其實我們三個都可假定為起點, 然後推出餘下的兩個。換言之《原本》中命題與命題間的推導順序不一定是唯一的合理順序。又例如按照《原本》卷 I 中, 在證明截線的角關係蘊涵兩直線的平行性質時, 我們是假設了對頂角和內錯角 (alternate angle) 的情況去證明同位角的情況, 不過我們也可假定對頂角和同位角的情況去證明內錯角的情況 (當然同位角比內錯角更具幾何直觀, 但在《原本》目錄中的次序安排上, 內錯角的是先於同位角的。

除了《原本》不是很好的學習材料外, 伍鴻熙 (Wu, 1996) 亦提到若用傳統的方法, 從公理系統學起, 先講解何謂公理、定理 ··· 再慢慢由公理推導或可能須用上不少時間, 例如到中學的中段才可推出三角內角和, 這不只費時失事、沉悶, 且不切實際。所以他大力提倡他「鄰區公理系統」的想法 (圖三), 就是先假設了一些大眾直觀上均會認同的定理, 從這些中段出發就可以很快的推導精妙的幾何性質, 如三角形的幾個共點等等。

公理 → 一些基本定理 → 更精妙的幾何性質

圖三.「鄰區公理系統」的想法

他的文章比較著重後者, 就是如何透過基本定理推出精妙的幾何性質, 好讓學生感受到幾何證明的精髓。甚至乎這些基本定理是可以流動的, 在證明不同的「精妙幾何性質」時可以假設

不同的出發點。不過我以爲在實際的情況下, 設定一個統一的出發點, 仍是有所必要的, 否則學生會感到無所適從。

不過他也確有提出一個統一出發點的具體想法, 就是利用學校數學研習組 (School Mathematics Study Group:SMSG) 的公設系統。這亦體現於他有份主導的1999年加州內容框架 (California State Board of Education, 1999) 裏 (這也就是所謂「加州數學戰爭」(Jackson, 1997a, 1997b), 中所謂「第二次回到基本」的數學課程)。

從歐幾里德、希爾伯特、伯克霍夫到SMSG 公設系統

到底什麼是 SMSG 公設系統呢? 先讓我們回顧一下傳統幾何公設系統的歷史發展。

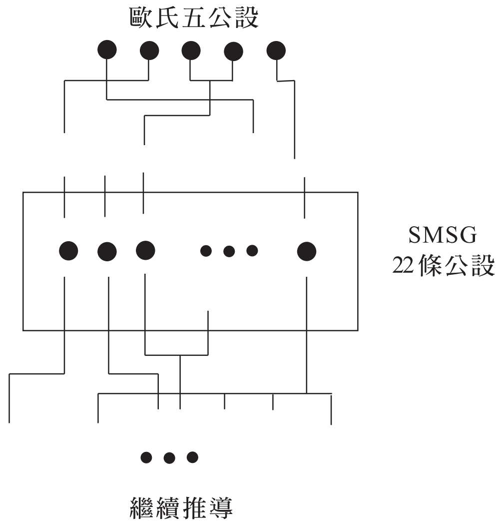
歐幾里德的《原本》是幾何的經典著作, 它對幾何學的公理化處理, 是二千多年來數學工作者的楷模。但以現代嚴謹的數學角度去審視它, 這公設系統卻仍有瑕疵, 最經典的例子是可以證明任何三角形均等腰。要到大數學家希爾伯特 (David Hilbert, 1862 - 1943) 悉心改良, 把獨立的公設由原來的5條增加至5組共21條 (最後可化爲20條), 方能使系統臻於完善 (Hilbert, 1899)。但誠如很多數學工作者所言, 這些「改良」看似明顯, 但它所牽涉的複雜證明卻非一個主修數學的大學生可以輕易掌握的! 有鑒於此, 人們自然會問, 有沒有另一組較希爾伯特系統簡單、易於接受的公設, 可達至同樣的效果呢? 美國數學家伯克霍夫 (George Birkhoff, 1884-1944) 在1932年給出了肯定的答案, 他提出了一組四條的公設, 並證明這組公理與希爾伯特所提的公設組, 在功能上是一致的 (Birkhoff, 1932)! 這四條公設包括: 歐幾里德的第一公設 (更明確要求通過兩相異點的直線是唯一的)、SAS 相似三角形公設 (simSAS Postulate)、直尺公設 (Ruler Postulate) 與角度量公設 (Protractor Postulate)。當中的直尺公設與角度量公設能深刻地應用實數的連續性及有序性, 令「空間的連續性」、「點或線的中間性 (betweenness) 及分離性 (separation properties)」這些表面「直觀」, 但在希爾伯特公設系統中要大費周章,「嚴謹」論證的幾何性質, 變得易於處理。當然, 從基本公設發展出重要的幾何定理這過程, 與中、小學的幾何學習, 尙有一段很大的距離。但伯克霍夫公設組的應用, 已開始滲入往後的教科書寫作中。

1960年代, 美、蘇的軍事科技競賽喚起了美國人對中、小學的省思。美國政府察覺自身中學數學課程的不足, 遂召集以耶魯大學學者爲首的 SMSG, 研究如何改善數學的教學, 著重數學理論的一貫性及嚴謹性以發展計算能力及解題技巧。SMSG 選出了22條幾何學的公設 (見附錄二), 作爲中學幾何學習的基本框架。當中的8條公設, 是結合了希爾伯特與伯克霍夫公設組而成的, 例如直尺公設與角度量公設就被選入其中, 這明顯是考慮到學習者在學習幾何的演繹推理時已對實數系有相當程度的掌握。値得注意的是 SMSG 公設系統的公設選擇是以數學教育爲著眼點, 它不要求公設各自獨立 (事實亦不獨立), 強調的是對幾何學習的「實用性」與

「可信性」。因此, 數學教育或數學工作者對當中公設的選擇或有異議, 但這系統在經歷數十年的發展, 仍屹立不倒, 可見它是一個數學教育的智慧結晶, 既可信亦實用! 當然, 這些「衍生公設系統」還是持續發展著的, 1983年 The University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP) 便在 SMSG 的基礎上發展了強調直觀理解的 UCSMP 公設系統, 最近 Gerard A. Venema 也在著作中建議了自己設計的公設系統 (Venema, 2006)

如何建立基本定理?

換言之, 如果我們接受上面的方向, 我們在某意義上選取了 SMSG 系統的這個「衍生系統」作爲「工作系統」(working system) (圖四), 把 SMSG 的公理 (而不是歐氏公理) 作爲起點, 嗣後的推理當然會便捷多了。有這麼的一個統一的出發點, 學生學來也不致無所適從 (不知那些待證, 那些可作假設了)。但這產生另一個小問題, 就是歐氏公理本身 (除第五條外) 都相當直觀的 (如公設一: 由任意一點到任意一點可作直線)。但 SMSG 的22條組雖然也很直觀 (如 SimSAS) 但仍需要一些論斷與奠定。



圖四. SMSG 工作系統

即使有可用的公理框架, 但幾何教學更重要的一步是讓學習者建立基本定理, 那麼這些基本定理又是怎樣建立的呢? 其中一種做法是透過實驗幾何[3]。

[3]伍鴻熙並不反對實驗幾何。他說: 他只是反對一些太簡陋、不是實驗的實驗。他說: 例如物理實驗是透過不少情況才下出結論。如果所謂幾何實驗只是舉出一個情況 (如只是量度某一個等腰三角形的底角), 這不可能稱之爲實驗。但若透過許多個三角形得出這個規律 (pattern), 他是贊同的。筆者提及 DG (dynamic geometry, 電腦互動幾何) 其實可做到類似的效果, 他說他並不反對。

這令人想起項武義 (等) 的一個基本想法 (中學數學實驗教材編寫組, 1982), 就是由實驗幾何過渡到演繹幾何[4]。 這恐怕是現時課程做得不太理想的地方。數個月前, 筆者特意請教了蘇式冬老師。當時 (1970年代) 項武義返回中國大陸參與數學實驗教材的編訂, 而幾何組的組長就是蘇式冬。蘇老師還展示了當時的教材, 當時的想法就是透過符號邏輯由實驗幾何過渡到演繹幾何[5] (圖五), 效果非常理想。

實驗幾何 → 符號邏輯 → 演繹幾何

圖五. 以符號邏輯作爲橋樑

不過在交談中, 大家都認同, 在現時要學生學正規的符號邏輯會比較難。我們應把它「調低」, 更直接的透過數學例子, 教授一些握要的觀念, 如充要條件、反例、反證法等。

課程編排的構想和續後的挑戰

如上所述, 我們不只需要一些傳統幾何的教學法, 在課程上也需要一個編排。綜合了以上的想法, 我們可以得出如下的一個藍圖 (圖六):

實驗幾何 → SMSG公設 → 推理工具 → 演繹幾何

圖六. 重新理順演繹幾何的構想

我們若認同以上的方向, 餘下的工作仍多, 例如我們要進一步考慮, (1) 透過些甚麼樣的活動奠定 SMSG 系統中的每一條公設, (2) 應包含些甚麼推理工具, (3) 又我們在課程內應繼續推論到甚麼其他幾何性質來?

當中細節, 可交與課程發展人員, 我們在此就數點作些補充。

關於推理工具

現時教授邏輯時 (如逆定理), 往往較多舉出非數學的例子, 如「父親有鬍子, 有鬍子就不一定是父親」等學生聽來覺得空泛。我們應舉出數學中所碰見的實例。我們認爲其實學生要知道的, 基本上有三類:

[4]當時用「歐氏推理幾何」。

[5]更確切地, 如序文中段寫「由直觀幾何形象分析歸納出幾何基本概念和基本性質, 通過集合論、簡易邏輯轉入歐氏推理幾何, 處理直線形、圓、基本軌跡與作圖、三角比與解三角形等基本內容。(中學數學實驗教材編寫組, 1982, 頁 2) 這本書雖然 1982年出版, 然其實綜合了之前數年的實驗。

一、什麼叫證明, 怎麼才算「證畢」

我們可從一些常見的錯誤證明 (甚至從學生的考卷中抽出及舉出一些歷史名題) 出發。其中包括結論錯誤、理由不當、循環證明等 (見附錄四)。

二、充要條件、反證和反證法 (見附錄五)。

三、其他邏輯工具, 如所有、存在等 (見附錄六)。

這些邏輯工具應能在學校數學的範圍上取代符號邏輯, 並以之處理演繹幾何中之推導。

關於作圖

衆所周知, 作圖之作用不只是爲了作圖 (例如等分角), 也是證明的一種化身。細閱歐幾里德的《原本》, 讀者便會發現, 從點、線、面出發, 依從公設、定義, 便可推出很多幾何圖形的性質和定理, 嚴謹的論證, 精密的體系, 令人讚歎, 但這幾何體系存在嗎? 確立「存在性」是數學「言之有物」的佐證, 歐幾里德就是利用尺規作圖, 構作出具有指定特性幾何圖形, 故此學習尺規作圖其實就是一種學習證明特定幾何圖形存在的方法! 再者, 圖的可構作性, 往往是建基於已演繹論證的結果上, 例如從三角形 SAS 全等條件推出 SSS 全等條件後, SSS全等條件便成爲作一角的等分角或作過線外一點的平行線等的堅實基礎, 對學習者而言, 這不但讓他們感受到 SSS 全等條件的「眞」, 更感受到它的「用」。

此外, 作圖更可幫助學習者理解幾何定理的深層意義及訓練幾何思維的有力工具。過相異兩點, 可作唯一直線, 這作爲第一公設的幾何事實的眞確性 (或可信性), 大概都是通過學習者的尺規作圖經驗而來的。又例如, 歐幾里德證明兩「等底同高」的三角形有相同的面積時, 證明的論據正是來自相關的「等底同高」平行四邊形的對應結果, 但起著引領證明作用的「幾何思維」卻是由尺規作圖所提供的! 應用第五公設添加輔助線, 便會讓學習者看出三角形與輔助平行四邊形的關係, 證明因而變得可「一蹴即就」了。故此幾何作圖與演繹幾何的學習是不能分割的一個整體, 兩者充分的結合, 才能把「思維中的幾何圖像」展現於紙上, 再通過演繹推證將完備的理論發展出來。

値得注意的是與香港幾何課程相近的台灣, 它的初中的課程大綱中要求學生能認識尺規作圖並能做基本的尺規作圖 (教育部, 2003), 即使這樣, 學生的演繹幾何學習, 尙未如理想 (Lin & Cheng et al, 2003)。香港的中學幾何課程對尺規作圖, 卻未見強調, 相關的尺規作圖內容被置於初中的「非基礎部分」內容中 (即不規定施教), 然而, 新高中屬於必修「基礎部分」的演繹幾何 (圓的基本性質) 卻被一再加強, 這實在是一個値得香港數學教育工作者深思, 並應善加處理的地方!

除了尺規作圖外, 還有不少其他的作圖方式。例如只用直尺、只用圓規、只用三角板、用長條直尺, 甚至用書等。當然一些方式 (例如只用三角板) 所能作的圖較少, 但正正由於它所用的工具較少, 可能較易爲初學者所掌握。(而且較有趣味點) 以下是一些例子:

例1: 利用長條直尺作半分角。

例2: 使用三角板畫平行線。

例3: 利用長條直尺畫平行線。

詳見附錄三 (半群學社 (n.d.)) 及黃家樂 (2005)。

關於互動幾何平台

互動幾何功能之論述甚多, 甚至有指出它開啓了不同的數學學習結果 (Lopez-Real & Leung, 2006), 於此不贅。集中於討論它如何能協助學生學習演繹幾何部分, 不少文獻提出它的拖曳 (dragging) 功能, 拖曳能顯示幾何圖形在改變當中某些組成元素的幾何性質時, 其他各元素的幾何性質會如何變化。學生觀察及探索這過程中各元素幾何性質的「變」與「不變」, 對他們的幾何學習, 起著重要的啓迪作用, 事實上, 互動幾何平台是在改變不同數據, 變相地在短時間讓學生作出極多的幾何實驗, 它能讓學生作出探索猜想、駁斥、構想、解釋等 (Baur, 2002; De Villiers, 2003)。這是傳統教學方式又或是紙筆幾何作圖所不能比擬的。

面對的挑戰

綜觀香港的幾何教學, 要讓演繹幾何的學習有效的推行, 關鍵在初中。如何帶領學生由直觀步入嚴謹的演繹幾何學習則是重中之重! 筆者從近年在中學觀課及師訓課程中, 了解到的教師能力及教學實況估計, 香港在推行演繹幾何教學將會面對以下挑戰:

A. 教師方面

a. 教師對演繹幾何內容的掌握

現在香港「正當盛年」的中學數學教師, 他們在中學及大學所學到的演繹幾何, 內容非常有限, 他們對整個歐幾里德的幾何公理系統的由來、結構、發展與改良, 所知也極爲有限。要讓學生理解公理系統, 有效的教授演繹幾何, 施教者必須掌握公理與定理之間的微妙關係, 當中的「來龍去脈」, 更要知道得一淸二楚。這類熟知演繹幾何內容的「學養教師」在今日香港的數學教師團隊中, 爲數不多。教師未能適切的回應學生這樣的提問:「爲什麼不能用相似三角形的定理 (若兩三角形的兩對應邊邊長成比例, 且該兩對邊所成的夾角相等, 則這兩三角形相似) 去證明三角形的中點定理 (三角形任意兩邊的中點連線, 必與第三邊平行, 且連線長度爲第三邊邊長的

一半)?」是經常發生的事情。事實上, 中點定理是確立相似三角形定理的基石, 以後者去證明前者, 有犯「循環論證」之嫌!

b. 教師對幾何學習內容的處理

香港學數學教師的教學, 十分依賴教科書的鋪排, 然而, 香港教科書在演繹幾何的學習上, 對如何由直觀過渡到嚴謹的學習內容的鋪排, 並沒有很周詳的考慮, 應用直觀與嚴謹演繹學習的課題, 例如畢氏定理、全等三角形和相以三角形的內容在課本中交替出現, 到底何者要直觀地學習的, 何者屬於要嚴謹論證的, 學生容易混淆, 有時候, 連授課的教師, 也有分不淸界線的情況發生! 此外, 教師很多時不願意把課時用在幾何尺規作圖, 以及訓練學生論證的邏輯表達上, 須知證明的很多基本思想均緣自幾何作圖的經歷, 論證的嚴謹及周詳與否, 正是學生的邏輯思維是否成熟, 要有成功的演繹幾何教學, 這兩方面的學習, 缺一不可!

c. 教師的幾何教學習慣

近年不少數學教育工作者意識到培養幾何思維 (Fostering geometric thinking) 對幾何學習的重要性, 事實上, 衆所周知, 主導演繹幾何的論證的正是幾何思維, 它可說是演繹幾何論證的靈魂。有數學教育工作者察覺到施教者個人的幾何心智習性 (Geometric Habits of Mind) 對培養學生的幾何思維, 十分有幫助, 並提倡施教者可應用的四學幾何心智習性框架 (Driscoll et al, 2007):

(i) 以幾何關係作推理 (Reasoning with relationships)。
(ii) 注意幾何概念的推廣 (Generalizing geometric ideas)。
(iii) 尋找幾何不變量 (Investigating invariants)。
(iv) 平衡探究與反思 (Balancing between explorations and reflections)。

作爲培養學生幾何思維的出發點。然而, 香港的現職教師對如何培養幾何思維的意識與方法, 所知不多, 這正好反映在他們對教授幾何變換又或是如何交代演繹證明的思想, 往往未如理想!

B. 學生方面

a. 學習演繹幾何的動機

學生學習演繹幾何時往往會問, 這些幾何結果, 不是已從實地觀察、實際操作中「證實」了嗎? 爲什麼還要大費周章, 從一些莫名奇妙的公理假設, 千辛萬苦, 迂迴曲折的論證一番, 才得到這樣「明顯」的結論, 這演繹幾何是否略嫌太「吹毛求疵」? 數學家是否太「無聊」呢?

b. 對公理系統的不了解

學生在開始學習傳統的演繹幾何時, 對公理系統的作用, 往往了解不深, 就連什麼是基礎或基本的假設, 什麼是定理的內容和結論, 亦容易混亂。若教科書及教師均沒有意的強調, 闡述清楚的話, 要學生無師自通, 弄清楚當中的「來龍去脈」, 從而欣賞到公理系統的妙用, 這似乎是「天方夜譚」, 不切實際的「夢想」。

c. 論證的嚴謹性與邏輯性的掌握

演繹幾何的論證有其特有的表達方式, 它是嚴謹的, 它表達的邏輯思想, 也自成體系, 學習這種獨特的論證, 就如學習一種獨特的語言一樣, 必須多加嘗試, 方能讓學生掌握大概。事實上, 就有如 van Hiele 的幾何學習階段所言, 並非所有學生, 均能到達能駕馭演繹幾何的「形式演繹」(formal deduction) 的境地!

結論

如上所述, 本文只處理了演繹幾何部分。我們仍要梳理它與學校課程中其他幾何內容之關係。在過往, 演繹幾何多多少少形成一個主軸, 學生由直觀認識圖形及其性質。漸漸從其性質將圖形由實物轉爲抽象的物件, 由性質去定義和認識圖形, 再由這些定義和基本性質推出更多的性質來。其他部分 (如坐標幾何) 多多少少是依附著這個主軸發展開來。現時在此之上又添加了空間想像力各部分 (圖一)。不是說這不好, 但可能出現的「三頭馬車」狀況, 就需要一個理順 (黃毅英, 2003)。其中不外乎幾種考慮, 就是把幾個部分獨立處理, 例如坐標幾何就是坐標幾何, 演繹幾何就是演繹幾何。只是教學的時序上安排得好一點, 至於空間想像力的課題 (不是否定), 這有可能類似於傳統上「 p 和 p」的問題 (黃毅英、顏明仁、霍秉坤、鄧國俊、黃家樂, 2010)。除了用獨立的課題培養空間想像力外, 用較實質的學習內容 (其中一個有「p」—product) 去處理能力訓練 (一個「p」—process) 也可以是一個考慮點。

從以上的分析, 我們看到現時在香港推行幾何學習仍需進行一系列的探索。在課程發展歷程的第一步, 是進行情景分析。從學科理論及結構、教學概況, 以及教師的能力等方面, 判定課程發展應採取的方向。幾何課程的重點及結構、課題的次序、教學中應採的策略, 教師需要的支援及培訓。在現階段, 我們應考慮進行「需求評估」(needs assessment), 亦即是確定幾何教學在數學教育中的位置及需求, 再了解現時學生的幾何概念和能力處於甚麼水平 (Popham, 1993)。通過這些「需求評估」和「情景分析」, 我們會更確切了解近況, 判定幾何教學的目標。我們就可更準確掌握課程設計問題, 從而進一步理順中小學數學課程中幾何部分之關係。

附錄一 1990年代重新引入幾何證明題[6]

11.

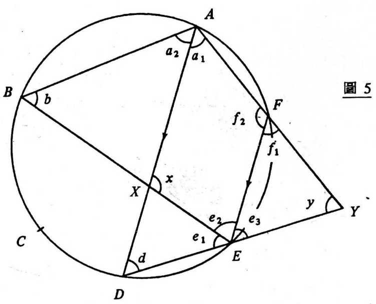


圖 5

本題各答案須寫在第8－9頁的空欄內。

圖5中，A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 為圓上的點，使 $AD \parallel FE$ 且 $\widehat{BCD} = \widehat{AFE}$。 AD 與 BE 相交於 X 。AF 及 DE 的延線相交於 Y 。

(a) 證明 ΔEFY 為等腰三角形。 （3分）

(b) 證明 $BA \parallel DE$ 。 （1分）

(c) 證明 A 、 X 、 E 、 Y 四點共圓。 （3分）

(d) 若 $\angle b = 47°$ ，求 $\angle f_1$ ， $\angle y$ 及 $\angle x$ 。 （5分）

考生編號 試場編號 座位編號 本頁積分

考生若選答第11題，須填寫上列三空格，並將本頁與答題簿縛緊，一併交回。

第11題的答案

(a) 證明：

$\angle f_1 = \boxed{}$ （ $AD \parallel FE$ ，對應角相等

但 $\boxed{ = }$ （圓內接四邊形的外角等於內對角）

∴ $\angle f_1 = \angle e_3$

∴ $EY = \boxed{}$ （等邊對等角）

即 ΔEFY 為等腰三角形

(b) 證明：

$\widehat{BCD} = \widehat{AFE}$ （已知）

∴ $\angle a_2 = \boxed{}$ （等弧對等圓周角）

∴ $BA \parallel DE$ （內錯角相等）

第11題的答案（續）

(c) 證明：

$\angle a_1 = \boxed{}$ （ $AD \parallel FE$ ，對應角相等）

但 $\boxed{} = \angle b$ （圓內接四邊形的外角等於內對角）

且 $\angle b = \angle e_1$ （ $BA \parallel DE$ ，內錯角相等）

∴ $\angle a_1 = \boxed{}$

∴ A 、 X 、 E 、 Y 四點共圓 （外角等於內對角的四邊形，必內接於一圓）

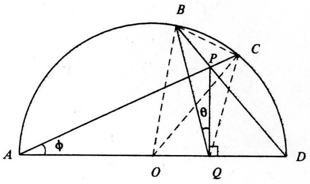
(d) 解：

1992年會考題目卷1第11題: 除 (d) 部外, 只須寫步驟, 理由由考方提供。

[6]本附錄一中所引用的兩道「香港中學會考」試題, 承蒙「香港考試及評核局」慷慨授權轉載, 謹此致謝。

11. 本題各答案須寫在第 12 — 13 頁的空欄內。

圖七



圖七中，半圓的直徑爲 AD，圓心爲 O。弦 AC 及 BD 相交於 P。Q 爲 P 至 AD 的垂足。

(a) 證明 A, Q, P, B 四點共圓。

(3 分)

(b) 設 $\angle BQP = \theta$。試以 θ 表

(i) $\angle BQC$,

(ii) $\angle BOC$。

(6 分)

(c) 設 $\angle CAD = \phi$。試以 ϕ 表 $\angle CBQ$。

(3 分)

1993年考生要加上理由。

考生編號 試場編號 座位編號 本頁積分

考生若選答第 11 題，須填寫上列三空格，並將本頁縛在答題簿內，一併交回。

第 11 題的答案

(a) 聯 AB。

$\angle ABD = 90°$ ( )

$\angle AQP =$ (已知)

$\therefore$ $\angle ABD + \angle AQP =$

$\therefore$ $AQPB$ 爲圓內接四邊形， (對角互補)

即 A, Q, P, B 四點共圓。

(b) (i) 聯 CD。

利用 (a) 部相同論據，可知 $PQDC$ 亦爲圓內接四邊形。

$\therefore$ $\angle PQC =$ (同弓形內的圓周角)

考慮圓內接四邊形 $ADCB$。

$\angle BDC =$ (同弓形內的圓周角)

由於 $AQPB$ 是圓內接四邊形，

$\angle BAP =$ (同弓形內的圓周角)

第 11 題的答案（續） 本頁積分

$\therefore$ $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC$

以 θ 表示時，

$\angle BQC =$

(ii) 考慮已知的半圓。

$\angle BOC = 2 \times \angle BAC$ ( )

以 θ 表示時，

$\angle BOC =$

(c) 解：

附錄二 SMSG 公設

不定義名詞: 點、線、面、通過、距離、角度量、面積、體積

公設 1. 給定相異的兩點, 恰有唯一的直線穿過該兩點。

公設 2. (距離公設) 就每對相異的點, 有唯一的正數與之對應, 稱此數爲該兩點間的距離。

公設 3. (直尺公設) 直線上之點可與實數作對應, 使得 (1) 線上每一點恰與一實數對應; (2) 每一實數恰與直線上的一點對應; (3) 兩相異點的距離爲該兩個對應實數差之絕對值。

公設 4. (直尺配置公設) 給定直線上的兩點 P 與 Q, 均可選擇一坐標系統使得 P 之坐標爲 0, Q 的坐標爲正數。

公設 5. 每一平面均包含最少三個非共線點, 空間則包括最少四非共面點。

公設 6. 若兩點在同一平面上, 則穿過此兩點之直線必在該平面上。

公設 7. 任意三點處於最少一個平面上, 而任意三個非共線點則處於唯一的平面上。

公設 8. 若兩平面相交, 其相交必爲一直線。

公設 9. (平面分隔公設) 給出一直線及一包含此直線之平面, 不在該直線上的平面各點, 形成兩集合, 使得: (1) 兩者均爲凸集; 及 (2) 若 P 在其中一集, Q 在另一集, 則線段 PQ 必與上述直線相交。

公設 10. (空間分隔公設) 空間中, 不在一特定平面上之各點形成兩集, 使得: (1) 兩者均爲凸集; 及 (2) 若 P 在一集: Q 在另一集, 則線段 PQ 必與該平面相交。

公設 11. (角度量公設) 每一角 $\angle x$ 均對應於一個在 0 至 180 之間的實數, 此實數名爲此角之度量, 以 $m\ (\angle x)$ 記之。

公設 12. (作角公設) 設 AB 爲半平面 H 邊緣之一射線。對於任何 0 至 180 之間的 r, 必有唯一之射線 AP, P 在 H 內, 使得 $m\ (\angle PAB) = r$。

公設 13. (角相加公設) 若 D 爲 $\angle BAC$ 之內點, 則 $m\ (\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$。

公設 14. (互補公設) 若兩角形成一直線, 則它們互補。

公設 15. (SAS 公設) 給出兩三角形 (或三角形與自身) 之間的一一對應。若兩邊及其夾角與另一三角形之相對部分相等, 則此兩三角形全等。

公設 16. (平行公設) 過線外一點, 只有最多一直線與該線平行。

公設 17. 對任一多邊形所圍成的區域, 有唯一的正實數與之對應, 稱爲其面積。

公設 18. 若兩三角形全等, 則這兩三角形之面積相等。

公設 19. 若區域 R 爲兩區域 R_1 及 R_2 之併集, 若 R_1 及 R_2 最多相交於有限數量的線段或點, 則 R 之面積爲 R_1 與 R_2 的面積之和。

公設 20. 矩形面積爲其長與高的長度之積。

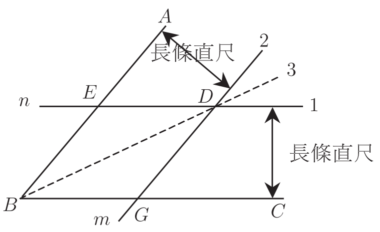
公設 21. 長方體之體積爲其底面積與高度之積。

公設 22. (祖暅原理) 給出兩立體和一平面。若任一平行於上述平面的平面, 與此兩立體相交區域之面積相等, 則此兩立體之體積相等。

(見 California State Board of Education, 1999)

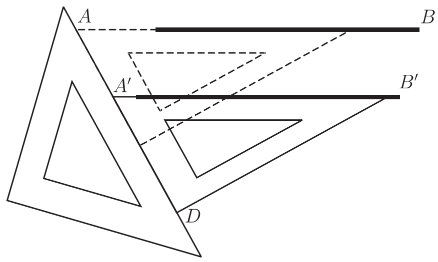
附錄三 作圖之例

例1: 利用長條直尺作半分角



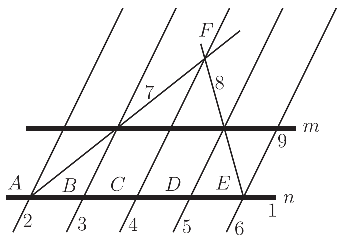
使用長條直尺分半角

例2: 使用三角板畫平行線



使用三角板畫平行線

例3: 利用長條直尺畫平行線



使用長條直尺畫平行線

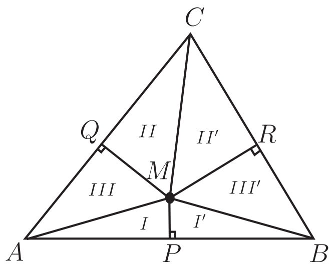
附錄四

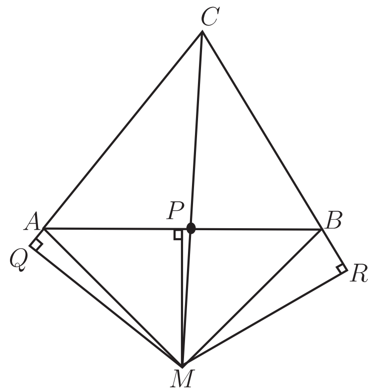
邏輯工具: 從錯誤證明事例看何謂證明

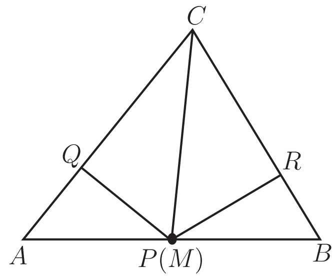
(1) 結論錯誤: 例如在 1892 年 W. W. Rouse Ball (Rouse Ball & Coxeter, 1892/1987) 提出著名的錯誤「證明」: 任何三角形均等腰。對任意三角形 $\triangle ABC$, 考慮 AB 的垂直平分線 (與 AB 相交於 P), 及 $\angle C$ 的分角線。
情況一: 若兩者平行。
則可推出分角線垂直 AB。設分角線與 AB 相交於 D, 則易知 $\triangle CAD\ \cong\ \triangle BAD$

(ASA 全等條件), 從而推出 $AC = BC$, 故 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形。情況二: 若兩者不平行, 則設兩者相交於 M。如圖示, 可分三種情況討論:

(i) M 在 的內部 $\triangle ABC$ (ii) M 在 $\triangle ABC$ 的外部 (iii) M 落在 AB 上

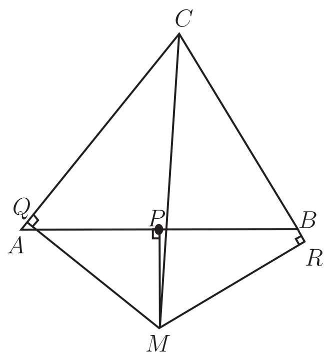






對於情況 (i), 可考慮如圖所示的 6 個三角形: I, I', II', II' III 及 III' 並由已知條件推出 $I \cong I'$, $II \cong II'$ $III \cong III'$ 從而證明 $AC = BC$。情況 (ii) 及 (iii) 也可推出 $AC = BC$ 的結果, 在此不贅。

事實上, 這錯誤「證明」除了可讓學習者反思證明的過程外, 更可讓學習者體會幾何作圖對證明所起的指導作用。還要指出, 這錯誤「證明」的錯誤在於上方的作圖並未能顯示正確的幾何關係! 右圖所顯示的才是眞相。反思上方的證明, 便會發現, 證明出現的漏洞在於考慮情況 (ii) 時欠周詳, 上圖 (中央) 只給出其中的一個可能的子情況 (subcase), 而另一可能的子情況就正如右圖所示的, 此時, 則推不出 , 故此論證並不成立!



(2) 結論正確但證明錯誤:

證明: 若 $x > 0$ 及 $y > 0$, 則 $x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$。

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 > x^2y + xy^2 &\Rightarrow x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 > 2x^2y + 2xy^2 \\
&\Rightarrow (x^2 + y^2)(x + y) > 2xy(x + y) \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 > 2xy \\
&\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy > 0 \\
&\Rightarrow (x - y)^2 > 0
\end{aligned}
$$

(3) 結論及證明均無誤, 但所舉理由不當。

(4) 循環證明: 利用等價命題作證明 (如利用正弦法則證 $a\sin B = b\sin A$)。

(5) 利用更強的定理證明特例 (如利用餘弦法則證畢氏定理) 等。當然對於尾二者, 證明可否接受看考題本身怎樣佈置, 但以學習角度而言, 學生應清楚箇中的來龍去脈。

附錄五 充要條件和反證

除了充要條件這個名詞, 最主要是讓學生知道「$p \Rightarrow q$」與「$q \Rightarrow p$」有別, 在中學生階段是有點困難的, 因爲學生常遇到的推導均是雙向成立的 (例如解方程: $x+5=7 \Leftrightarrow x+5-5=7-5 \Leftrightarrow x=2$)。

我們可以考慮由他們已有接觸到的「reject answer」談起, 常見的例子如:

1. 一位男士能以每分鐘48米的速度於靜水中直線游泳。而他在順流與逆流時游200米所花的時間相差了10分鐘。問他在順流時游泳的速度會是多少?

設順流時的游泳速度是每分鐘 x 米。

(游200米) 逆流所花時間 $-$ 順流所花時間 $=10$ 分鐘

$$\frac{200}{(48+x)}-\frac{200}{(48-x)}=10$$
$$200(48+x)-200(48-x)=10(48+x)(48-x)$$
$$\therefore\ x^2+40x-2304=0$$
$$\therefore\ x=32 \quad \text{or} \quad -72$$

一看便知道 -72 並不是適合答案, 因爲負數的游泳速度不肯定可以代表些什麼。下面的例子將表明答案之不成立不在於答案是負數, 一起看看吧。

2.

$$\sqrt{(x+2)}=x-4 \Rightarrow x+2=(x-4)^2$$
$$\Rightarrow x^2-9x+14=0 \ \Rightarrow\ x=7 \text{ or } 2.$$

這能反映「$p \Rightarrow q$」並不等同於「$q \Rightarrow p$」的事例。

由此可帶出逆命題 (常見的如畢氏定理逆命題: 它有著明顯的獨特作用, 就是測驗一個三角形是否直角, 其他如測試四點是否共圓等)、反例、反證法等。

這其實牽涉到棣·摩根律 (DeMorgan's Law)。但其實我們不需要學這些命題運算 (statement calculus), 但學生了解到要否定一連串命題, 舉出一個反例就夠了 ($\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge$

$p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \cdots \vee \sim p_n)$。反過來, 要否定一連串命題總有一句是對的話, 就要全部都要否定了 $(\sim (p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \cdots \wedge \sim p_n)$。

附錄六 其他邏輯工具

上面稱摩根律又可帶到「所有」($\forall$) 及「存在」($exits$) 的概念來。事實上「所有」是廣義的「和」(and: 合取), 而「存在」是廣義的「或」(or: 析取), 例如 Kuratowski (1962) 索性就用 $\bigwedge\limits_{x\in p}$ 來代表「所有」。$\bigvee\limits_{x\in p}$ 來代表「存在」。例如 $x^2+3>2$, 對於所有 $x \in N$ 就等於

$$(0^2+3>2) \wedge (1^2+3>2) \wedge (2^2+3>2) \wedge (3^2+3>2) \wedge \cdots$$

故此它可看成一「大 $\wedge$」。

「存在」的情況類似。

此外還有「對於每一個 x, (均) 有 (一個) $y\cdots$」、「有一個 y, 對於每一個 $x\cdots$」等之分別, 如

「對於每一個 x, 有一 y, 使得 $x+y=1$」是對的。

「有一個 y, 對於每一個 x 均有 $x+y=1$」是錯的。

又可連繫到「存在唯一」($exits!$) 的概念。

其他零星 (但亦很重要) 的概念包括: 啞指標 (dummy index)、啞變量 (dummy variable), 對任意指定的 (arbitrary but fixed) 等。例如下面的英文字母就有不同的含義。

※「解 $x^2+kx-1=0$」: 最後答案仍保留了k。

※「$x^2+kx-1=0$ 均有兩個實根」: 雖然不同的實數 k 對應著不同的方程, 但不必知道 k 的值便可得出所有這些方程均有兩個實根的結論。

※「$ax^2+bx+c=0$ 的解爲 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $a\neq 0$」: 這裡, a、b、c 爲任意實數且 $a\neq 0$。這可理解爲「千千萬萬」個二次方程的通解。而通解的數值隨實數組 a、b、c 的取值而變化, 但解 $x^2+ax-1=0$ 時卻不要混淆了符號的應用, 誤以爲

「$a=1$, $b=a=1$, $c=-1$」!

※ $\sum\limits_{r=1}^{3} r^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2$, 此處 r 與 k 爲啞指標, 求和式的數值爲 14, 不依賴於 r 及 k 的選取 。

※ $\displaystyle\int_0^1 x^8dx = \int_0^1 t^8dt$, 此處 x 與 t 爲啞變量, 定積分的數值爲 1/9, 不依賴於 x 及 t 的選取。

※ $\sum\limits_{r=1}^{3} r^k$ 的展開不會有 r 但會有 k。

誌謝: 作者感謝臺北市立教育大學數學資訊教育學系鄭英豪教授提供相關資料。

參考文獻

1. 中學數學實驗教材編寫組 (編) (1982)。《中學數學實驗教材—第二冊 (上)》。北京: 北京師範大學出版社。
2. 半群學社 (n.d.)。《新數學 · 二册下卷》。香港: 聯合書院出版社。
3. 香港課程發展議會 (1999)。《數學課程綱要 (中一至中五)》。香港: 教育署。
4. 香港課程發展議會及香港考試及評核局 (2007)。《數學課程及評估指引 (中四至中六)》。香港: 政府物流服務署。
5. 陸鴻基 (2009)。《心靈何價?》。香港: 香港中文大學崇基學院。
6. 梁子傑、黃毅英、蕭文強 (2008)。課程設計上的「古爲今用」– 以「截距定理」和「中點定理」爲例。《數學教育》26期, 3-10。
7. 梁鑑添 (1977)。多種幾何教學方法的比較。載大學畢業同學會 (編), 《數學研習 — 一個關於中學幾何教學的研討會之紀錄》 (頁13-17)。香港: 作者。
8. 張景中 (1995)。平面幾何新路。臺北: 九章出版社。
9. 項武義 (1994)。幾何學的源起與發展。臺北: 九章出版社。
10. 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北: 教育部。
11. 黃家樂 (2005)。幾何作圖: 由歷史傳統作圖技法到現代課堂另類選擇。載黃毅英 (編), 《迎接新世紀: 重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》 (204-205)。香港: 香港數學教育學會。
12. 黃毅英 (2003)。從認識論的課程分析看現行中小學課程的幾個問題。載鄧幹明、曾倫尊 (編), 《學會學習: 數學課程改革評析》 (頁3-24)。香港: 香港數學教育學會。
13. 黃毅英、黃家樂 (2001)。「新數學」運動的過程及對當代數學教育之啓示。載黃毅英 (編), 《香港近半世紀漫漫「數敎路」: 從「新數學」談起》 (頁9-111)。香港: 香港數學教育學會。
14. 黃毅英、顏明仁、霍秉坤、鄧國俊、黃家樂 (2008)。〈從香港數學課程發展的歷史經驗透視當前課程發展與決策的幾個問題〉。《課程研究》。已接納。
15. 鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂 (2006)。《香港近半世紀漫漫「小學數敎路」: 現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》。香港: 香港數學教育學會。
16. Baur, J. O. (2002). The state of secondary geometry: A reflection in light of the NCTM standards. Retrieved March 8, 2010 at http://academic.wsc.edu/faculty/jebauer1/state_of_secondary_geometry.pdf
17. Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Ann. Math.*, **32**, 329-345.
18. California State Board of Education. (1999). Mathematics framework for California public schools: Kindergarten through grade twelve. Sacramento, California, U.S.A.: Author. Retrieved June 6, 2003 from the California State Board of Education Website: http://www.cde.ca.gov/cdepress/math.pdf
19. Clausen-May, T., Jones, K., McLean, A. and Rollands, S. (2000). Perspectives on the design of the geometry curriculum. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, **20**, (1-2), 34-41.
20. Coxford, A. F. (1993). Geometry from multiple perspectives. Reston, Virginia, U.S.A.: National Council of Teachers of Mathematics.
21. De Villiers, M. (2003). *Rethinking proof with Geometer's Sketchpad*. Emeryville, California, U.S.A.: Key Curriculum Press.
22. Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J. E., and Egan, M. (2007). Fostering geometric thinking: A guide for teachers grades 5-10. Portsmouth, NH: Heinemann.
23. Durell, C. V., and Wright, R. M. (1925). *Elementary Geometry*. London, U.K.: G. Bell and Sons.

24. Geddes, D. (1992). Geometry in the middle grades. Reston, Virginia, U.S.A.: National Council of Teachers of Mathematics.
25. Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L., and Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, **40**, 443-453.
26. Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig, Germany: Teubner.
27. Jackson, A. (1997a). The Math Wars: California battles it out over mathematics reform (Part I). *Notices of the American Mathematical Society*, **44**(6), 695-702.
28. Jackson, A. (1997b). The Math Wars: California battles it out over mathematics reform (Part II). *Notices of the American Mathematical Society*, **44**(7), 817-823.
29. Kuratowski, K. (1962). *Introduction to Set Theory and Topology.* Oxford, U.K.: Pergamon Press.
30. Lin, F. L., Cheng, Y. H., and linfl team. (2003). The competence of geometric argument in Taiwan adolescents. *International Conference on Science* & *Mathematics Learning.* Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, 16-18 December 2003.
31. Lopez-Real, F., and Leung, A. (2006) Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **37**(6), 665-679.
32. Menger, K. (1971). The geometry relevant to modern education. *Educational Studies in Mathematics*, **4**, 1-17.
33. Moise, E. E. (1974). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint.* Massachusetts, U.S.A.: Addison — Wesley publishing company, Reading.
34. Popham, W. J. (1993). *Educational Evaluation.* Boston: Allyn and Bacon.
35. Rouse Ball, W. W. and Coxeter, H. S. M. (1892/1987). *Mathematical Recreations and Essays* (13th edition). New York : Dover Publications.
36. School Mathematics Monoid (1965a). *Modern Mathematics* (Book 1, Part 1). Hong Kong: United College Press.
37. School Mathematics Monoid (1965b). *Modern Mathematics* (Book 1, Part 2). Hong Kong: United College Press.
38. School Mathematics Monoid (1966). *Modern Mathematics* (Book 2, Part 2). Hong Kong: United College Press.
39. School Mathematics Monoid (1968a). *Modern Mathematics* (Book 2, Part 1). Hong Kong: United College Press.
40. School Mathematics Monoid (1968b). *Modern Mathematics* (Book 3, Part 1). Hong Kong: United College Press.
41. School Mathematics Monoid (1969). *Modern Mathematics* (Book 3, Part 2). Hong Kong: United College Press.
42. School Mathematics Study Group (1961). *Geometry.* New Haven, U.S.A.: Yale University Press.
43. Venema, G. A. (2006). *The Foundations of Geometry.* New Jersey, U.S.A.: Pearson Prentice Hall.
44. Wallace, E. C., and West, S. F. (2004). *Road to Geometry* (3rd edition). Upper Saddle River, New Jersey, U.S.A.: Prentice Hall
45. Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior*, **15**, 221-237.

—本文作者張家麟任教香港教育學院數學與資訊科技學系, 黃毅英任教香港中文大學課程與教學學系, 林智中任教香港教育學院課程與教學學系—