數學傳播 34卷2期, pp. 76-81

一個歷史名題的注記

蘇化明 · 黃有度

阿基米德 (Archimedes, 公元前 287年～公元前 212年) , 古希臘數學家、力學家, 生於西西里島的敍拉古地區 (可參閱 [1])。阿基米德是人類歷史上最偉大的科學家之一。美國科學史家 E. T. 貝爾 (Bell) 在《數學人物》一書中寫道:「任何一張開列有史以來三位最偉大的數學家的名單上, 必定寫有阿基米德的名字, 另兩位通常是牛頓和高斯, 不過以他們的宏偉業績和所處的時代背景來比較, 或拿他們影響當代和後來的深邃和久遠來比較, 還應首推阿基米德。」

阿基米德的成果一直被推崇爲創造性和精確性的典範。阿基米德的著述極爲豐富, 但多以類似論文手稿而非大部巨著的形式出現。這些著述內容涉及數學、力學及天文學等。阿基米德的主要數學著作有:《圓的測量》, 主要研究圓周和圓面積的計算問題;《論球與圓柱》, 主要研究球的表面積和體積的計算問題, 他使用了無窮小量, 其中很多命題的證明, 已經接近了微積分的思想方法, 但沒有求助於極限的概念;《砂計算法》, 主要研究記數法;《論螺線》是阿基米德所有數學貢獻中最光彩奪目的部分, 後世的數學家從他作螺線的切線和計算螺線的面積的方法中感受到了微積分的思維方式, 其實它已經是微積分的先聲。

計算拋物線弓形面積是阿基米德最著名的成就之一。他在《拋物線求積法》一書中研究了曲線圖形求積問題, 巧妙地用窮竭法求得拋物線與一直線相交圍成的面積是同底等高三角形面積的 $\dfrac{4}{3}$ 。下面我們將對阿基米德計算拋物線弓形面積方法作出介紹 (可參閱 [2]), 然後進一步探討與之有關的問題。

如圖 1, 設 AB 爲拋物線的弦, 分別過 A、B 作拋物線的切線相交於 P, 則 $\triangle APB$ 稱爲阿基米德三角形, AB 稱爲阿基米德三角形的底邊。

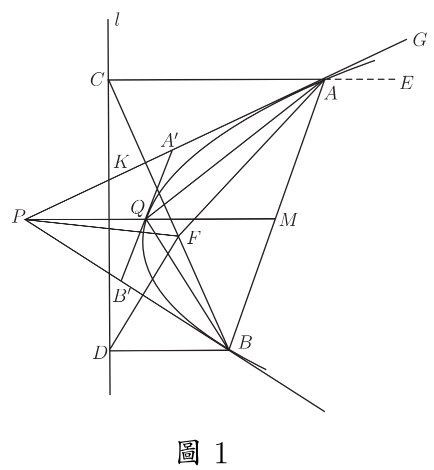

圖 1

定理 1: 阿基米德三角形底邊上的中線平行於軸, 與底邊平行的中位線是一條切線, 而且這條切線與底邊上的中線的交點是拋物線上的點。

證明如下。

如圖 1, 設拋物線的焦點爲 F, 準線爲 l, $\triangle PAB$ 爲阿基米德三角形。過 A 作 l 的垂線交 l 於 C, 連接 CF, 交 PA 於 K, 則由拋物線的定義知 $AF=AC$。再由拋物線的性質知 $\angle EAG=\angle FAK$, 而 $\angle CAK=\angle EAG$, 故 $\angle CAK=\angle FAK$, 所以 PA 垂直平分 CF。

類似地, 過 B 作垂直於 l 的直線交 l 於 D, 則 PB 垂直平分 DF, 於是 P 爲 $\triangle CDF$ 的外接圓圓心, 所以過 P 垂直於 CD 即過 P 平行於拋物線軸的直線必爲 CD 的垂直平分線, 它過 CD 的中點, 而且作爲梯形 $ABDC$ 的中位線必過 AB 的中點 M。即有: 阿基米德三角形底邊上的中線平行於拋物線的軸。

又設過底邊上的中位線 PM 與拋物線的交點 Q 所作的拋物線的切線交 PA 於 A', 交 PB 於 B', 則 $\triangle AA'Q$ 和 $\triangle BB'Q$ 也是阿基米德三角形。由前已證結果, 這兩個阿基米德三角形底邊上的中線也都平行於軸, 從而都平行於 PQ, 因此這些中線就是 $\triangle PAQ$ 和 $\triangle PBQ$ 的中位線, 從而 A'、B' 爲 PA 和 PB 的中點。所以 $A'B'$ 是 $\triangle PAB$ 的中位線, 從而 $A'B'$ 與 AB 平行, 而且 $A'B'$ 上的 Q 點也必是 PM 的中點。

定理 2: 拋物線把阿基米德三角形分成比值爲 $2:1$ 的兩部分, 或: 被拋物線所包含的面積是相應的阿基米德三角形的三分之二。

證明如下。

切線 $A'B'$ 及弦 QA 和 QB 將 $\triangle PAB$ 分成四部分:

(i) : 包含在拋物線內的 “內三角形” AQB;

(ii) : 位於拋物線外的 “外三角形” $A'PB'$;

(iii) 、(iv) : 兩個 “剩餘三角形” $AA'Q$ 和 $BB'Q$, 它們也是阿基米德三角形, 並且被拋物線所穿過。

由於 Q 點爲 PM 的中點, 所以內三角形面積是外三角形面積的兩倍。按同樣的方式, 在兩個剩餘三角形中, 每個三角形均依次產生一個內三角形、一個外三角形和兩個新的被拋物線所穿過的剩餘阿基米德三角形, 並且每個內三角形同樣又是相應的外三角形面積的兩倍, 而用這一過程可以無止境的繼續下去。

若設 $\triangle APB$ 的面積爲 S, 則內三角形 $\triangle AQB$ 的面積爲 $\dfrac{1}{2}S$, 相應的外三角形 $\triangle A'PB'$ 的面積爲 $\dfrac{1}{4}S$, 而兩個剩餘三角形 $\triangle AA'Q$ 與 $BB'Q$ 的面積均爲 $\dfrac{1}{8}S$。因此, 逐次得到的阿基米德三角形面積爲 S, $\dfrac{1}{8}S$, $\dfrac{1}{8^2}S$, $\ldots$, 相應的內三角形面積爲這樣的面積的一半。由於每個內三角形產生兩個新的內三角形, 所以得到所有的這些逐次內三角形面積之和爲

$$\frac{1}{2}\left[S+2\cdot\frac{1}{8}S+4\cdot\frac{1}{8^2}S+8\cdot\frac{1}{8^3}S+\cdots\right]。$$

括弧內是公比爲 $\frac{1}{4}$ 的等比級數, 其和爲 $S\Big/\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{3}S$, 故被拋物線包含的面積的值爲 $S_{弓}=\frac{2}{3}S$。

若 $S_{內}$ 表示內三角形 $\triangle AQB$ 的面積, 則有

$$S_{弓}=\frac{4}{3}S_{內}。$$

由定理 1知, 與 $\triangle PAB$ 底邊平行的中位線與拋物線相切於 Q, 若 $\triangle QAB$ 底邊 AB 上的高稱爲拋物線底邊 AB 上的高, 則由定理 2可得

定理 3: 拋物線所包含的部分面積等於它的底與高之積的三分之二。

由於阿基米德距離我們已有兩千多年, 阿基米德時代的科學技術和當今科學技術水平已無法相比, 因而當我們受阿基米德數學思想的啓發對與拋物線弓形有關的問題作進一步探討時, 我們將盡可能使用相對高級的數學工具去證明所得結論, 以使問題的討論過程相對簡潔。

命題 1: 設 P_1P_3 爲拋物線的弦, P_2 爲拋物線上的一點 (如圖 2), 若 $S_{弓}$ 、$S_{\triangle}$ 分別表示拋物線弓形與 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積, 則有

$$S_{\triangle}\le\frac{3}{4}S_{弓},\tag{1}$$

其中等號當且僅當 P_2 與 P_1P_3 中點的連線平行於拋物線的軸時成立。

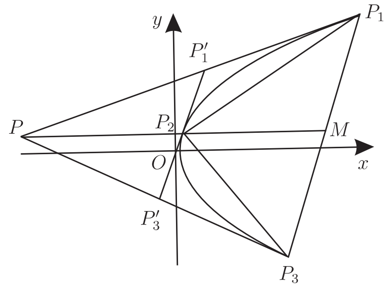

圖 2

推論: 設 $\triangle P_1PP_3$ 爲拋物線的阿基米德三角形, 過 P_2 作拋物線的切線分別交 P_1P 、P_3P 於 P_1' 、P_3', $\triangle P_1PP_3$ 、$\triangle P_1'PP_3'$ 的面積分別爲 S 和 S', 則

$$S'\le\frac{1}{4}S,\tag{2}$$

$$S_{\triangle}\le\frac{1}{2}S,\tag{3}$$

(2) 、(3) 兩式中等號當且僅當 P_2 與 P_1P_3 中點的連線平行於拋物線的軸時成立。

命題 2: 設 P_1P_3 爲拋物線的弦, P_2 爲拋物線上的點 (如圖2), 過 P_2 作拋物線軸的平行線交 P_1P_3 於 M, 則 P_2M 同時平分 $\triangle P_1PP_3$ 和拋物線弓形面積的充要條件是 M 爲 P_1P_3 的中點。

命題 3: 設 P_0 爲拋物線軸上的一定點, 過 P_0 作拋物線的弦 P_1P_3, 則當且僅當 P_1P_3 與拋物線的軸垂直時, 拋物線與 P_1P_3 所圍成的拋物線弓形面積最小。

命題 1的證明。

如圖 2, 設拋物線方程爲 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, P_1、P_2、P_3 的座標分別爲 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$, 則有

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2p}y_1^2 & y_1 & 1 \\ \frac{1}{2p}y_2^2 & y_2 & 1 \\ \frac{1}{2p}y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{4p}(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)。\tag{4}$$

因爲

$$(y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \leq \left[\frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_2 - y_3)\right]^2 = \frac{1}{4}(y_1 - y_3)^2,$$

所以

$$S_\triangle \leq \frac{1}{16p}(y_1 - y_3)^3,\tag{5}$$

其中等號當且僅當 $y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)$ 即 P_2 與 P_1P_3 中點的連線平行於拋物線的軸時成立。

拋物線過 P_1、P_2 的切線方程分別爲 $y_1y = p(x + x_1)$ 與 $y_3y = p(x + x_3)$, 解此聯立方程組得兩切線交點 P 的座標爲 $\left(\frac{1}{2p}y_1y_3, \frac{1}{2}(y_1 + y_3)\right)$, 故阿基米德三角形 $\triangle P_1PP_3$ 的面積爲

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2p}y_1^2 & y_1 & 1 \\ \frac{1}{2p}y_1y_3 & \frac{1}{2}(y_1 + y_3) & 1 \\ \frac{1}{2p}y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8p}(y_1 - y_3)^3,\tag{6}$$

於是由定理 2知

$$S_{弓} = \frac{1}{12p}(y_1 - y_3)^3。\tag{7}$$

(7) 式也可以用下面的方法得到。

如圖 3, 過 P_1、P_3 分別作 x 軸的垂線, 垂足設爲 P_1'、P_3', P_1P_3 與 x 軸交於 P_0, P_0 的座標爲 $(x_0, 0)$, 則有 $S_{弓}$ = 曲邊三角形 P_1OP_1' 的面積 + 曲邊三角形 $P_3'OP_3$ 的面積 − 直角三角形 $P_1P_0P_1'$ 的面積 + 直角三角形 $P_3P_0P_3'$ 的面積, 由定理 3知

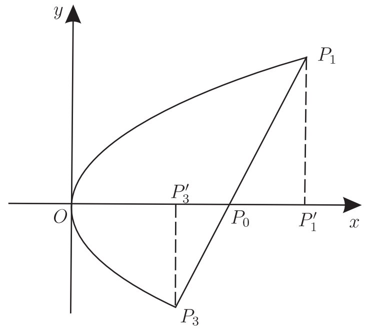

圖 3

$$\text{曲邊三角形 } P_1OP_1' \text{ 的面積 } = \frac{2}{3}x_1y_1,$$

$$\text{曲邊三角形 } P_3'OP_3 \text{ 的面積 } = \frac{2}{3}x_3|y_3|,$$

又

$$\text{直角三角形 } P_1P_0P_1' \text{ 的面積 } = \frac{1}{2}(x_1-x_0)y_1,$$

$$\text{直角三角形 } P_3P_0P_3' \text{ 的面積 } = \frac{1}{2}(x_0-x_3)|y_3|,$$

故

$$S_{\text{弓}} = \frac{2}{3}x_1y_1+\frac{2}{3}x_3|y_3|-\frac{1}{2}(x_1-x_0)y_1+\frac{1}{2}(x_0-x_3)|y_3| = \frac{1}{3p}(y_1^3-y_3^3)+\frac{1}{2}x_0(y_1-y_3)\text{。}$$

由 P_1P_3 的方程 $y-y_3=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}(x-x_1)=\dfrac{2p}{y_1+y_3}(x-x_1)$ 可得 x_0 的座標爲 $-\dfrac{y_1y_3}{2p}$, 從而

$$S_{\text{弓}} = \frac{1}{12p}(y_1^3-y_3^3)-\frac{1}{4p}y_1y_3(y_1-y_3)=\frac{1}{12p}(y_1-y_3)^3\text{。} \tag{7}$$

(7) 式還可以用積分方法得到。
由於 P_1P_3 的方程可表示爲

$$x=\frac{1}{2p}y_3^2+\frac{1}{2p}(y_1+y_3)(y-y_3),$$

故

$$S_{\text{弓}} = \int_{y_3}^{y_1}\left[\frac{1}{12p}y_3^2+\frac{1}{2p}(y_1+y_3)(y-y_3)-\frac{1}{2p}y^2\right]dy=\frac{1}{12p}(y_1-y_3)^3\text{。} \tag{7}$$

(7) 式還可以用阿基米德的方法, 通過求無窮遞縮等比數列之和的方法得到 (這裏略去) 。

由 (5) 、(7) 可得

$$S_\triangle \le \frac{3}{4}S_{\text{弓}} \tag{1}$$

且其中等號當且僅當 P_2 與 P_1P_3 中點的連線平行於拋物線的軸時成立。

推論的證明。

由定理 2的證明可知

$$S'=\frac{1}{2}S_\triangle, \tag{8}$$

$$S_{\text{弓}}=\frac{2}{3}S, \tag{9}$$

故由 (1)、(8)、(9) 知

$$S' \leq \frac{1}{4}S, \tag{2}$$

$$S_{\triangle} \leq \frac{1}{2}S, \tag{3}$$

且由不等式 (1) 中等號成立的條件知 (2)、(3) 兩式中等號當且僅當 P_2 與 P_1P_3 中點的連線平行於拋物線的軸時成立。

命題 2的證明。

由 (7) 知, 直線 P_1P_2、P_2P_3 與拋物線所圍拋物線弓形的面積分別爲 $S_1 = \dfrac{1}{12p}(y_1-y_2)^3$、$S_2 = \dfrac{1}{12p}(y_2-y_3)^3$, 顯然當且僅當 $y_2 = \dfrac{1}{2}(y_1+y_3)$ 即 P_2M 爲 $\triangle P_1P_2P_3$ 底邊 P_1P_3 的中線時 $S_1 = S_2$。

又當且僅當 P_2M 爲 $\triangle P_1P_2P_3$ 底邊 P_1P_3 的中線時, P_2M 平分 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積 $S_{\triangle}$, 故當且僅當 M 爲 P_1P_3 的中點時, P_2M 同時平分 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面積 $S_{\triangle}$ 和拋物線弓形的面積 $S_{弓}$。

命題 3的證明

由於 P_0 爲定點, 故 P_0 的橫坐標 $x_0 = -\dfrac{1}{2p}y_1y_2 > 0$ 爲定値, 因爲

$$\frac{1}{2}[y_1 + (-y_3)] \geq \sqrt{-y_1y_3} = \sqrt{2px_0}, \tag{10}$$

所以

$$S_{弓} = \frac{1}{12p}(y_1-y_3)^3 \geq \frac{4}{3}x_0\sqrt{2px_0}, \tag{11}$$

其中等號當且僅當 $y_1 = -y_3$ 即 P_1P_3 垂直於拋物線的軸時成立, 因此當且僅當 P_1P_3 垂直於拋物線的軸時拋物線弓形取得最小值 $\dfrac{4}{3}x_0\sqrt{2px_0}$。

參考文獻

1. 李文林, 數學史概論 (第二版), 北京, 高等教育出版社, 2002。
2. H. 德里 [德], 羅保華等譯, 100 個著名初等數學問題—歷史和解, 上海, 上海科學技術出版社, 1982。

—本文作者任教安徽省合肥工業大學數學與資訊科學系—