數學傳播 34卷2期, pp. 52-75

複分析五講 第一講

龔 昇・張德健

1.0. 前言: 從微積分說起

簡單來說, 複變函數論是在複平面上討論微積分。如同對任何的數學進行推廣那樣, 往往一部分的內容可以毫無困難地直接得到, 但另一部分的內容卻是推廣後所獨有的。前一部分固然重要, 但人們更有興趣的是後面那一部分, 因爲常常是這一部分才眞正刻劃了這學科的本質。

在這一講中, 我們先簡單地回顧一下什麼是微積分, 然後再看看微積分中那些結果是可以直接推廣到複數領域的, 而在以後的各講中著重討論一些本質不同, 只在複數域上才特有的一些主要性質與結果。關於微積分的部分, 讀者可以參考我們以前在《數學傳播》上發表過的「微積分五講」。

正如在「微積分五講」中提過, 微積分是由三個部分組成, 即微分, 積分以及聯繫微分與積分成爲一個對立的微積分基本定理, 即 Newton-Leibniz 公式。

我們知道若 $y=f(x)$ 爲定義在區間 (a,b) 上的一個函數, 若在 (a,b) 中的一點 x 極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在這點可微, 記這個極限值爲 $\dfrac{df}{dx}$ 或 $f'(x)$。我們稱 $df=f'(x)dx$ 爲 $f(x)$ 在點 x 的微分。如果函數 f 在 (a,b) 上每一點都可微, 則稱函數 f 在 (a,b) 上可微。

另一方面, 如果 $y=f(x)$ 爲定義在 $[a,b]$ 上的一個非負函數, 將 $[a,b]$ 分爲任意 n 個小區間 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 而 ξ_j 爲 $[x_{j-1},x_j]$ 中任一點, 如果令 $n\to\infty$, 且所有 $[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,\ldots,n)$ 的長度都趨於零, 如果極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$ 存在, 則稱 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可積, 記此極限爲 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$。這便是微積分最最基本的定義及出發點, 並且都有很明確的幾何意義, 而微分是 $y=f(x)$ 所描繪的曲線在點 (x,y) 處的斜率, 積分是曲線 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的曲邊梯形的面積。

微分, 積分的概念古已有之, 使之成爲一門學問而發揚光大是由於 Newton 和 Leibniz 證明了微積分基本定理, 即指出了微分與積分是一組對立, 這個基本定理有兩種相互等價的表達形式。

微積分基本定理 (微分形式)

設函數 $f(t)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續, x 是 $[a,b]$ 中的一點, 令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b,$$

則 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微, 並且 $\Phi'(x) = f(x)$, 即 $d\Phi(x) = f(x)dx$, 換句話說, 若 $f(x)$ 的積分是 $\Phi(x)$, 則 $\Phi(x)$ 的微分就是 $f(x)dx$。

微積分基本定理 (積分形式)

設 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微, 且 $\dfrac{d\Phi}{dx}(x)$ 等於連續函數 $f(x)$, 則下面式子成立:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a), \quad a \le x \le b.$$

換句話說, 若 $\Phi(x)$ 的微分是 $f(x)dx$, 則 $f(x)$ 的積分就是 $\Phi(x)$。

有了這個定理, 求積分成爲求微分的逆運算, 而微分與積分的一些性質彼此相互對應, 即是一個理論的兩種解述。例如:

$$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx},$$

與

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

相對應; 而微分的乘法原則

$$\frac{d}{dx}(fg)(x) = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx}g(x)$$

與部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

相對應; 由 Chain rule: 若 $u = f(y)$, $y = g(x)$, 則

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

與積分換變數

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$$

相對應等等, 我們就不在此一一贅述了。

在微積分中一般討論初等函數及其複合函數, 所謂初等函數是指下面三類函數, 即

1. 冪函數 x^a, $a \in \mathbb{R}$; 多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, a_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ 爲實常數; 有理分式
$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}{c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_px^p},$$
這裡 b_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$, c_k $(k = 0, 1, \ldots, p)$ 爲實常數; 以及其反函數。
2. 三角函數 $\sin x$, $\cos x$ 等等及其反函數, 如 $\arcsin x$, $\arccos x$ 等等。
3. 指數函數 e^x, 2^x 等等及其反函數 $\ln x$, $\log_2 x$ 等等。

而所謂函數 $f(x)$ 的 Taylor 展開式及 Fourier 展開式不過是用第一類中的多項式來逼近函數 $f(x)$, 以及用第二類中的 $\sin(nx)$, $\cos(nx)$ 等來逼近函數 $f(x)$。所以沒有用第三類初等函數, 即指數函數來逼近函數 $f(x)$ 的原因之一是下面即將講到的 Euler 公式: 指數函數可以表爲三角函數。當然一些重要的初等函數的 Taylor 級數是熟知的。例如:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$
$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad (-1 < x \le 1)$$
$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots, \quad (|x| < 1,\ r \in \mathbb{R})$$

等等。

以上我們只是十分簡單地回顧了一維微積分的大概。至於高維度的微積分基本定理, 也有相對應的三個部分, 即微分, 積分及聯繫微分與積分的微積分基本定理。只是在微分的部分有偏微分, 全微分, 而與微分相當的是 Jacobi 矩陣; 在積分的部分有重積分, 線積分, 面積分等, 這些都是一維微分與積分的自然推廣, 於是也可以列出其相對應的定理, 這裡不多敍述了。對於第三部分, 我們在此要補充幾句話, 說明在高維情況下, 什麼是微積分的基本定理? 是什麼定理刻劃了在高維的情況下, 微分與積分是相對應的逆運算? 答案是: Green 公式, Stokes 公式及 Gauss 公式。

Green **公式** 若 Ω 爲 xy 平面上封閉曲線 L 圍成的閉區域, 函數 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 Ω 上有一階連續偏導數, 則

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Stokes **公式** 設在空間有曲面 Σ, 邊界是封閉曲線 L, 函數 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 及 $R(x,y,z)$ 有一階連續偏導數, 則

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Gauss **公式** 設 V 是空間封閉曲面 Σ 所圍成的閉區域, 函數 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, 及 $R(x,y,z)$ 在 V 上有一階連續偏導數, 則

$$\oiint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

這三個公式都刻劃了在邊界上積分與內部積分的聯繫, 如果我們用外微分形式, 那麼這三個公式可以寫成一個公式, 稱爲 Stokes 公式, 要十分嚴謹地敍述外微分形式需要很多篇幅, 但這可以在很多微積分的教材中找到, 以前發表的「微積分五講」就是用這個觀點來介紹的。這裡我們只簡略地介紹。

定義微分 dx 與 dy 的外乘積爲 $dx \wedge dy$, 它滿足下面的規則:

(1) $dx \wedge dx = 0$, 即兩個相同微分的外乘積 (extersior product) 爲零。

(2) $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, 即兩個不同微分的外乘積交換次序差一個負號。

當然, (1) 可以看成 (2) 的推論。由微分的外乘積乘上函數組成的微分形式 (differential form) 稱爲外微分形式。例如, 若 P, Q, R, A, B, C, H 爲 x, y, z 的函數, 則

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

爲一次外微分形式;

$$Adx \wedge dy + Bdy \wedge dx + Cdz \wedge dx$$

爲二次外微分形式;

$$Hdx \wedge dy \wedge dz$$

爲三次外微分形式; 而 P, Q, R, A, B, C, H 稱爲微分形式的係數。對於外微分形式 ω 可以定義外微分算子 d, 它的定義如下:

對於零次外微分形式, 即函數 f, 定義

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

即普通的全微分算子。對於一次外微分形式 $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$, 定義

$$d\omega=dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz,$$

即對 P, Q, R 進行微分, 然後進行外乘積; 通過外乘積的運算規則, 可得

$$\begin{aligned}d\omega=&\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx\\&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.\end{aligned}$$

對於二次外微分形式 $\omega=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdxdy$ 也是同樣定義

$$\begin{aligned}d\omega&=dA\wedge dy\wedge dz+dB\wedge dz\wedge dx+dC\wedge dx\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{dz}\right)dx\wedge dy\wedge dz.\end{aligned}$$

對於三次外微分形式 $\omega=Hdx\wedge dy\wedge dz$ 也是同樣定義

$$d\omega=dH\wedge dx\wedge dy\wedge dz.$$

可以證明這恆等於零。如果規定 $ddx=ddy=ddz=0$, 則外微分算子 d 與普通微分算子是一樣的了, 即對每一項進行運算, 在每一項中分別對每一個因子進行運算, 其餘因子不動, 將得出的各項相加, 不同的只是外微分算子 d 是在運算之後進行外乘積, 由此立即得到下面這個重要的結果。

Poincaré **引理** 若 ω 爲一外微分形式, 其係數具有二階連續偏導數, 則 $dd\omega=0$。其逆也成立, 即若 ω 是一個 n 次外微分形式, 且 $d\omega=0$, 則存在一個 $n-1$ 次外微分形式 α 使得 $d\alpha=\omega$。

有了這些準備之後, 那麼 Green 公式, Stokes 公式與 Gauss 公式可以統一地寫成

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega, \tag{0.1}$$

這裡 ω 爲外微分形式, $d\omega$ 爲 ω 的外微分, Σ 爲 $d\omega$ 的積分區域爲一封閉區域, $\partial\Sigma$ 表示 Σ 的邊界, $\int$ 表示區域有多少維數就是多少重數積分。事實上, 當 ω 爲零次外微分形式, (0.1) 就是 Newton-Leibniz 公式; 當 ω 爲一次外微分形式, 在平面的情形, (0.1) 就是 Green 公式; 在三維空間, (0.1) 爲 Stokes 公式; 當 ω 爲二次外微分形式, (0.1) 就是 Gauss 公式。(0.1) 眞正刻劃了微分與積分是一組對立的運算。這個公式不僅對三維歐氏空間成立, 而且對任意高維的歐氏空間也成立。不僅如此, 對於更一般的流形上也是成立的, 所以 (0.1) 是高維空間的微積分基本定理!

當然, 這個對微積分的回顧是相當粗略的, 但我們認爲有了這個回顧, 思路便可以理清楚, 而複變函數理論是複數體上的微積分, 是普通微積分的延續, 公式 (0.1) 成爲這五講的出發點也就是十分自然的事了。

1.1. 複數體, 擴充複平面及其球面表示

複數的全體組成複數體, 它是實數體的擴充。

在初等代數中已經知道, 虛數單位 i 具有性質 $i^2 = -1$, 將這一虛數單位與兩個實數 a, b 用加、乘結合起來得到複數 $a + ib$, a, b 分別稱爲這一個複數的實部 (real part) 與虛部 (imaginary part)。若記 $z = a + ib$, 則記 $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$, 兩複數相等若且唯若實部與虛部相等。複數的四則運算爲: 若 $z = a + ib$, $w = c + id$

$$z \pm w = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d),$$
$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

若 $w \neq 0$, 則

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

若複數 $z = a + ib$, 則 $a - ib$ 稱爲 z 的共軛 (Conjugate) 複數, 記作 $\overline{z}$, 於是

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$
$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

$z\overline{z} = a^2 + b^2$, 記作 $|z|^2$, 而 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 稱爲複數 z 的絕對値。顯然 $|z| \geq 0$。若 $w \neq 0$, 則我們有

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$
$$|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z\bar{w}), \qquad |z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{等等。}$$

對於平面上一個給定的直角座標系來講, 複數 $z=a+ib$ 可以用座標 (a,b) 的點來表示。第一個座標稱爲實軸, 第二個座標稱爲虛軸, 所在的平面稱爲複平面 (complex plane) 或高斯平面 (Gauss plane), 記作 $\mathbb{C}$。

一個複數不僅可以用一個點來表示, 而且可用一個由原點指向這個點的向量來表示, 這個複數, 這個點, 這個向量都用同一個字母 z 來表示。與通常一樣, 任一向量作平行移動後得到的所有向量都視爲與原向量恆等。於是複數的加法成爲向量的加法, 而複數的公式往往賦有幾何意義, 例如複數 z 的絕對值 $|z|$ 便可表示爲向量 z 的長度; $|z+w|\le|z|+|w|$ 表示三角形兩邊邊長之和大於第三邊的長度等等。

對複數也可以引入極座標 (r,θ)。複數 $z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, 顯然 $r=|z|$, r 稱爲複數 z 的模(modulus), θ 稱爲複數 z 的幅角(argument), 如果

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\qquad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

則

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\Big(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big)=r(\cos\theta+i\sin\theta);\end{aligned}$$

即 $r=r_1r_2$, $\theta=\theta_1+\theta_2$。複數 z 的幅角不唯一, 因爲 $\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 仍爲一個幅角, 記一般的幅角爲 $\arg(z)$, 特別當 $0\le\theta<2\pi$ 時, 稱爲主幅角(Principal argument), 記作 $\operatorname{Arg}(z)$。

若 $z=x+iy$, z_0 爲一固定的複數, r 爲一個固定的正實數, 則

$$|z-z_0|=r$$

表示一個以 z_0 爲中心, r 爲半徑的圓周; $|z-z_0|<r$ 表示一個以 z_0 爲中心, r 爲半徑的圓盤, 記作 $D(z_0;r)$。同樣, 上半平面可以用 $\operatorname{Im}(z)>0$ 來表示, 左半平面可以用 $\operatorname{Re}(z)<0$ 來表示等等。

引入座標, 得到高斯平面 $\mathbb{C}$, 但如何來處理無窮遠點呢? 在複變函數論中, 我們引入一個 “點”, 叫做無窮遠點, 記作 ∞, 以此來擴張 $\mathbb{C}$, 對所有有限的複數 $z\in\mathbb{C}$, $z+\infty=\infty+z=\infty$。對所有 $w\ne0$, $w\cdot\infty=\infty\cdot w=\infty$, $\dfrac{z}{0}=\infty$ $(z\ne0)$ 及 $\dfrac{z}{\infty}=0$ 等等, $\mathbb{C}$ 上所有的點加上 “∞”, 組成擴充複數平面, 記作 $\mathbb{C}^*$, 即 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$。在本文中, 擴充複數平面指的就是 $\mathbb{C}^*$。

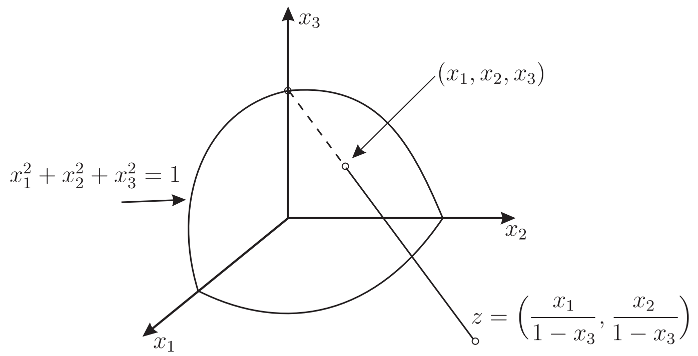

圖1

下面我們要對擴充複數平面作個幾何模型, 在這個模型上一切擴充平面上的點都有一個具體的表示, 這便是球面表示, 它是通過球極平面投影 (Stereographic projection) 得到的。

考慮一個三維空間的單位球面 $\mathbb{S}^2$, 其方程式爲 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ (此處三維空間的直角座標爲 x_1, x_2, x_3), 在 $\mathbb{S}^2$ 上的每一點, 除 "北極" (0, 0, 1) 之外, 我們都可用一個複數

$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3} \tag{1.1}$$

與之相對應, 這個對應是一對一的 (見圖 1)。事實上, 由 (1.1) 可得到

$$|z|^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1+x_3}{1-x_3},$$

因之得到

$$x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}, \quad x_1=\frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \quad x_2=\frac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)}. \tag{1.2}$$

令無窮遠點 ∞ 對應於 $(0,0,1)$, 就完成了球面 $\mathbb{S}^2$ 上的點與擴充複平面 $\mathbb{C}^*$ 上的點之間的一對一對應。因之, 可以把球面 $\mathbb{S}^2$ 稱爲里曼球面 (Riemann sphere)。顯然, $x_3<0$ 的半球面對應於單位圓盤 $|z|<1$, 而 $x_3>0$ 的半球面對應於單位圓盤的外部 $|z|>1$ 等等。

如複平面爲以 x_1 軸爲實軸, x_2 軸爲虛軸的 (x_1,x_2) 平面, 則 (1.1) 有明確的幾何意義, 取 $z=x+iy$, 則由 (1.1) 得

$$x:y:-1=x_1:x_2:x_3-1.$$

這說明點 $(x,y,0)$, (x_1,x_2,x_3), $(0,0,1)$ 在一條直線上, 因此, 這個對應實際上是以 $(0,0,1)$ 爲中心的中心投影, 將 $\mathbb{S}^2$ 上的點投影到 $\mathbb{C}^*$ 上, 這稱爲球極平面投影, 在球面表示中, 無窮遠點不再有任何特殊了!

1.2. 複微分

如同普通微積分中那樣, 我們可以定義複數體上的複值函數 $w=f(z)$, 這裡 $z,w\in\mathbb{C}$, 爲了有確切的意義, 我們先限定 $f(z)$ 爲單值的。我們也可以用 $\varepsilon-\delta$ 的語言來定義函數的極限, 即

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$$

是指任給 $\varepsilon>0$, 存在一個正數 δ, 對於所有複平面上的 z, 只要 $|z-z_0|<\delta$ $(z\neq z_0)$, 我們有 $|f(z)-A|<\varepsilon$, 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 則稱 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 處連續。

如同普通微積分中那樣, 可以在複平面上定義開集合、閉集合, 集合的連通性、緊緻性等等。定義複平面中的曲線爲區間 $[a,b]$ 上的連續複值函數 $\gamma(t)$: $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$, $a\leq t\leq b$, 此處 $x(t)$ 及 $y(t)$ 爲 t 的連續函數, $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ 稱爲曲線 $\gamma(t)$ 的端點。如果 $\gamma(a)=\gamma(b)$, 則稱 $\gamma(t)$ 爲閉曲線, 曲線的方向就是 t 增加的方向, 如果 $\gamma'(t)$ 存在且連續, 則稱 $\gamma(t)$ 爲光滑曲線, 如果 $\gamma'(t)$ 除去有限個 t 外是連續的, 在這有限個 t 處, $\gamma(t)$ 有左、右導數, 則稱 $\gamma(t)$ 爲分段光滑曲線, 分段光滑曲線是可以求長的。若曲線 $\gamma(t)$ 僅當 $t_1=t_2$ 時, $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, 則稱 $\gamma(t)$ 爲簡單曲線, 或 Jordan 曲線。若 $\gamma(t)$ 同時是閉曲線, 則稱 $\gamma(t)$ 爲簡單閉曲線或 Jordan 閉曲線。

複平面上的一個點集合 Ω 稱爲一個區域 (domain), 如果

(1) Ω 爲開集合;

(2) Ω 爲連通, 即 Ω 上任意兩個點均可用完全位於 Ω 內的分段光滑曲線把它們連接起來。

區域 Ω 的邊界記作 $\partial\Omega_0$, 區域 Ω 稱爲單連通 (simply-connected) 的, 如果 Ω 內任何簡單閉曲線的內部仍屬於 Ω, 不是單連通的區域稱爲多連通區域 (multiply-connected domain)。由兩條 Jordan 閉曲線所圍成的區域是二連通區域, 由 n 條 Jordan 閉曲線所圍成的區域是 n 連通區域, 這些閉曲線可能退化成爲一個點或一條 Jordan 曲線。此外, 如同實數體的情形那樣, 我們可以證明 Heine-Borel 定理, Bolzano-Weiestrass 定理等等, 這裡不再詳敍。

Heine-Borel **定理**：若 K 爲 $\mathbb{C}$ 中的一個緊緻集合, G 爲 K 的一個開覆蓋, 則從 G 中可以選出有限個開集合覆蓋 K。

Bolzano-Weiestrass **定理**：任何一個有界的無窮集合至少有一個極限點。

我們現在來討論複變數複值函數的導數, 若 $w=f(x)$, 那麼自然地我們可以考察

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

這裡 $h \in \mathbb{C}$。如果這個極限對於所有的 $h \to 0$ 都存在且相等, 則稱 $f(z)$ 在 z 點可微, 記作 $\dfrac{df}{dz}$ 或 $f'(z)$, 稱爲 $f(z)$ 在 z 點的微商或導數(derivative)。

如果 $f(z)$ 在其定義區域上每一點都可微, 則稱 $f(z)$ 爲其定義區域上的解析函數 (analytic function) 或全純函數 (holomorphic function), 這個定義與普通微積分中微商的定義是一致的, 因此, 複微商的四則運算, 複合函數的微分等公式也是一致的, 這些公式讀者可以立即寫出來, 我們不再詳述! 但是, 複導數終究是在複平面上進行, 所以這裡有一些特殊的地方。

若

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

在點 $z_0 = x_0 + iy_0$ 處可微, 則

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

對任意途徑 $z \to z_0$ 都存在且相等, 特別 z 沿著平行於座標軸的途徑趨於 z_0 也應存在且相等。先令 $z = x + iy_0$, $x \to x_0$, 則

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

再令 $z = x_0 + iy$, $y \to y_0$, 則

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \left[\frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

比較兩式的實部與虛部, u, v 在點 (x_0, y_0) 處應滿足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.1}$$

(2.1) 式也可以寫成

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-i) \frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.2}$$

方程式 (2.1) 與 (2.2) 都稱爲 Cauchy-Riemann 方程, 簡稱 C-R 方程。C-R 方程爲 $f(z)$ 在一點 $z = z_0$ 處可微的必要條件, 但並不是充分條件。例如

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

在 $z=0$ 處, $f(z)$ 滿足 C-R 方程, 但不可微, 因爲取 $x=my$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(z)}{z}=\frac{\overline{z}^2}{z^2}=\frac{m^4-4m^3i-6m^2-4mi+1}{m^4+2m^2+1},$$

令 $z\to 0$ 其極限不唯一! 但我們可以證明下面的定理。

定理 2.1. 函數 $f(z)=u\pm iv$ 在區域 Ω 內全純的充要條件是: u, v 在 Ω 內有一階連續偏導數, 且滿足 C-R 方程 (2.1) 或 (2.2)。

證明: (1) 必要性: 若 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 處可微, 則由上面討論, f 滿足 C-R 方程 (2.1) 或 (2.2)。在下一講中我們將證明, 全純函數的導數也是全純函數, 故 $f'=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ 也是連續函數。

(2) 充分性: 設 u, v 在點 $z_0=x_0+iy_0$ 處有一階連續偏導數, 且滿足 C-R 方程 (2.1), 記 $a=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$, 那麼

$$\begin{aligned}u(x,y)-u(x_0,y_0)&=a(x-x_0)-b(y-y_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|),\\ v(x,y)-v(x_0,y_0)&=b(x-x_0)+a(y-y_0)+\varepsilon_2(|\Delta z|),\end{aligned}$$

其中 $|\Delta z|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, ε_1, ε_2 滿足

$$\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{|\Delta z|}=0.$$

將上面之第二式乘以 i 與第一式相加, 則得到

$$f(z)-f(z_0)=(a+ib)(z-z_0)+\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|),$$

即爲

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-(a+ib)=\frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)+i\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z-z_0}.$$

所以

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=a+ib,$$

即

$$f'(z_0)=a+ib=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0),$$

定理因而證畢。

上面的定理可以有如下的改進:

Loomen-Menchoff 定理

若 $f(z)$ 在開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 中連續, 且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 與 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 中每一點都存在, 且滿足 C-R 方程 (2.1), 則 $f(z)$ 在 Ω 上全純。

Loomen-Menchoff 定理說明定理 2.1 中 u, v 有一階連續偏導數的條件是不必要的, 前面所舉的例子, $f(z)=\begin{cases}\overline{z}^2/z, & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ 在 $z=0$ 並不滿足 Loomen-Menchoff 定理的條件。當然, 我們在此不可能也沒有這個必要來證明這定理。

在第二講中如何將證明: 如 $f(z)=u+iv$ 在區域 Ω 內全純, 則其微分 $f'(z)$ 也是 Ω 內的全純函數, 所以 u, v 的二階偏導數也是連續的, 因而二階混合偏導數 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 與 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 是相等的, 由 C-R 方程得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

因而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

同樣可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

這個方程稱爲 Laplace 方程, 它是偏微分方程理論中三個最基本的偏微分方程之一, 即橢圓型方程的典型範例, 記作

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

此處

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

滿足 $\Delta u=0$ 的函數 u 稱爲調和函數。我們在此看到一個事實, 即全純函數 $f=u+iv$ 的實部與虛部均爲調和函數。

由於 $z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy$, 於是 $x=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$, $y=\dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$, x, y 的函數 $f(x,y)$ 可以考慮爲 z 及 $\overline{z}$ 的函數, 把 z 及 $\overline{z}$ 看作自變數, 如微分法則可用,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\pm i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

應用這個記號, 則一個函數 f 是全純的若且唯若 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, 換句話說, 一個全純函數是與 $\overline{z}$ 無

關, 而只是 z 的函數, 所以全純函數可以看作是一個複變數 z 的函數, 而不稱之爲兩個實變數的複值函數。$\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ 又等價於 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial z}$。應用這些記號, 則

$$\Delta=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}=4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

複微商有很好的幾何性質, 即共形性 (conformal property)。

設函數 $f(z)$ 在區域 Ω 內全純, $z_0\in\Omega$, $f'(z_0)\neq 0$, $\gamma(t)$, $0\leq t\leq 1$, 爲 Ω 內過點 z_0 的一條光滑曲線, 且 $\gamma(0)=z_0$, $\gamma(t)$ 在點 z_0 的切線與實軸的夾角爲 $\arg(\gamma'(0))$, $f(z)$ 把 $\gamma(t)$ 映爲過點 $\omega_0=f(z_0)$ 的光滑曲線 $\sigma(t)=f(\gamma(t))$, 於是

$$\sigma'(t)=f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t),\quad \sigma'(0)=f'(z_0)\cdot\gamma'(0),$$

而 $\sigma(t)$ 在點 ω_0 的切線與實軸的夾角爲

$$\arg(\sigma'(0))=\arg(f'(z_0))+\arg(\gamma'(0)),$$

此即爲

$$\arg(\sigma'(0))-\arg(\gamma'(0))=\arg(f'(z_0)).$$

即 $\sigma(t)$ 在點 ω_0 處切向量的幅角與 $\gamma(t)$ 在點 z_0 處切向量的幅角之差總是 $\arg(f'(z_0))$, 與 $\gamma(t)$ 無關, 因此, 這點 z_0 的任意兩條光滑曲線 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $0\leq t\leq 1$, $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=z_0$, 它們在 $f(z)$ 映射下的像分別是過點 $w_0=f(z_0)$ 的光滑曲線 $\sigma_1(t)$ 與 $\sigma_2(t)$, 於是

$$\arg(\sigma_2'(0))-\arg(\gamma_2'(0))=\arg(\sigma_1'(0))-\arg(\gamma_1'(0)),$$

即

$$\arg(\sigma_2'(0))-\arg(\sigma_1'(0))=\arg(\gamma_2'(0))-\arg(\gamma_1'(0)).$$

所以 $\gamma_1(t)$ 與 $\gamma_2(t)$ 在點 z_0 處的夾角等於 $\sigma_1(t)$ 與 $\sigma_2(t)$ 在點 $w_0=f(z_0)$ 處的夾角, 也就是說, 在映射 $w=f(z)$ 之下, 在導數不爲零的點處, 兩條光滑曲線的夾角的大小及旋轉的方向是保持不變的, 此爲 $f(z)$ 在 z_0 處的保角性(conformal property)。

另一方面, 由於

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},$$

任取這 z_0 的曲線 $\gamma_1(t)$, 在映射 $f(z)$ 下成爲 $\sigma(t)$, 那麼

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\gamma}}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|.$$

即像點之間的距離與原來兩點之間的距離之比的極限與曲線無關, 稱 $|f'(z_0)|$ 爲 $f(z)$ 在點 z_0 處的伸長度, 因此任意一個以 z_0 爲頂點的小三角形, 經過 $f(z)$ 映射後, 成爲一個曲邊三角形, 它們的微分三角形是相似的。

上述兩個性質加在一起, 稱爲共形性, 所以我們稱在 Ω 上的全純映射爲共形映射 (conformal mapping) (conformal mapping) (若 $f'(z)\neq 0$), 在後面幾講中, 我們要詳細討論這一主題。

1.3. 複積分

假設 $f(t)=u(t)+iv(t)$ 爲一個在實區間 $[a,b]$ 上定義的複値函數, 則

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt.$$

如果 γ 是一個分段可微弧段, 其方程爲 $z=z(t)$, $t\in[a,b]$, $f(z)$ 在 γ 上定義且連續, 則 $f(z(t))$ 也是 t 的連續函數, 令

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

作爲 $f(z)$ 沿複曲線 γ 上積分的定義, 這是一個參數變換下的不變的積分。

如有增函數 $t=(t(r))$ 將 $r\in[c,d]$ 映爲 $a\le t\le b$, $t(r)$ 爲逐段可微, 則

$$\begin{aligned}\int_a^b f(z(t))z'(t)dt&=\int_c^d f(z(t(r)))z'(t(r))t'(r)dr\\&=\int_c^d f(z(t(r)))\frac{dz(t(r))}{dr}dr.\end{aligned}$$

如果用 Riemann 和來定義線積分, 也可以獲得同樣的結果。於是我們便有與普通線積分一樣的性質, 例如

$$\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_\gamma f(z)dz;$$

如果 $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$, 則

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n} f(z)dz=\sum_{j=1}^n\int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

所以對複積分沒有大多可以講的了。那麼對於微積分的第三部分, 也就是聯繫微分與積分成爲一對對立的微積分基本定理 (參考微積分五講), 我們要怎樣應用到複分析上呢? 在複平面上,

對應的是複形式的 Green's 公式, 我們現在盡量用一般通行的符號將之書寫出來。為此緣故, 我們採用複的外微分形式, 視 z 與 $\overline{z}$ 為獨立變量, 定義微分的外乘積為:

$$dz\wedge dz=0,\quad d\overline{z}\wedge d\overline{z}=0,\quad dz\wedge d\overline{z}=-d\overline{z}\wedge dz,$$

這裡

$$dz=dx+idy,\quad d\overline{z}=dx-idy.$$

所以

$$\begin{aligned}d\overline{z}\wedge dz&=(dx-idy)\wedge(dx+idy)=-idy\wedge dx+idx\wedge dy\\&=2idx\wedge dy=2idA,\end{aligned}$$

這裡 dA 為二維面積元素, 如同實分析的情況, 定義 0 次外微分形式為函數 $f(z,\overline{z})$; 一次外微分形式為 $w_1dz+w_2d\overline{z}$, 其中 w_1, w_2 為 z, $\overline{z}$ 的函數; 二次外微分形式為 $wdz\wedge d\overline{z}$, 其中 w 為 z, $\overline{z}$ 的函數。定義外微分算子 $d=\partial+\overline{\partial}$, 其中 $\overline{\partial}=\dfrac{\partial}{\partial\overline{z}}$, $\partial=\dfrac{\partial}{\partial z}$, 我們很容易證明 $ddw=0$ 對任意外微分形式都成立, 於是複形式的 Green's 公式為

定理 1.1. 若 $w=w_1dz+w_2\,d\overline{z}$ 為區域 Ω 上的一次外微分形式, 這裡 $w_1=w_1(z,\overline{z})$, $w_2=w_2(z,\overline{z})$ 均為 $z,\overline{z}$ 的可微函數, d 為外微分算子, 即 $d=\partial+\overline{\partial}$, 在此 $\partial=\dfrac{\partial}{\partial z}$, $\overline{\partial}=\dfrac{\partial}{\partial\overline{z}}$, 記 Ω 的邊界為 $\partial\Omega$, 則

$$\int_{\partial\Omega}w=\iint_{\Omega}dw.\tag{3.1}$$

證明: 若 $w_1=\xi_1+i\eta_1$, $w_2=\xi_2+i\eta_2$, 在此 ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 均為實值可微函數, 於是

$$\begin{aligned}w&=w_1dz+w_2d\overline{z}\\&=(\xi_1+i\eta_1)(dx+idy)+(\xi_2+i\eta_2)(dx-idy)\\&=\Big[(\xi_1+\xi_2)dx+(-\eta_1+\eta_2)dy\Big]+i\Big[(\eta_1+\eta_2)dx+(\xi_1-\xi_2)dy\Big].\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}dw&=\partial(w_1dz+w_2d\overline{z})+\overline{\partial}(w_1dz+w_2d\overline{z})\\&=\frac{\partial w_1}{\partial z}dz\wedge dz+\frac{\partial w_1}{\partial\overline{z}}d\overline{z}\wedge dz+\frac{\partial w_2}{\partial z}dz\wedge d\overline{z}+\frac{\partial w_2}{\partial\overline{z}}d\overline{z}\wedge d\overline{z}\\&=\left(\frac{\partial w_1}{\partial\overline{z}}-\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)d\overline{z}\wedge dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\xi_1+i\eta_1)-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)(\xi_2+i\eta_2)\right]2idA\\
&= \left[-\Big(\frac{\partial\xi_1}{\partial y}+\frac{\partial\eta_1}{\partial x}+\frac{\partial\xi_2}{\partial y}-\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\Big)+i\Big(\frac{\partial\xi_1}{\partial x}-\frac{\partial\eta_1}{\partial y}-\frac{\partial\xi_2}{\partial x}-\frac{\partial\eta_2}{\partial y}\Big)\right]dA
\end{aligned}
$$

由 Green's 公式, 我們有

$$\int_{\partial\Omega}(\xi_1+\xi_2)dx+(-\eta_1+\eta_2)dy=\iint_{\Omega}\bigg(-\frac{\partial}{\partial x}(\eta_1-\eta_2)-\frac{\partial}{\partial y}(\xi_1+\xi_2)\bigg)dA$$

及

$$\int_{\partial\Omega}(\eta_1+\eta_2)dx+(\xi_1-\xi_2)dy=\iint_{\Omega}\bigg(\frac{\partial}{\partial x}(\xi_1-\xi_2)-\frac{\partial}{\partial y}(\eta_1+\eta_2)\bigg)dA$$

所以式子 (3.1) 成立。

公式 (3.1) 在高維複歐氏空間也成立, 在複流形上也成立, 所以這是一般情況的特例, 這個一般形式也叫做 Stokes' 公式, 這個公式是第二講的出發點之一。

1.4. 初等函數

在微積分中, 初等函數是由三類函數以及它們的複合函數所構成的, 這三類函數是

(1) 冪函數, 多項式, 有理分式及其反函數;

(2) 三角函數及其反函數;

(3) 指數函數及其反函數, 即對數函數。

在複數體中如何定義這三類函數? 有些是顯而易見的, 例如, 對於多項式只要將實變數換成複變數即可。但另外一些函數, 如 $\sin z$, 當 z 是複數時, 這是什麼意思? 又如 e^z 當 z 是複數時, 這又是什麼意思? 對這些函數, 我們必須重新定義! 即要有確切的意義, 當變數限制在實數體時, 又要與原來的定義一致, 一個自然的想法是用級數來定義!

若 $y\in\mathbb{R}$, 則

$$e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots$$

十分自然地去定義

$$
\begin{aligned}
e^{iy}&=1+\frac{(iy)}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\cdots+\frac{(iy)^n}{n!}+\cdots\\
&=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(-y)^2}{2!}-\frac{iy^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\\
&=\bigg(1-\frac{y^3}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots\bigg)+i\bigg(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\bigg)
\end{aligned}
$$

但是我們知道:

$$1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots=\cos y$$
$$\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots=\sin y$$

所以就有

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{4.1}$$

這就是著名的 Euler 公式。

這裡建議對任意的複數 $z=x+iy$, 定義

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{4.2}$$

於是, (4.1) 是 (4.2) 的推論, (4.1) 是非常重要的公式, 它告訴我們指數函數與三角函數之間是可以互相表示的。由 (4.1) 即得

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\qquad \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$$

由此建議我們: 對任意複數 $z=x+iy$, 定義

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{4.3}$$

當然, 由此我們也可定義: $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$ 等等。由 (4.3) 我們立刻可以得到, 若 y 爲實數, 則 $\cos(iy)=\cosh y$ 及 $\sin(iy)=i\sinh y$。

從定義 (4.2) 可以定義 e^z 的反函數 $\log z$, 這可以看成滿足 $e^w=z$ 的複數 w 稱爲 z 的對數, 記作 $\log z$。同樣由 (4.3) 可以定義 $\cos z$ 及 $\sin z$ 的反函數, $\arcsin z$ 及 $\arccos z$ 等等。

對於冪函數 z^a, 當 a 爲整數時, 其意義是十分明確的, 對於任意的複數 a, 十分自然地可定義

$$w=z^a=e^{a\log z}. \tag{4.4}$$

由 (4.2), (4.3) 及 (4.4) 定義的函數性質, 我們下面會作進一步的討論。但在這裡我們想指出, 在微積分中看來互不相關的三類初等函數, 在複數體中卻成爲一類, 即指數函數及其反函數, 而三角函數及其反函數, 冪函數及其反函數均可由此來表達。我們之所以能這樣做, 其關鍵在於公式 (4.1), 即 Euler 公式, 這是個十分深刻的公式, 例如當 $y=\pi$ 時, 則公式 (4.1) 成爲 $e^{i\pi}=-1$, 這是聯繫數學中四個重要的常數, π, e, i, -1 的一個公式。又例如有用的 De Moivre 公式,

$$(\cos y+i\sin y)^n=\cos(ny)+i\sin(ny),$$

也是公式 (4.1) 的一個推論。

以下我們來看看這樣定義出來的初等函數的性質。先看指數函數, 由定義 (4.2) 得到

(1) 指數函數不取零值; $e^z \neq 0$, 這是因爲 $|e^z| = e^x > 0$。

(2) 對於任意 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 我們有 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, 這是因爲

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

(3) e^z 以 $2\pi i$ 爲周期, 這是因爲 $e^{2\pi i} = 1$。

(4) e^z 在 $\mathbb{C}$ 上爲全純, 且 $(e^z)' = e^z$, 這是因爲由 (4.2), $e^z = u(x,y) + iv(x,y)$, 故

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y,$$

因此,

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = v_x,$$

這都是 $\mathbb{C}$ 上的連續函數, 由定理 2.1, e^z 在 $\mathbb{C}$ 上全純且

$$(e^z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

以上可以看到在實數體中 e^x 的主要性質, 在複數體中依然成立。如果將 $w = f(z)$ 看作由 z 平面上的一個區域到 w 平面上的一個區域的映射, 如果這個映射是一對一的, 我們便稱這個映射爲單葉映射。我們繼續來討論指數函數。

(5) e^z 的單葉性區域, 即怎樣的區域上 e^z 看作映射可以建立起一一對應。

設 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 使 $e^{z_1} = e^{z_2}$ 成立, 即

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

成立, 也就是 $e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}$ 成立。因此, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2k\pi$, 即 $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 取帶狀區域 $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 作爲 e^z 的單葉區域。例如取 $z = x + iy$, $0 < y < 2\pi$。則 e^z 將此帶狀區域單葉地映到 $\mathbb{C}$ 上去掉正實軸的區域 $E = \mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$。再看看指數函數的反函數, 即對數函數, 對於 $z \neq 0$, 滿足 $e^w = z$ 的複數 w 稱爲 z 的對數, 記作 $\log z$。由於指數函數的周期性 $\log z$ 是 (無窮) 多值函數。假設

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = u + iv,$$

則

$$e^{u+iv} = re^{i\theta},$$

得到 $e^u = r$, $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 所以

$$w = \log z = \log r + i(\theta + 2k\pi)$$

或記作

$$w = \log|z| + i\arg(z),$$

這裡 $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ 爲 z 的幅角。

對數函數有性質

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2,$$

這是因爲 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ 。

由指數函數的討論知道: 若在區域 $\Omega : \mathbb{C}\setminus\{z : z \geq 0\}$ 上 z 的幅角取主値 $0 < \arg(z) < 2\pi$, 則函數

$$w_k(z) = \log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

把 Ω 單葉地映爲平行於實軸的帶狀區域, $E_k : 2k\pi < v < 2(k+1)\pi$。它們都是指數函數 $z = e^w$ 的反函數, 且在區域 Ω 內全純, 並且有 $(w_k)' = \dfrac{1}{z}$, 稱 $w_0(z) = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ 爲 $\log z$ 的主值分支 (principal branch), 記作 $\mathrm{Log}\, z$, 即

$$\mathrm{Log}\, z = \log\, |z| + i\mathrm{Arg}(z).$$

爲方便起見, 有時我們也取 $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$。

我們再來看三角函數, 由定義 (4.3), 我們立即可以得到

(1) $\sin z$ 與 $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 上全純, 而且 $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$。

(2) $\cos z$, $\sin z$ 以 2π 爲周期, 即

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$$

(3) $\cos z$ 爲偶函數, $\sin z$ 爲奇函數, 即

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z.$$

(4) 和角公式成立, 即

$$\sin(z_1+z_1)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2,\quad \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2.$$

(5) $\cos z$ 與 $\sin z$ 的基本關聯公式

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$$

成立。

(6) $\sin z$ 僅在 $z=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 處爲零, 而 $\cos z$ 僅在 $z=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 處爲零。

由以上 (1)–(6), 我們看見實數體上定義的 $\sin x$, $\cos x$ 的主要性質, 在複數體上依然成立, 但是 $\cos x$, $\sin x$ $(x\in\mathbb{R})$ 與 $\cos z$, $\sin z$ $(z\in\mathbb{C})$ 有不同之處：

(7) $|\sin z|$ 與 $|\cos z|$ 是無界的, 這是由於 (4),

$$\begin{aligned}|\sin z|^2&=|\sin(x+iy)|^2=|\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)|^2\\&=|\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y|=\sinh^2 y+\sin^2 x,\end{aligned}$$

這是個無界函數。同樣, $|\cos z|^2=\cosh^2 y-\sin^2 x$, 這也是一個無界函數。

(8) $\sin z$ 與 $\cos z$ 的單葉性區域。

我們先考察 $w=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, 這是三個函數 $\xi=iz$, $\zeta=e^{\xi}$, $w=\dfrac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$ 的複合。第一個函數只是旋轉, 故映射處處單葉。第二個函數單葉的充要條件爲: ξ 平面上的區域不包含滿足 $\xi_2-\xi_1=2k\pi i$ 的兩點 ξ_1, ξ_2, 此處 $k\in\mathbb{Z}$, 換句話說, 在 z 平面上不包含 $z_1-z_2=2k\pi$ 的兩點。第三個函數單葉的充要條件爲: 在 ζ 平面上不包含 $\zeta_1\zeta_2=1$ 的兩點 ζ_1 與 ζ_2, 在 z 平面上就是不包含滿足條件 $e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}=1$, 即 $z_1+z_2=2k\pi$ 的兩點, 因此, 帶狀區域 $0<\mathrm{Re}(z)<\pi$ 就可作爲 $\cos z$ 的單葉區域。

$\xi=iz$ 將 $0<\mathrm{Re}(z)<\pi$ 單葉地映爲 $0<I_m(z)<\pi$, $\zeta=e^{\xi}$ 又將後面這個帶狀區域單葉地映爲上半平面 $\mathrm{Im}(\zeta)>0$, 最後 $w=\dfrac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$ 又將上半平面映爲除去實軸上 $-\infty<u\leq-1$ 和 $1\leq u<+\infty$ 的整個 w 平面, 即 $w=\cos z$, 將 $0<\mathrm{Re}(z)<\pi$ 單葉地映爲 w 平面上去掉 $-\infty<u\leq 1$, $v=0$ 及 $1\leq u<+\infty$, $v=0$ 的區域。同樣地, 我們也可以考慮 $w=\sin z$, $w=\tan z$ 等函數的單葉性區域。

再來看看反三角函數, 先看 $w=\arccos z$, 即 $\cos w=z$, 由於

$$\cos w=\frac{1}{2}(e^{iw}+e^{-iw})=z,$$

這是一個 e^{iw} 的二次方程式, 其根爲 $e^{iw}=z\pm\sqrt{z^2-1}$, 即

$$w=\arccos z=-i\log(z\pm\sqrt{z^2-1})=\pm i\log(z+\sqrt{z^2-1}).$$

所以 $\arccos z$ 有無窮多值, 這反映了 $\cos w$ 的周期性, 另一方面, $\arcsin z$ 可定義爲 $\dfrac{\pi}{2}-\arccos z$。

最後我們來看看冪函數, 由定義 (4.4) 知, 若 $\alpha=a+ib$, 則

$$\begin{aligned} z^\alpha=e^{\alpha\log z}&=e^{(a+ib)[\log|z|+i(\arg(z)+2k\pi)]}\\ &=e^{a\log|z|-b(\arg(z)+2k\pi)}\cdot e^{i[b\log|z|+a(\arg(z)+2k\pi)]}, \end{aligned}$$

這裡 $k\in\mathbb{Z}$, 記 $\rho_k=e^{a\log|z|-b(\arg(z)+2k\pi)}$, $\theta_k=b\log|z|+a(\arg(z)+2k\pi)$, 則

$$w=z^\alpha=\rho_k e^{i\theta_k},\qquad |w|=\rho_k.$$

因此, 若 $b\neq 0$, 則 $w=z^\alpha$ 是無窮多值函數; 若 $b=0$, 則 α 爲實數 a, 而

$$w=z^\alpha=e^{a\log|z|}e^{ia(\arg(z)+2k\pi)}=|z|^a e^{ia(\arg(z)+2k\pi)}.$$

這時 z^a 的值, 都在圓周 $|w|=|z|^a$ 上, 所以

(1) 當 $\alpha=a=n$ 爲整數時, $z^a=z^n$ 是單值的;

(2) 當 $\alpha=a=\dfrac{p}{q}$ 爲既約分數 (i.e., $(p,q)=1$), 且 $0<p<q$, $p,q\in\mathbb{N}$, 則

$$z^a=e^{\frac{p}{q}\log|z|}e^{i\frac{p}{q}(\arg(z)+2k\pi)}=|z|^{\frac{p}{q}}e^{i\frac{p}{q}\arg(z)}e^{i\frac{p}{q}2k\pi}.$$

由於 $\dfrac{p}{q}2k\pi$ 僅當 $k=0,1,\ldots,q-1$ 時, 這 q 個值關於 2π 是不同餘的, 而 k 取其他值時, 其相對應的值均與上述 q 個值中的某一個關於 2π 是同餘的, 故對於給定的 z, z^a 只有 q 個不同的值;

(3) 當 $\alpha=a$ 爲無理數, 則 z^a 爲無窮多值函數。

1.5. 複數級數

在這一講中, 我們最後可以看到實分析中的級數理論有一部分也可以沒有困難地推廣到複數體。例如: 函數序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上一致收斂到 $f(z)$ 是指: 對任給的 $\varepsilon>0$, 一定存在一個只依賴於 ε 而不依賴於 z 的 $N\in\mathbb{N}$, 使得所有的 $n\geq N$ 和所有的 $z\in\Omega$, 都有

$$|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon.$$

如同在實分析中一樣, 可以證明: 一個一致收斂的連續函數序列, 其極限函數本身也是連續的, 我們也很容易得到下面二個定理:

Cauchy **判別準則** 函數序列 $\{f_n(z)\}$ 在集合 $\Omega \in \mathbb{C}$ 上一致收斂的充要條件是: 對於給定的 $\varepsilon > 0$, 一定存在一個只依賴於 ε 而不依賴於 z 的正整數 N, 使得對所有的 $m, n \geq N$ 和所有的 $z \in \Omega$, 我們有

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon.$$

Weierstrass M - **判別法** 若函數項級數

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

在集合 $\Omega \in \mathbb{C}$ 上定義, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 爲一正項級數, 若存在 N 及常數 $M > 0$, 當 $n > N$ 時, 對所有 $z \in \Omega$ 使得 $|f_n(z)| \leq M a_n$ 都成立。如果級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 Ω 上一致收斂。

特別考慮冪級數

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \tag{5.1}$$

我們則有如下的結果。

定理 1.2. (Abel **定理**) 對於冪級數 (5.1), 存在一個數 R, $0 \leq R \leq +\infty$, 稱爲它的收斂半徑, 具有下列性質:

(1) 對於每一個使 $|z| < R$ 的 z, 級數絕對收斂, 如果 $0 \leq \rho \leq R$, 則對於 $|z| \leq \rho$, 級數一致收斂;

(2) 如果 z 滿足 $|z| > R$, 則級數的項無界, 級數發散;

(3) 在 $|z| < R$ 內, 級數的和是一個全純函數, 它的導數可以通過逐項微分求得, 所得的級數與原來級數有相同的收斂半徑, 圓 $|z| \leq R$ 稱爲收斂圓。在收斂圓周上, 收斂性不一定, R 可取爲

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5.2}$$

這稱爲收斂半徑的 Hadamard 公式。

我們現在來證明定理 1.2。

證明: 如果 $|z| < R$, 則可找到 $\rho > 0$, 使得 $|z| < \rho < R$, 於是 $\dfrac{1}{\rho} > \dfrac{1}{R}$。由 (5.2), 存在一個 N_0 使得當 $n \geq N_0$ 時, 有 $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{\rho}$, 即 $|a_n| < \dfrac{1}{\rho^n}$, 故當 $n \geq N_0$ 時, $|a_n z^n| < \left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$。

由於 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{|z|}{\rho}\Big)^n$ 當 $|z|<\rho$ 時收斂, 由 Weiestrass M - 判別法知: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 絕對收斂, 爲了證明級數在 $|z|\le\rho$ $(<R)$ 中的一致收斂性, 選取 ρ', N_1, 使得 $\rho<\rho'<R$, 對於 $n\ge N_1$, $|a_nz^n|\le\Big(\dfrac{\rho}{\rho'}\Big)^n$ 成立。由 Weierstrass M - 判別法, 知 (5.1) 在 $|z|\le\rho$ 中一致收斂。

如果 $|z|>R$, 取 ρ 使得 $R<\rho<|z|$, 由於 $\dfrac{1}{\rho}<\dfrac{1}{R}$, 故存在一個 N_2, 使得當 $n\ge N_2$ 時, $|a_n|^{\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{\rho}$, 即 $|a_n|>\dfrac{1}{\rho^n}$, 於是有無窮多個 n, 使得 $|a_nz^n|>\Big(\dfrac{|z|}{\rho}\Big)^n$, 故級數無界。

級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$ 與級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 有相同的收斂半徑, 這是因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, 對於 $|z|<R$, 記

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=S_n(z)+R_n(z),$$

這裡

$$S_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},\qquad R_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_nz^n.$$

令 $f_1(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}S'_n(z)$, 我們要證明 $f_1(z)=f'(z)$。

取 $0<\rho<R$, 任意取定一點 z_0, $|z_0|<\rho$, 由於

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-f_1(z)=&\Big(\frac{S_n(z)-S_n(z_0)}{z-z_0}-S'_n(z)\Big)+\Big(s'_n(z_0)-f_1(z)\Big)\\&+\Big(\frac{R_1(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\Big),\end{aligned}$$

若 $z\ne z_0$, 且 $|z|<\rho<R$, 則上式右邊最後一項可寫爲

$$\sum_{k=n}^{\infty}a_k\Big(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+z^{k-3}z_0^2+\cdots+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1}\Big),$$

故

$$\Big|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\Big|\le\sum_{k=n}^{\infty}k|a_k|\rho^{k-1}.$$

這是一個收斂級數的餘項, 故存在 N, 使得當 $n\ge N_3$ 時, 我們有

$$\Big|\frac{R_n(z)-R_n(z_0)}{z-z_0}\Big|<\varepsilon/3.$$

由於 $f_1(z) = \lim_{n\to\infty} S'_n(z)$, 故存在 N_4, 使得 $N \geq N_4$ 時,

$$|S'_n(z_0) - f_1(z)| < \varepsilon/3.$$

取固定的 $n > N_3$, $n > N_4$, 由導數的定義, 可以找到 $\delta > 0$, 使得當 $0 < |z_0 - z| < \delta$ 時有

$$\left|\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S'_n(z_0)\right| < \varepsilon/3.$$

綜合上面各式子, 得到: 當 $0 < |z - z_0| < \delta$ 時, 有

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f_1(z_0)\right| < \varepsilon,$$

這就證明了 $f'(z_0) = f_1(z_0)$, 定理 1.2之證明完畢。

這種推理可重複進行, 得到

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}z + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+2}z^2 + \cdots$$

對任意 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。由此可得 $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, 故冪級數可以寫成

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots,$$

這是 Taylor - Maclaurin 級數, 這是在 $f(z)$ 具有一個冪級數展開式這個假定下證明的, 即如果展開式存在則唯一確定, 在下一講中我們將證明: 每一全純函數具有一個 Taylor 展開式。

由指數函數的性質 (4), $(e^z)' = e^z$, 我們立即得到 e^z 的 Taylor 級數

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

由定義 (4.3), 得到 $\cos z$ 及 $\sin z$ 的 Taylor 展開式爲

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

由 Hadamard 公式, 這三個級數是在全複平面上爲一致收斂的。

—本文作者龔昇任教中國科技大學, 張德健任教美國 Georgetown University 數學系—