

# 重訪克卜勒 —— 地球的面積律與橢圓律

項武義 · 張海潮 · 陳鵬仁 · 姚 珩

## 一、前言

1609年克卜勒 (J. Kepler, 1571~1630) 出版了重要巨著「新天文學」, 距今已有四百年, 書中對火星運行的軌道, 提出了至精至簡的描述。火星繞著太陽運轉, 其軌道並非是長久以來所認為的正圓, 而是橢圓, 且太陽位居其中一個焦點的位置; 此外太陽與火星的連線, 在相同的時間內, 會掃過相同的面積。後人稱此二發現為克卜勒行星運動第一及第二定律, 或橢圓律與面積律。這些發現, 固然有賴於第谷 (Tycho Brahe, 1546~1601) 畢生觀測所遺留下來的精確數據, 更重要的是克卜勒充分發揮創意, 將原本基於地球為觀測原點所得的數據, 運用幾何方法轉換為以太陽為中心的結論。

本文的第一部份, 意在展示克卜勒獲得地球面積律所使用的幾何方法, 主要是高中學過的正弦定律。至於橢圓律, 從現今能夠掌握的數學方法看來, 既然 (地球的) 面積律已然成立, 只要能夠分析地球繞日的角速度, 就可以推得地球繞日的軌道確是橢圓。本文的第二部份, 主要的目的在展示如何利用克卜勒當年已經充分掌握的數據, 以現代數學方法來分析 (地球繞日的) 角速度這個週期函數的可能形式, 從而理解地球的橢圓律。

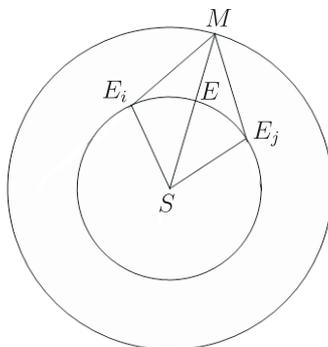
克卜勒當年的經歷是先發現地球的面積律, 進而得到火星的面積律; 然後歷經長年的困頓, 而大膽的推測火星繞日的軌道是橢圓, 並繼之以驗證。我們在此嘗試跳過克卜勒的困頓過程, 直接分析地球繞日的軌道, 使橢圓律的發現看起來更加順利, 也更加自然。必須指出, 本文所引用的觀測資料, 基本上是近百年來以地球為原點所觀測到的太陽與火星的角度 (方向), 而非克卜勒時代第谷的觀測數據, 這是因為本文主要的目的是介紹分析這些數據的數理方法, 讓讀者能夠了解從數據得到結論的過程, 希望讀者能夠欣賞。

## 二、地球的面積律

欲建立地球的面積律, 首先得明白地球相對於太陽的位置。但是在廣大浩瀚的星際間, 該如何確定地球的位置呢? 回顧從數千年前以至於克卜勒的時代, 所有對太陽及行星運動的理解,

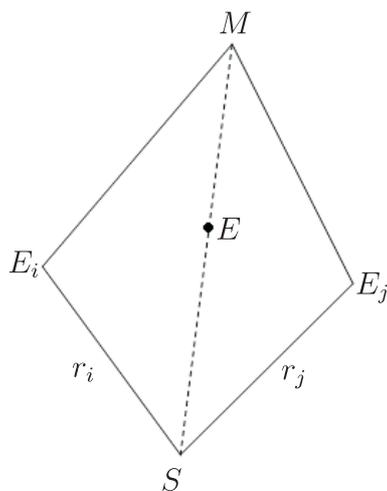
都是以地球為原點，觀測太陽或行星的角度（方向），亦即在地球上只能紀錄它們在天球上的經度（及緯度），而無法觀測星體與地球之間的距離，或是計算距離與距離之比。因此縱然克卜勒相信日心說，而要將以地球為原點的觀測結果轉換到以太陽為原點的位置，克卜勒必須想出新的方法。在克卜勒那個時代，已經有各個行星大約是在同一平面上運行的看法，而在一個平面上要定出一個物體的位置，必須至少要有兩個參考點作依據，才能夠標定出物體位在何處。現在，我們將一個參考點取為不動的太陽，那麼，另一個點該取何者呢？若是選取同樣不變動的恆星，會因為距離太過遙遠失去參考價值；但若取鄰近的行星，因它非靜止，在天空的位置則又難以標定。儘管如此，克卜勒注意到從一次太陽、地球、火星三連星，到下一次三連星的間隔約是 780 天，並據以計算出火星繞日的週期約是 687.0 天。由於每隔 687 天火星在天空的位置有如一個固定的燈塔，只要將回到原處的那個位置當作是另一個參考點，這樣一來，就擁有兩個固定的點作為基準，利用從地球觀測到的角度，倒過來決定地球的位置。

從地球觀測太陽，將太陽在天球上的投影點以（黃道）經度標定。例如春分（3 月 21 日或 22 日）時，經度為  $0^\circ$ ，夏至（6 月 21 或 22 日）時太陽的經度為  $90^\circ$  等等，不過因為太陽與地球的位置相差  $180^\circ$ ，所以在春分的時刻，太陽看地球的經度變成  $180^\circ$ ，夏至時刻太陽看地球的經度變成  $270^\circ$ ，在以下的討論中，有時為了方便，我們也會採取以太陽為原點，觀測地球的經度，這樣的選擇和以地球為原點的觀測經度是等價的。



圖一：太陽  $S$ 、火星  $M$  與地球  $E$  的位置示意圖

克卜勒當年便以發生火星衝（太陽、地球、火星三點成一直線，如圖一。 $S$  表太陽， $E$  是地球， $M$  為火星）的日期為基本參考數據，為了方便起見，我們選取 1950 年 3 月 23 日 5 時這天的觀測數據，此時  $SEM$  成一直線。 $S$  的位置固定， $M$  每隔一個火星年會回到原位置，視作不動， $E_i$  代表自發生火星衝起前一個火星年的地球位置，由數據該位置發生在 1948 年 5 月 5 日；而  $E_j$  則是自火星衝起算下一個火星年時的地球位置，由數據該位置發生在 1952 年 2 月 8 日。如此  $SE_iME_j$  可形成一個四邊形。為了方便起見，以  $r_i$  代表  $SE_i$  線段長， $r_j$  代表  $SE_j$  線段長。很明顯  $r_i$ 、 $r_j$  分別表示兩個時間點的地球與太陽距離（圖二）。



圖二： $SE_iME_j$  所形成的四邊形

四邊形  $SE_iME_j$  可看成由  $\triangle SE_iM$  與  $\triangle SE_jM$  所組成，其中  $\angle SE_iM$ 、 $\angle SE_jM$ 、 $\angle MSE_i$  及  $\angle MSE_j$  之值可由自地球所分別觀測到至火星與至太陽的經度獲得。由觀測數據於 1948 年 5 月 5 日時，火星  $M$  之位置為經度  $144.9^\circ$ ，太陽  $S$  之位置為經度  $44.7^\circ$ ，所以  $\angle SE_iM = 144.9^\circ - 44.7^\circ = 100.2^\circ$ ；同理  $\angle SE_jM = 318.4^\circ - 218.2^\circ = 100.2^\circ$ 。而  $\angle MSE_i$  及  $\angle MSE_j$  則是由火星衝及前或後一個火星年，地球觀測太陽經度之差獲得。

火星衝時太陽  $S$  位置為  $2.0^\circ$ ，而於 1948 年 5 月 5 日時，太陽  $S$  位置為  $44.7^\circ$ ，故  $\angle MSE_i = 44.7^\circ - 2.0^\circ = 42.7^\circ$ ，同理  $\angle MSE_j = 2.0^\circ + 360^\circ - 318.4^\circ = 43.6^\circ$ 。

由三角形三內角和為  $180^\circ$  可得

$$\angle E_iMS = 180^\circ - \angle SE_iM - \angle MSE_i = 37.1^\circ$$

$$\angle E_jMS = 180^\circ - \angle SE_jM - \angle MSE_j = 36.2^\circ$$

$\triangle SE_iM$  和  $\triangle SE_jM$  三內角現皆已知，且  $SM$  為共邊，利用正弦定律

$$\frac{r_i}{\sin \angle E_iMS} = \frac{SM}{\sin \angle SE_iM} \quad \frac{r_j}{\sin \angle E_jMS} = \frac{SM}{\sin \angle SE_jM}$$

可得  $r_i$ 、 $r_j$  的關係

$$\frac{r_j}{r_i} = \frac{\sin \angle SE_iM \sin \angle E_jMS}{\sin \angle SE_jM \sin \angle E_iMS}$$

此式代表：原本甚難觀測出之地球至太陽的實際距離，其比值卻可完全由火星衝與經過不同火星年後，太陽、地球與火星彼此連線所形成之相關角度求得。若  $\omega_i$ 、 $\omega_j$  分別是地球在  $E_i$ 、 $E_j$  時，相對於太陽的角速度，它們可由地球在  $E_i$  或  $E_j$  位置，至隔天同一時間，所行經的角度來求得。由觀測數據於 1948 年 5 月 5 日時，地球  $E_i$  之位置為  $224.897^\circ$ ，而於 1948 年

5 月 6 日時，地球  $E_i$  之位置為  $225.865^\circ$ ，故  $\omega_i = 225.866 - 224.897 = 0.969$ ，同理， $\omega_j = 139.561 - 138.549 = 1.012$ 。

地球之面積律意謂地球與太陽連線在相同時間掃過相等面積，如圖三所示

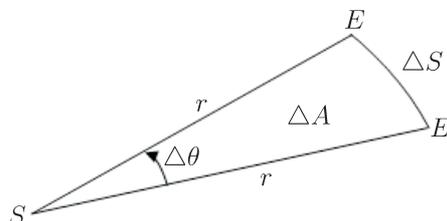
$$\Delta A = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

所以面積速率

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega$$

式中  $\omega$  是地球繞日的角速度



圖三：地球面積律示意圖

我們要檢視面積律，亦即檢視在不同地球位置至太陽之距離平方，與在該點所對應的地球角速度  $\omega$  之乘積恆為定值，或

$$r_i^2\omega_i = r_j^2\omega_j \tag{1}$$

我們以火星衝前一火星年之地球位置  $E_i$  為參考基準，再往前逆推三個火星年，及自火星衝向後延伸三個火星年的地球位置作為  $E_j$ ，由這些  $E_j$  之觀測數據，可求得所對應之  $r_j^2/r_i^2$  及  $\omega_i/\omega_j$  比值，如表一。

表一：由觀測數據所求得之  $r_j^2/r_i^2$  與  $\omega_i/\omega_j$  值

時間	$\angle SE_iM$	$\angle SE_jM$	$\angle MSE_i$	$\angle MSE_j$	$\angle E_iMS$	$\angle E_jMS$	$\omega_i$	$\omega_j$	$r_j^2/r_i^2$	$\omega_i/\omega_j$
1942.09.13		$7.5^\circ$		$167.9^\circ$		$4.6^\circ$		0.974	1.005	0.995
1944.07.31		$33.8^\circ$		$126.0^\circ$		$20.2^\circ$		0.956	1.026	1.014
1946.06.18		$62.4^\circ$		$84.4^\circ$		$33.2^\circ$		0.954	1.016	1.016
1948.05.05	$100.2^\circ$		$42.7^\circ$		$37.1^\circ$		0.969			
1952.02.08		$100.2^\circ$		$43.6^\circ$		$36.2^\circ$		1.012	0.959	0.958
1953.12.26		$60.6^\circ$		$87.9^\circ$		$31.5^\circ$		1.019	0.958	0.951
1955.11.13		$30.3^\circ$		$132.0^\circ$		$17.7^\circ$		1.007	0.967	0.962

由表格最右邊兩行的運算結果，可看出  $r_j^2/r_i^2$  與  $\omega_i/\omega_j$  兩者相差甚微，(約小於 1%)，可視為相等，亦即  $r_j^2\omega_j = r_i^2\omega_i$ 。注意到表一中的 7 個數據都是以 1950 年 3 月 23 日這一天

發生的火星衝為基準，逆推或順延 7 個火星年（一個火星年為 687 天）所測地球的位置和角速度。我們仿此方式，繼續每隔 687 天逆推或順延來取得其他 30 個地球所在的位置  $E_k$ ，以及在  $E_k$  的角速度  $\omega_k$ ，仍然可以驗證  $r_k^2\omega_k = r_i^2\omega_i$ （表二）。

倒是以 1950 年 3 月 23 日為基準而彼此相差 687 天的地球位置是否會遍歷地球繞日的軌道呢？如果可以，面積律， $r^2\omega = \text{常數}$ ，便可建立，因此必須了解在上述每隔 687 天的日期，地球可能的位置分佈，關於此一分佈的遍歷性，根本的原因在於火星年 687 天和地球年 365 天是互質的兩個常數。因此每隔 687 天取一個地球的位置，這些位置終將在（地球的）軌道上逐漸密集而具有整體的代表性。

表二：其他三十個位置的時間、 $\omega_k$ 、 $r_k^2/r_i^2$  與  $\omega_i/\omega_k$  值

時間	$\omega_i$	$\omega_k$	$r_k^2/r_i^2$	$\omega_i/\omega_k$	時間	$\omega_i$	$\omega_k$	$r_k^2/r_i^2$	$\omega_i/\omega_k$
1948.05.05	0.969				1948.05.05	0.969			
1940.10.26		0.998	0.959	0.971	1957.09.30		0.983	0.982	0.986
1938.12.09		1.016	0.951	0.954	1959.08.18		0.961	1.008	1.008
1937.01.21		1.017	0.953	0.952	1961.07.05		0.953	1.016	1.016
1935.03.06		1.001	0.968	0.968	1963.05.23		0.962	1.005	1.008
1933.04.18		0.977	0.991	0.992	1965.04.09		0.982	0.988	0.987
1931.06.01		0.958	1.008	1.012	1967.02.25		1.005	0.958	0.964
1929.07.14		0.954	1.019	1.016	1969.01.12		1.019	0.950	0.951
1927.08.27		0.966	1.011	1.003	1970.11.29		1.014	0.953	0.956
1925.10.09		0.988	0.993	0.980	1972.10.16		0.992	0.974	0.976
1923.11.22		1.010	0.953	0.959	1974.09.03		0.969	0.999	1.000
1922.01.04		1.019	0.951	0.951	1976.07.21		0.955	1.012	1.015
1920.02.17		1.009	0.957	0.960	1978.06.08		0.957	1.010	1.013
1918.04.01		0.986	0.980	0.983	1980.04.25		0.973	0.991	0.996
1916.05.14		0.964	1.005	1.005	1982.03.13		0.997	0.974	0.972
1914.06.27		0.954	1.017	1.016	1984.01.29		1.016	0.951	0.954

當然，我們也可以看看其他的火星衝，和它們之間位置的關連，例如 1916 年 2 月 10 日和 1995 年 2 月 12 日各曾發生一次火星衝，這兩次火星衝的位置只相差  $1.8^\circ$ ，因此可視為重疊而成功地驗證並建立起克卜勒的面積律。其建立的方式回顧起來，一方面是巧妙的運用火星衝與火星繞日的週期，另一方面則是利用 687 天與 365 天互質的關係來保證上述地球位置分佈的遍歷性。

對天文觀測而言，太陽到行星間的距離或距離與距離之比甚難直接由測量得出，而行星運行所經過的角度相對而言則十分容易觀測。面積律的成立，使得我們只需要去觀測行星的角速度，便可推得在不同時刻太陽與行星間距離的比值。這是面積律的潛在意涵，它也有效地掌握住行星距離變化的法則。

### 三、地球的橢圓律

完成地球面積律之建立後，現將試著建立地球之橢圓律。由於地球繞日進行規律的週期運動，地球至太陽之距離  $r(\theta)$  或其倒數也可表為  $\theta$  之週期函數，即可用不同倍角之正弦及餘弦函數之級數來表示

$$\frac{1}{r} = a_0 + \sum_n a_n \cos n\theta + \sum_n b_n \sin n\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

考慮在最理想狀況下，此距離倒數之週期函數可以一單角之三角函數來近似，即令

$$\frac{1}{r} = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta \quad (2)$$

利用已獲得的地球面積律或 (1)，或

$$\frac{1}{r} = c\sqrt{\omega}$$

此處  $c$  為比例常數，則距離倒數之週期函數亦可改寫成

$$\sqrt{\omega} = c_0 + c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$$

如此可再次使用可觀測的角速度  $\omega$ ，來代替不能量測的距離  $r$ 。欲求得上式中  $c_0$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  三個未知係數，必須選取三組數據，以形成三元一次聯立方程式。茲隨機選取 1998 年 4 月 23 日，1998 年 7 月 31 日，1998 年 10 月 2 日的三組數據，形成

$$\sqrt{\omega_1} = c_0 + c_1 \cos \theta_1 + c_2 \sin \theta_1$$

$$\sqrt{\omega_2} = c_0 + c_1 \cos \theta_2 + c_2 \sin \theta_2$$

$$\sqrt{\omega_3} = c_0 + c_1 \cos \theta_3 + c_2 \sin \theta_3$$

其中  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\theta_3$  之值是由任意選取 1998 年 1 月 27 日地球與太陽的連線當作水平  $x$  軸，其他三個日期之地球與太陽連線和  $x$  軸的夾角則分別為  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\theta_3$ ，如  $\theta_1 = 213.2^\circ - 127.4^\circ = 85.8^\circ$ ，並列於下表三。

表三：計算橢圓方程式的參考數據

時間	地球經度	$\theta_i$	$\omega_i$
1998.01.27	127.4°		
1998.04.23	213.2°	85.8°	0.975
1998.07.31	308.1°	180.7°	0.956
1998.10.02	9.1°	-118.3°	0.984

由表三中,  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  與  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  及  $\omega_3$  之數據, 可求得上式三元一次聯立方程組之解, 其解為

$$c_0 = 0.993 \quad c_1 = 0.015 \quad c_2 = -0.007$$

由此三個地球位置所得到之距離或角速率平方根週期函數為

$$\sqrt{\omega} = 0.993 + 0.015 \cos \theta - 0.007 \sin \theta \quad (3)$$

現再隨機選取七個不同日期或七個不同地球位置, 並設  $d = 0.993 + 0.015 \cos \theta - 0.007 \sin \theta$ , 由對應所得之角速率  $\omega$ , 藉比較  $\sqrt{\omega}$  與  $d$  二值之差, 即可驗證所選取的地球位置是否都符合此距離之週期函數, 由下表四可知  $\sqrt{\omega}$  恆等於  $d$ , 表示 (3) 式中 這個週期函數的有效性。

表四: 由七個不同日期的觀測數據檢驗距離或角速率平方根週期函數式

時間	地球經度	$\theta$	$\omega$	$\sqrt{\omega} - d$
1998.02.12	143.6°	16.2°	1.011	0.000
1998.03.17	176.7°	49.3°	0.995	0.000
1998.05.06	225.8°	98.4°	0.968	0.000
1998.06.22	270.9°	143.5°	0.954	0.000
1998.08.18	325.4°	198.0°	0.962	0.000
1998.11.17	55.0°	-72.4°	1.009	0.000
1998.12.29	97.6°	-29.8°	1.019	0.000

現在證此週期函數式實為一橢圓軌跡方程式。若設橢圓兩焦點連線為水平  $x$  軸, 則橢圓軌跡方程式可表為

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad \text{或} \quad \frac{1}{r} = B + A \cos \theta$$

其中  $e$  為離心率,  $a$  為半長軸,  $B = 1/a(1 - e^2)$ ,  $A = e/a(1 - e^2)$ 。若  $x$  軸非兩焦點連線, 則橢圓方程式為

$$\frac{1}{r} = B + A \cos(\theta - \theta_0) = B + d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta \quad (4)$$

此處  $\theta_0$  為近日點至原點連線與  $x$  軸之夾角, 且  $d_1^2 + d_2^2 = A^2$ , 及  $\sqrt{d_1^2 + d_2^2}/B = A/B = e$ 。現距離倒數之週期函數式 (2) 或 (3) 已具備橢圓方程式 (4) 的形式, 且測試式 (3) 之  $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  與  $c_0$  之比值為

$$\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c_0} = \frac{\sqrt{(-0.007)^2 + 0.015^2}}{0.993} = 0.017$$

此值正是地球軌道離心率之公認值 0.017, 而可明顯得知距離倒數之週期函數與橢圓方程式等價, 且亦精確地確認地球運行的軌道即為橢圓軌道。

## 四、結論

利用火星衝及火星年的特性，可將太陽與火星固定在天體上，藉著運動的地球與此二固定點所形成的幾何關係，能將無法直接測得之地球與太陽間距離的變化，以較易獲得的觀測角度來表示，而簡潔地重新完成了地球面積律與橢圓律之建立檢驗，也對克卜勒在四百年前便有此深刻創見，感到衷心敬佩。

## 參考文獻

1. Kepler, J., ([1609] 1992). *New Astronomy*. New York: Cambridge University Press.
2. Symon, R., *Mechanics*. 3d ed. New York: Addison-Wesley, p.131-133, 1971.
3. Multiyear Interactive Computer Almanac (MICA, 美國海軍天文台用星體位置計算軟體), Version 2.0.
4. Knopp, K., "Periodic Functions." Ch. 3 in *Theory of Functions Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part II*. New York: Dover, p.58-92, 1996.
5. Morse, P. M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics, Part I*. New York: McGraw-Hill, p.425-427, 1953.
6. Harris, J. W. and Stocker, H., "Ellipse." in *Handbook of Mathematics and Computational Science*. New York: Springer-Verlag, p.93, 1998.
7. Lawrence, J. D., *A Catalog of Special Plane Curves*. New York: Dover, p.72-78, 1972.

—本文作者項武義為美國加州大學(柏克萊)數學系退休教授;張海潮為台灣大學數學系退休教授;陳鵬仁為台灣師範大學物理所研究生;姚珩為台灣師範大學物理系教授—

### Taipei Winter School in Representation Theory

- 日期: 2010年12月16日(星期四) ~ 2010年12月19日(星期日)
- 地點: 臺北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館6樓 中央研究院數學研究所 638研討室
- 目的: Prof. Olivier Schiffmann (Université de Paris VI) and Prof. Mark Shimozono (Virginia Tech) will each give a series of 8 hours of lectures.

Please refer to <http://www.math.sinica.edu.tw> for further details.