

有朋自遠方來——專訪馬進教授



策 劃：劉太平

訪 問：許順吉、姜祖恕、黃啓瑞、周雲雄、
李宣北

時 間：民國99年6月18日

地 點：中央研究院數學所

整 理：林思華

馬進教授 1956 年出生於上海，1987 年赴美就讀 University of Minnesota，1992 年獲得博士學位，1992 年至 2007 年任教於普度大學 (Purdue University)，自 2007 年起任教於南加州大學 (University of Southern California)。馬進教授曾因文化大革命的影響而中斷求學，1982 年於復旦大學完成大學教育。他現在南加州大學負責一個 Mathematical Finance Master Program。他的專業研究包含隨機控制理論，Forward-Backward 隨機微分方程 (FBSDE) 的理論及應用。FBSDE 在財務 (金融) 數學的相關研究有很多的應用，因此該題材在機率論及財務數學的相關研究都受到相當的注意，馬進教授在該研究方向做了很多重要貢獻，是該領域研究的先驅及重要的推手，他與 P. Protter, J. Yong 於 1994 年提出 Four Step Scheme 來解 FBSDE，是該領域的經典作品。

姜祖恕 (以下簡稱「姜」): 今天我們很高興有機會能跟你聊一聊，你 2008 年到南加大，是否可以先談談那裏的情形？

馬進 (以下簡稱「馬」): 非常榮幸，我看了很多以前的專訪，都是非常有名的數學家，非常不敢當。不過，既然是「有朋自遠方來」，我們是朋友，我想也可以聊一些。我現在在南加大 (USC, University of Southern California) 負責一個叫 Mathematical Finance 的

Masters Program。學生主要是碩士生，也有博士生。時間是一年半，也就是十八個月，學生分別在數學系、經濟系、商學院 (Business School) 選一些課。我在南加大有三年了。

姜：談到這個 Program，你覺得 Mathematical Finance 在美國的就業市場好不好？在這個領域發展前途如何？

馬：Mathematical Finance 或是叫做 Quantitative Finance，在美國 90 年代以後，是比較熱門的學科，可能是因為衍生性金融市場 (derivative market) 的關係，有些產品對數學的要求比較高。90年代初，比方像 Itô's formula¹，人們還是當作秘密武器 (secret weapon) 來用。如果你知道這方面的知識，比較有利。所以大家都想要學。於是像工學院開始有 Quantitative Finance Program，碩士生程度，通常叫做 Financial Engineering。在數學系或者統計系這種比較接近數學的學門，相關的碩士學程，就叫做 Mathematical Finance 或是叫 Computational Finance。最近這幾年，由於金融危機，學生畢業出來找工作有點困難，但早些時候，學生很搶手，出路很多，在社會上有些影響，因此大家都想辦這樣的 Program。在普度 (Purdue) 的時候，我負責一個 Computational Finance Program，它與南加大有點不一樣，普度是好幾個系一起辦，甚至是跨學院合作。因為它是公立學校，資訊工程、商學院、數學系、統計系可以一塊辦，學生可以在這些系自由選課而不會牽涉到學費的問題。在南加大就有區別，Mathematical Finance Program 是放在包括經濟系跟數學系的學院裡面。我們很想送學生去 Industrial Engineering 選課，但它在另外一個學院，有技術上的困難，不過我們一定會送他們去商學院選課，沒有商學院的課，你就不能稱之為 Mathematical Finance Program。

姜：畢業出來，大部分的就業市場是走那個方向？

馬：投資銀行或者對沖基金公司，還有一些小的投資公司會來找人。

姜：所以美國市場現在還是有相當的需求量？

馬：現在找工作比較慢，但還是可以找到工作。現在的問題是，在華爾街幾個像雷曼兄弟 (Lehman brothers)² 貝爾斯登 (Bear Stearns)³ 這樣的大公司倒閉或被合併，一大批人失業。這批人還要在這個行業找工作，甚至願意拿比較低一點的薪水，這就對剛畢業的碩、博士生造成不小的壓力，同樣的薪資，公司傾向於請有經驗的人，新的畢業生只好到其他比較小的公司。現在情況似乎開始好轉，有些 internship position 的職缺，我現在有 2 個 Ph.D. 學生就在做這個。

¹譯註：用來計算隨機微分方程的方程式。為日本數學家伊藤 清 (ITÔ Kiyosi, 1915-2008) 所發明，他最為人知的成就為 Itô 積分。

²譯註：美國一家國際性金融機構及投資銀行，於 1850 年設立，2008 年為美國第四大投資銀行。同年受到次級房貸風暴連鎖效應波及，申請破產。

³譯註：曾是美國主要的投資銀行與證券交易公司，成立於 1923 年。歷經美國 30 年代的大蕭條和多次經濟起落，但最終在 2008 年的美國次級房貸風暴中嚴重虧損，瀕臨破產而被收購。

黃啓瑞 (以下簡稱「黃」): 這個 Program 是 2 年還是 1 年半?

馬: 在南加大是一年半, 在普度是 2 年, 普度需要 2 年是有原因的。因為這個 Program 的學生在普度是拿數學碩士學位或統計碩士學位, specializing in Computational Finance。但如果是拿數學碩士學位, 就一定要學實變函數什麼的。所以學生在第一學期必須選 measure theoretical level 的 probability 或者選 calculus based probability 加上實變函數。在南加大, 就是一個職業或專門的碩士學位, 所以沒有這種要求。

黃: 這個 Program, 有沒有實驗室, 用電腦去跑實際的數據, 例如用 Bloomberg。

馬: 普度有, 因為這需要時間。一年半的時間, 只夠選一些基本的課, 但我們有一門課是做模擬 (simulation), 介紹一些應用軟體 (software)。

黃: 這個 Program 有沒有跟一些外面的公司合作, 還是完全由學校規劃辦理?

馬: 沒有, 完全是學校。因為一年半的時間要訓練一個從什麼也不太知道到能夠進入市場的人時間比較緊。有的 Program 會有, 但也不是很容易。

姜: 這個 Computational Finance Mathematics 最重要的核心, 是不是機率論?

馬: 機率論當然是一個很重要的部份。比方說, 現在招收學生, 不管在普度或南加大, 我們主要看四門課: 一個是要有好的微積分基礎, 最好是成績單上面有實變或者是學過 Introduction to Real Analysis, 比如 Baby Rudin, 我們還希望學生知道一些拓樸的東西, 比如至少知道一致收斂 (uniform convergence)。

許順吉 (以下簡稱「許」): 要懂得取極限。

馬: 取極限並不是寫進去就好了, 你要有一些 $\varepsilon - \delta$ 的基礎訓練。還有一個是線性代數, 一個是機率論; 不帶統計的機率論。還有就是微分方程。因為我們是跨領域所以不同 background 的學生都會來申請。這些課都沒念過的人要修 Mathematical Finance 會比較困難。所以機率論是一個重點, 特別是鞅論 (Martingale Theory) 一定要念懂。還有條件機率 (Conditional Probability) 也要稍微訓練得好一點。

黃: 不僅要稍微訓練過, 要有點直覺。

姜: 要有一定的程度。

馬: 我們通常教的話, 一般先從機率論開始, 講 Martingale Theory, 會用 Borel field 去講。這對很多學工程的人來說, 一開始是個挑戰, 要不然學到後面, 他用條件機率的時候, 要把條件密度 (conditional density) 寫出來才會算的話, 這個鞅 (Martingale) 就很難講了。但是如果沒有鞅的話, 鞅測度 (Martingale Measure)、風險度量 (Risk Measure) 什麼的就沒辦法講啦。所以其實機率論是非常非常非常重要的。

姜: 這個領域最要緊是在應用方面。

馬: 在 Finance 上, 現在所有做 Mathematical Finance 的都要求會機率論, 我記得 90 年代初, 我剛去普度的時候, 那時候有個剛畢業的念數值分析的博士去華爾街工作。因為那時候

工作不好找，所以數學系畢業後，他又去念了個 Computer Science 的碩士學位，然後進了華爾街工作。他回來跟我說：『我們組裡面，每一個人的桌子上都放了一本 Karatzas⁴ 的書，像聖經一樣。』（眾人笑）

姜：他哪一本書？

馬：《Brownian Motion and Stochastic Calculus》⁵，黃皮書，每個人桌子上都放一本，但沒人念得懂。

許：那本書寫的很好，但不容易念，念懂要花很大的功夫。

馬：他是學數值偏微分方程 (Numerical PDE) 的，他因為是 Computer Science 的碩士被華爾街錄用。之後人家知道他有數學博士學位，就叫他教隨機分析 (笑)。他回來問我：『有沒有什麼概率論的書可以念？』結果他就自己念，同時在公司每星期2次教別人。所以，在 Finance 上面，概率論很重要。還有一個要緊的其實是控制論，現在世界上在 Mathematical Finance 上領先的人，你去看他們的背景，原來全都是做隨機控制 (Stochastic Control) 的，像 Karatzas、Shreve⁶、Mark Davis⁷、El Karoui⁸ 還有 Fleming⁹ 等等一大堆人。

黃：除了你以外？

姜：他也是。

黃：你不是 Jain¹⁰ (Naresh Jain) 教授的學生嗎？

馬：是的。但我是做控制論的。

姜：他是 Jain 那邊做控制論的。所以你覺得這些做控制論出身的人是他們幫了 Mathematical Finance 的忙，還是 Mathematical Finance 幫了他們的忙？

馬：這個很難講，因為，做控制論的人本來是做什麼的呢？比如 tracking problem 就是打飛機、打導彈什麼的。別人一個東西飛過來，你這邊如何應戰。90 年冷戰結束以後就不太熱門了。不過做數學的人比較自由，一個 SDE (Stochastic Differential Equation)，你可以說它是 incoming missile 的 dynamics，也可以說它是 stock market 的 dynamics。Black-Scholes model¹¹ 出來以後，就更容易理解了。其實控制論就是要讓事物最優化。

姜：談談你怎麼進入控制論。

⁴譯註：Ioannis Karatzas，現任教美國哥倫比亞大學。

⁵譯註：此書為 Ioannis Karatzas 與 Steven E. Shreve 合著，於 1987 年由 Springer-Verlag 出版。

⁶譯註：Steven E. Shreve，現任教美國 Carnegie Mellon University，著有許多關於金融數學的書籍。

⁷譯註：Mark H.A. Davis，英國數學家，現任教於英國 Imperial College London。

⁸譯註：Nicole El Karoui (1944-)，為法國女數學家。現任教法國巴黎第六大學，被視為金融數學發展的先驅。

⁹譯註：Wendell Helms Fleming，是控制論的專家，任教美國布朗大學，於 1987 年獲頒 Steel Prize。

¹⁰譯註：Naresh Chandra Jain，任教美國明尼蘇達大學。

¹¹譯註：F. Black 及 M. Scholes 1973 年在 “The Pricing of Options and Corporate Liabilities” 中提出的關於金融市場及衍生性投資工具的數學模型。

馬：這要講到很早以前。我中學畢業時，不能直接進大學。在文革當中沒有大學可以念，要去工廠或農村做工。我當時在上海金山石油化工總廠做維修儀器的儀表工。那時就接觸過一些 PID 調節器，工程控制之類的東西。後來考上復旦大學，念大學時，就好像腦子潛意識中一直有控制論的概念。念碩士時，跟著做控制論的李訓經¹² 老師學了控制論。李訓經老師最早是做常微分方程的。Pontryagin¹³ 教授寫的常微分方程的書就是他和金福臨¹⁴ 老師一塊兒翻譯成中文的，金福臨老師比較資深，李訓經老師在文革前就已經做有限維控制論的研究，文革 10 年，停掉了。等到文革結束回來做研究時，集中參數控制，也就是有限維的控制中大多數原來想的問題，都過時了。他就開始做分布參數控制也就是 PDE 的控制。80 年代初，大約是 80、81 年，他去布朗大學 (Brown University) 訪問 W. Fleming 教授，注意到隨機控制的領域。回來後，他覺得復旦也應該有個隨機控制的研究群。我當時正在念碩士，他就讓我和一個師弟學隨機控制，一個做離散，一個做連續。我被指定做連續時間的控制。那時也不曉得那是什麼，拿了 Fleming 的《Deterministic and Stochastic Optimal Control》¹⁵ 來念。那麼隨機微分方程怎麼辦呢？當時復旦還有一位從日本回來的老師，他曾在 Watanabe¹⁶ 教授的 seminar 裡面，是被派出去做長期學習的。當時 Ikeda & Watanabe 那本書 (《Stochastic Differential Equations and Diffusion Process》¹⁷)，還沒出來，但是他有筆記，他就把筆記全部用中文寫出來，字寫得非常漂亮，厚厚的一本，我到現在還收藏著。他寫出來後，給我和師弟兩個人上課，這是我們第一次接觸隨機微分方程，他講得非常好。

黃：Watanabe 那本書寫得非常 general。

馬：那本書上其實還有很多 Manifold 上的東西，但我們只學了些基本的鞅論，和基本的隨機微分方程。到了明尼蘇達 (University of Minnesota) 後我當時其實很想跟 Steven Orey¹⁸ 教授，我們談得很好，他也給了我很多指導，但沒有收我，因為他當時身體很不好，已經有前列腺癌，不想收學生了。Naresh Jain 教授當時是研究生主任 (Director of Graduate Study)，我問他怎麼辦？他說：『我們可以一塊做。你可以教我控制論，我可以教你別的。』我就跟他一塊做，再把 Fleming 的書跟他報告，把一些問題歸成完全是數學的問題跟他討論。問題有很多是 Steven Orey 教授那兒來的，因為 Fleming 做過很多跟 Singular Control

¹² 譯註：中國大陸數學家，任教中國大陸復旦大學。

¹³ 譯註：Lev Semenovich Pontryagin (1908-1988)，俄羅斯數學家，在許多數學領域做出卓越貢獻。

¹⁴ 譯註：中國大陸數學家，任教中國大陸復旦大學。

¹⁵ 譯註：此書為 Wendell H. Fleming 及 Raymond W. Rishel 合著，由 Springer 在 1975 年出版。

¹⁶ 譯註：WATANABE Shinzo，日本機率學家，師承 ITÔ Kiyosi。

¹⁷ 譯註：指 IKEDA Nobuyuki 和 WATANABE Shinzo 合著的《Stochastic Differential Equations and Diffusion Process》。

¹⁸ 譯註：Steven Orey (1929-1991)，曾任教美國明尼蘇達大學。

很靠近的東西。當時覺得 Singular Control 很有意思，因為它超出經典隨機控制論框架，看上去對我是完全新的，所以比較感興趣，我就做進去了。後來有個故事挺有趣的，我研究 Singular Control 的時候，念了很多文章，當時在美國比較領先的就是 Karatzas 跟 Shreve，在英國是 Mark Davis，法國有 El Karoui，他們都做過 Singular Control 的研究。因為 Naresh 不是做控制論的，他就建議我：『你為什麼不寫信給 Karatzas?』因為我在復旦大學的時候做過些研究，知道當文章發表時，實際上可能已經有了更新的發展、更新的結果。於是我寫信給 Karatzas，那時沒有 email，我就打字，問他：『我念了一些您的文章，如果有這方面新的研究，不曉得可不可以寄抽印本給我?』他回信：『我這方面的論文你好像已經收集得很齊全了。』後來，我的文章作出來後，就投給他，因為那時他是 SICON(《SIAM Journal on Control and Optimization》) 和 《Stochastics》的編輯委員。我那時候才剛開始練習用英文寫論文，第一篇文章投稿前 Jain 改得比較多，第二篇文章做出來後，我寄了個草稿 (draft) 給 Karatzas 請他看看。文章寄回來後，哇，一片紅！每頁都用紅筆改過了！我非常非常感動！因為我跟他是沒有關係的人，完全不認識，連我的老闆都不認識他，他們是兩個領域的人。但他覺得年輕人要培養，所以願意花時間拿著紅筆跟著我的文章走一遍，這種事好像不是每個人都會做的，也是種運氣吧。後來，跟他交流一直很多。92年我從明尼蘇達畢業後，去了普度，做 Protter¹⁹ 的博士後。當時 Protter 對我說：『我有幾個 project 在手裡，那一個你有興趣?』很有意思，其中就有 BSDE(倒向隨機微分方程)。我一下子就很感興趣。什麼道理呢？因為我出國之前，在復旦有一個李訓經老師帶的討論班。他是做 Pontryagin 極大值原理 (Pontryagin Maximal Principle) 的，當中碰到一個伴隨方程 (Adjoint Equation)，是一個倒向隨機微分方程。Bismut²⁰ 先做出來，我87年出國後，復旦的討論班仍在繼續。92年的時候，Pardoux²¹ 和 Peng²² 的 BSDE 已經出來了。後來 El Karoui 在巴黎第六大學開始 promote 這個問題。Stanford 的 Darrell Duffie²³ 用它做 Stochastic Recursive Probability，自然地牽涉到前向 (Forward) 跟倒向 (Backward) 連接起來的 BSDE，就是所謂的 FBSDE。一開始 Protter 叫他的一個學生做，我也參加進去。因為我做過控制論，想用隨機控制 (Stochastic Control) 的方法去做。後來雍炯敏²⁴ 訪問普度，我們就一起做。當時的想法是把倒向方程寫成前向方程，然

¹⁹譯註: Philip E. Protter, 現任教美國康乃爾大學。

²⁰譯註: Jean Michel Bismut (1948-), 法國數學家, 為法國科學院院士, 現任教巴黎第 11 大學, 在隨機分析與隨機微分幾何的領域有重要影響。

²¹譯註: Etienne Pardoux, 任教法國普羅旺斯大學。

²²譯註: 彭實戈 (1947-), 中國大陸數學家, 為中國科學院院士, 現任教中國大陸山東大學。他所創立的「倒向隨機微分方程」(BSDE) 對金融數學影響甚大, 獲邀在 2010 年的 ICM 大會上發表 60 分鐘的演講, 為中國大陸本土數學界獲此榮譽的第一人。

²³譯註: Darrell Duffie, 現任教美國史丹佛大學。

²⁴譯註: (1958-), 中國大陸數學家, 現任教美國 University of Central Florida。

後考慮一個最優控制問題，值函數的結點集 (Nodal set)，也就是相應的偏微分方程 (HJB equation) 的結點集。這樣做出存在性。後來發現這其實就是 Feynman-Kac formula。其實做研究就是這樣，沒做出來之前很難受，一做出來覺得很容易，就是這種感覺。

姜：所以你現在主要集中在 Backward equation 方面？

馬：後來也做了一些其他的東西。

姜：你還做控制論嗎？

馬：做控制論是免不了的，有一些問題不純粹是控制論的問題，但也會有一些關係，像極大化 (maximization)，97年以後，我花了一段時間做 Stochastic Viscosity Solution 就是 SVS。其實它跟 BSDE 也有很大的關係，但是比較難做 (目前這個領域的規模還不是很大)，現在又有一個新的辦法出來，用 rough-path 的辦法做。

姜：英國的 Terry Lyons²⁵？

馬：對，就是他！2000 年後，我帶著一批學生做與精算 (Actuarial Science) 和保險模式 (Insurance Model) 有關的問題。那些問題也會走到控制論或走到倒向方程。

許：你剛剛提到的結點集的概念，那個是 PDE 的概念？

馬：是的，我們把它拿過來，其實有點像 Charles Fefferman²⁶ 做的結點集。我們當時不知道怎麼稱呼，開始這麼叫，後來就這麼一直叫下去。

許：所以其實這問題有好幾個面，一個是 BSDE 的面，一個是 PDE 的面。

馬：對！和 PDE 的聯繫其實很強。當時，是有一些想法，是不是能在 PDE 方面提出一些問題。比方講，我上次講的前向方程的 Diffusion 含 Z ，這個放到 PDE 上面，就是拋物型方程裡兩階導數的係數帶一階導數。那時，做 PDE 的 Garofalo²⁷ 來聽我的演講。講到後來，我把它去掉。他說：『如果把那個做出來就好了。』上課時我也講過，那個 Z 放在那邊很討厭，能夠算出的案例都把它拿掉，那是一個很不容易做的問題，有些東西其實是本質的。我們用得比較多的是 PDE 的工具，倒過去的方向在 Viscosity Solution 的方面比較有用，就是用 BSDE 去做 Viscosity Solution，因為它可以用一般隨機微分方程的方法估計，這樣就比較好做一點。比方講，做數值分析 (Numerical Analysis) 的時候，或者是找數值法 (Numerical Scheme) 的時候，用 BSDE 沒有維數 (dimension) 的限制。它可以做到 quasi-linear 的，甚至 fully nonlinear 的情形。這個方面現在還在發展。quasi-linear 的情形可以把維數 (dimension) 做到 12 吧。而用 PDE 去做的話，大概只做到 3。做 PDE 的人一般大概就不做下去了。

²⁵ 譯註：Terry J. Lyons，現任教英國牛津大學。

²⁶ 譯註：Charles Louis Fefferman (1949-)，美國數學家，為美國國家科學院院士，現任教美國普林斯頓大學，因數學分析的研究而在 1978 年獲頒 Fields Prize。

²⁷ 譯註：Nicola Garofalo，現任教美國普度大學。

許：在 Finance 裡有很多奇怪的 PDE, 與一般傳統的 PDE 不同。所以你的 BSDE 最初的動機是不是也跟 Finance 有關係？

馬：一開始的動機還沒有 Finance, 完全就是最大值原理的 adjoint equation。

許：所以你不是去普度那邊才開始做的。

馬：我去普度的時候, BSDE 已經出來了。Pardoux 跟 Peng 開始提出的問題是怎麼從線性走到非線性？因為 Bismut 提出來的是線性的 BSDE, 線性方程能把解寫出來, 就是常數變異 (Variation of Constants 常微方程常用的技巧) 公式。那麼非線性又怎麼去做？一開始 Pardoux 想用隨機演算 (Malliavin Calculus) 去做, 結果 Peng 提出一個迭代的方法。做好後, 好像也不太難, 因此也沒投很好的雜誌, 就是《Statistics & Probability Letters》, 這個影響深遠 (seminal) 的文章, 因此是投在一個不很起眼的雜誌上。但是, Peng 後來繼續做下去, 把 nonlinear Feynman-Kac 給做出來。就把 PDE 連繫上了, 他後來在巴黎第六大學和 El Karoui 討論這東西, 發現它本質上可以 dynamically evaluate future position, 也就是說給定一個終端, 但 dynamics 是隨機的, 是隨機微分方程, 而對於一個給定的終端, 這個解還要是 adapted 的解, 這樣的問題在 Finance 之中比比皆是。

黃：契約是未來的？

馬：契約 (contract) 都是未來的, 它可以是一個 future product, 一個 risk, 一個 financial position。或者從精算來講, 就是一個 present formula 的問題, 一般就是一個 conditional expectation。所以本質上就會有一個缺出來, 就是 BSDE。在很多地方, 這是一個自然的工具。後來發現, 把 European option 拿過來, 用 BSDE 一解, price 跟 hedging strategy 兩個就同時出來。當時覺得這個很有用。而且因為有了非線性理論, 在 drift 的地方, 你可以加很多東西, 比如 tax 什麼的進去, 還能把線性方程弄成非線性的。然後還可以去做了 American Option, 就有了 reflected BSDE。El Karoui 後來成了推動這個 BSDE 的主要推手之一。

許：原來給 European Option 定價的做法就是解 PDE, PDE 通常不好解, 解出來後又要微分才能得到 hedging strategy。

馬：如果你要求它的“delta” (財務理論術語) 的話。

姜：這些理論不是在美國發展的吧？大概是法國人在做。

馬：法國人對 BSDE 非常熱衷, 因為在法國有兩個人一南一北地推動, Pardoux 和 El Karoui。

姜：現在還是？

馬：現在主要是 El Karoui。

姜：美國呢？

馬：美國的話, Karatzas, Protter 和他們的學生做過一些。還有 Florida 的雍炯敏。但是現在的 critical mass 好像主要就在南加州。

姜：就是你那裡？

馬：我跟張建豐²⁸ 還有 Cvitanic²⁹。Cvitanic 是 Karatzas 的學生。

許：你好像還有好幾個學生？從你那邊出去的，現在都到哪些地方？

馬：從現在算下來，我一共帶出過 10 個 Ph.D. 學生，有大半是做與 BSDE 或是 FBSDE 有關問題的，其中有些去了 Industry。有一個現在還在 University of Michigan 做博士後，叫姚松。做得最好的，就是我現在的同事，張建豐。

姜：現在在南加大？

馬：對，在南加大。Cvitanic 是 Karatzas 的學生。Karatzas 有點像我半個導師，我 92 年畢業後，Karatzas 說：『你們兩個人可以見見面，做些什麼東西。』我們在 94 年碰面，就開始做大投資者問題 (Large Investor)。

許：這個問題跟 BSDE 的關係是什麼？

馬：它就是 FBSDE，我在 94 年 Cleveland 一次會議上遇到 Cvitanic，我們坐下來聊，討論了 FBSDE。FBSDE 如果把它 decouple，前向方程就是一個股價 (stock price)，倒向方程就是 Wealth Process。但是如果你把它 couple 起來，就出來一個大投資者的問題。

黃：你的意思是可以影響他的機率？

馬：對，你把 Wealth equation 裡面的項加到前向方程裡去，那就是個大投資者的 Wealth 或是它的 strategy 影響到股價 (stock price) 了。

姜：這些問題在實際的金融市場上操作會不會被接受？

馬：實際上，至少在概念上面，他們會接受。其實現在很多東西都是假定大投資者，要不然就是你的 strategy 不會影響到股價 (stock price)。大投資者是相對於 Small Investor，那是要修改 Black-Scholes 理論的。因為 Black-Scholes 的理論有一串假設，其中之一就是 Small Investor。你談和 Black-Scholes 不一樣的東西，是要經過一些時間大家才會接受。我們那篇文章是 96 年發表的，在審稿過程中，曾受到質疑提出這個問題。但 97 年亞洲金融危機，Long Term Capital, 對沖基金 (hedge fund) 這些事情出來以後，大投資者就變成很容易接受的概念。

許：看起來還是有蠻多後續的研究，那篇文章被引用得不少。

馬：那是篇比較早的文章，我們算是比較早做大投資者問題的。

許：你後來還有一些相關工作嗎？

馬：沒有。後來就去做 FBSDE，這個問題沒再做。

姜：問你一些比較一般的問題，能不能跟我們談一下，在美國數學領域裡，機率論的發展前途，還有目前的狀況？

²⁸ 譯註：張建豐 (Zhang Jianfeng)，中國大陸數學家，現任教美國南加州大學。

²⁹ 譯註：Jaksa Cvitanic，現任教美國加州理工學院。

馬：這是個比較大的問題。

姜：就談加州那邊的狀況。

馬：機率或叫概率是每個學校都有，有幾個交叉的學科可能做概率。比如做分析的，做調和分析或是做 Heat Kernel 的都有可能做概率。做組合數學 (Combinatorics) 的，也可以做概率。當然做 Stochastic Analysis 的也可以教概率。概率論的課好像每個學校都有。

許：在普度，機率論及隨機分析開課的情況如何？在台灣，開的機率課不多，主要是基礎課程。

馬：在普度跟南加大，機率都很強，有一群做各式各樣機率的人。我去普度的時候，有 Burgess Davis³⁰，Steve Lalley³¹，Philip Protter，以及 Rodrigo Bañuelos³² 四位資深的教授，我是最資淺的。當時這四個人，Burgess 是《Annals of Probability》的主編，其他三人在不同的階段擔任過《Annals of Probability》的 Associate Editor，那你想，這能不強嗎？南加大也很強，有 Boris Rozovski³³，Peter Baxendale³⁴，Kenneth Alexander³⁵，還有你們都認識的 Richard Arratia³⁶，後來還有 Rozovski 的兩位 Associates，現在還在。然後再加上 Cvitanics，然後還有張建豐。現在 Cvitanics 跟 Rozovski 都離開了，Rozovski 去了布朗大學，Cvitanics 去了加州理工學院。不過那批做隨機微分方程的都還在。這個領域有這麼多人在一個學校，自然比較強。很多學校都有機率的課，我說的是大學程度的課。美國大學部機率的課大致是以微積分做基礎的程度。除了古典概型以外，也會講分布 (Distribution) 和特徵函數，就是傅立葉轉換 (Fourier Transform)。但是概率論有個公理體系，就是 Kolmogorov 在 1932 年建立的公理體系，它跟測度論有緊密的聯繫。所以在研究所要念以測度論為基礎的概率。其實如果要做點研究的話，測度論 (Measure Theory) 和實變函數是一定要念的。我在復旦是在大三時念的實變。

姜：大三就念實變？

馬：大三的時候，上學期學實變，下學期學泛函分析，這是一個系列的課，到了大四，學 Sobolev 函數空間什麼的。

許：現在復旦還是這樣嗎？

馬：我不清楚，但應該還是。我看復旦的學生成績單，好像還是有實變。

姜：現在台灣這邊，實變都是到研一才學。大學部可以選修，但修的人不多，泛函分析學的很少。

馬：但是數學專業應該要學的。

³⁰ 譯註：Burgess Davis，現任教美國普度大學。

³¹ 譯註：Steven Lalley，現任教美國芝加哥大學。

³² 譯註：Rodrigo Bañuelos，現任教美國普度大學，專長為機率論、調和分析及偏微分方程。

³³ 譯註：Boris L. Rozovski，俄羅斯數學家，現任教美國布朗大學。研究領域為隨機偏微分方程。

³⁴ 譯註：Peter Baxendale，現任教美國南加州大學。

³⁵ 譯註：Kenneth S. Alexander，現任教美國南加州大學。

³⁶ 譯註：Richard A. Arratia，現任教美國南加州大學。

姜：在台灣你說的那些 Sobolev Space 都是專題的課了。

馬：在大學部的時候，也是第一次唸這種 Functional Analysis level 的 PDE。一開始會學古典偏微分方程解，D'Alembert 公式等。如果是數學系的畢業生，我們會期望他懂泛函分析。

李宣北 (以下簡稱李)：你是什麼時候念大學的？

馬：1978 春，通常是說 77 級，是文革後第一屆。

李：但課程規劃仍是跟文革前一樣？

馬：好像是。

姜：當年你們這些課比一般美國大學教的要強很多，美國一般大學也沒教這麼多。

馬：我們大一上學期學數學分析，一致收斂，點集拓撲這些東西。

許：一年級不是先學微積分？

馬：是的。但是是從極限的嚴格定義開始學。在美國就是三年級以後的事了。

黃：我還有一個一般的問題，你在南加大開 Computational Finance 跟 Mathematical Finance Program，這跟傳統的數學系很不一樣，因為畢業生很容易就業。但台灣的數學系比較乾淨，不會去涉足這塊領域，你覺得數學系是不是應該更入世，去辦這個 Program？或是這樣做污染了數學？

馬：這是讓數學系的學生多了些工作的機會。在美國，有很多很多的數學系辦這種 Program，或是精算，或是 Mathematical Finance，在普度精算與 Finance 兩者都有。對於一個學校來講，這是比較重要的。因為念數學出來要從事什麼行業？光念數學，念到大學畢業，一般很難就業，念到碩士可以教中學，念到博士可以教大學，但這條路很長。像在普度，很多主修精算的學生，一畢業就可以到康乃迪克州的哈特佛 (Hartford) 找到一份工作，那是保險業的核心重地。我記得普度數學系最好的學生好像全都在 Actuarial Program。這樣就會有學生願意進數學系，對學校來講也有好處。公立學校按人頭拿經費，私立學校自然學費就可以有更多收入。對學生來講，學數學也變得比較實際。數學系不是光為數學天才開的，因為數學天才很少。對數學有興趣的小孩上數學系，可是也都會有實際上的考量，出來之後的就業機會等等都在考量當中。當然，做數學也有懷抱陽春白雪的想法的。

黃：我這樣問的原因是美國數學系的人通常不那麼 aggressive，怎麼會有這麼多數學系都開這個 Program？這是怎麼做到的？

馬：因為數學系突然發現有這麼一個 Program 可以吸引很多學生。

黃：吸引這麼多好的學生，這是一個誘因。

馬：數學系終於可以拿出一個教書以外的工作吸引學生進來。

黃：再來我想問，美國數學系的老師覺得教書是“利他”而不是為己，但是另一方面，數學系的老師通常在美國的薪水是比較低的，有了這個 Program 之後，美國數學系的老師薪水會不會比較高？

馬：沒有（笑）。

許：我想再問一些細節，數學系裡是不是有些學生額外修一些精算的課程？

馬：普度有一個精算的專業課程，要經由精算學會（SOA, Society of Actuaries）認證，SOA 有它自己的教育大綱，有一套自己的考試。要得到認證的話，課程必須要符合大綱，不是學校自己開課就行，須要它承認。我當時接觸過一些相關的事，但 2000 年以後，他們一直在改，我也不太熟悉了。最早的時候我們為學生準備四個階段的考試，先考微積分（Calculus），再是機率（Probability），再來是利率（Interest Rate），最後是 Life Contingency，包括生命年金（Life Annuities）和壽險（Life Insurance），這裡機率又進去了。學習這門課程的關鍵在於把它的問題看懂了，接下來的數學問題基本上是很簡單的。但是要把所給的精算訊息寫成數學的問題，這是主要的困難。我從 96 或 97 年開始教 Life Contingency，因為當時普度只有一位教授教這門課，而他要退休，就叫我教。我那時候也有點興趣，又可以少教一門課，於是我先旁聽他的課，就教了。教了兩年之後，覺得不能只教不做，也要做點什麼研究，我就開始想些問題出來，也帶一批學生做了一些問題。

黃：在瑞典，早期數學跟精算是在同一學會。

馬：北歐是 Actuarial Science 的發源地。

黃：現在保險公司也要 Finance 的人才。

馬：現在精算也要考 Finance 的，因為保險公司也做 Finance。

黃：保險公司的現金也高，像新光人壽，一年收的現金有 2000 億。

馬：這和保險業的 regulation 有很大的關係。我記得第一次教精算的時候，上學期教怎麼定價（Price）壽險和生命年金（Life Annuities）等等，下學期就教一大堆政府法規（Government Regulation）。

姜：對，法律規定要很清楚。

馬：法規的制定就是不讓保險公司去投資，或者只能拿一小部份去投資。

黃：現金準備要很高。

馬：沒錯，如果拿人家付保險的錢去投資，萬一保險公司倒了怎麼辦？其實，CDO（Collateralized Debt Obligation 抵押債務債券）、CDS（Credit Default Swaps 信用違約交換）這些用的就是保險的概念，但是它又沒有足夠的準備金，所以就出了很大的問題。現在保險跟 Finance 關係越來越密切，風險也會很大。對做數學的人來講，當然有很多問題可以做，學數學的學生也可以因此多幾個出路。

黃：我還有一個比較個人的問題，你因為文革被耽誤了四年，1978年進大學時，那時候中國應該累積了很多菁英，10年以上的菁英全部在那個時候同時進入大學。

馬：我們當時班裡有66年高中畢業的，是高中全部念完的，因為文革是66年開始的，這些人基礎非常好。還有的就是76年還在念高中的，因為這時文革已經結束，所以他們的老師會訓練他們，這兩代的人都在我們班裡面。我們班年紀最大的是1946年出生的，最小的是15歲。

姜：相差了17歲。

馬：已經算是叔姪輩了。我們呢，文革開始時我們還在念小學，當時課停了，後來恢復上課，但也沒念什麼書。我還記得我剛上中學的時候，要是現在應該功課很多很多了是吧？而我們那時都在外面打玻璃球（笑），念到15歲時，才開始知道念一點書。好在我們的班主任是數學老師，他開始講些東西，我們有幾個人跟著學習。當時好像也沒有特別喜歡數學，但那時沒有什麼其他的課。我到高中畢業都沒有念過化學，因為沒有化學老師，老師不曉得到那兒去了。我們當時有什麼課呢？有政治，語文，英文，數學，還有一科叫做工農業基礎知識，這種比較實用的，其實就是物理，除了數學之外，其他都是工農業基礎知識。（眾人笑）那時的語文課本，學一些古文。像《黔無驢》³⁷我還可以背很長一段：黔無驢，有好事者，船載以入；至則無可用，放之山下...

黃：跟你同期的有許多優秀的人才，但專以數學來說，你覺得跟你同期或前後幾年，有那些人是比較特出的？

馬：比方講，特別是做統計的，我們復旦出來有好幾位很厲害的。范劍青³⁸，他比我們低一級，我們是77級，他是78級。跟他同屆的還有孟曉黎³⁹、應志良⁴⁰，為什麼他們能那麼成功？就是因為他們都是數學系畢業的。

黃：還有就是你們集中太多人了，集中了最好的一批人才。

馬：不過數學的基礎訓練也是很重要的。當時是有人超前很多，像我們進去時，有一個叫姚大衛⁴¹，現在在哥倫比亞，他很快就出國了。還有一個叫李樂德⁴²，他是我們78年全國高考第一名，也在數學系。如果是文革前高中畢業的，其中有的人因為對數學有興趣，進復旦的時候，已經把那些吉米多維奇的4500題⁴³題目都做光啦，那時候我們還不知道什麼是吉米多維奇呢。但是有一點，因為我們都是在社會上待過的，所以讀書都很用功，大家都拼得很厲害。

³⁷ 譯註：《黔無驢》為唐朝柳宗元的作品，為唐宋八大家之一。

³⁸ 譯註：中國大陸統計學家，現任教美國普林斯頓大學。於2000年獲頒 COPSS (Committee of Presidents of Statistical Societies) President's award。

³⁹ 譯註：中國大陸統計學家，現任教美國哈佛大學。

⁴⁰ 譯註：(1960-)，中國大陸數理統計學家，對生物醫學統計界影響甚多。

⁴¹ 譯註：中國大陸數學家，現任教美國哥倫比亞大學及擔任香港中文大學電子商務中心主任。

⁴² 譯註：中國大陸數學家，現任教長江商學院。

⁴³ 譯註：指 B. P. Demidovich (俄羅斯數學家，1906-1977) 的著作《數學分析 4500 題》。

黃：你們這一批經過這十幾年的文革，韌性很強，是不是有好成就的人很多，而且密度很高。

馬：當時就是非常珍惜能夠念書的這個機會。

許：這些人都在外面發展？

馬：很多都在外面。

許：在本國的發展情況如何？彭實戈當然是回去待在國內了。

馬：彭實戈是回去了，這裡面當然也是有很多機率，但是在國外的，大概是一半。

李：當時一班大概多少人？

馬：大概有30多人，然後我們又擴大招生，招的都是年紀比較大的，都成家了，叫做“走讀生”。我們是一定要住校的，班主任還有一位指導員也都住校，那時候比較軍事化。我們的班主任其實是我們數學分析的習題老師。

周雲雄 (以下簡稱「周」)：當時的師資怎麼樣呢？

馬：當時的師資很厲害，我們是第一屆進去，那時候，復旦最有名的谷超豪⁴⁴ 老師，夏道行⁴⁵ 老師都在，還有李大潛⁴⁶ 老師、嚴紹宗⁴⁷ 老師以及他們的學生，這是一批很厲害的人了。我的實變是跟嚴紹宗老師學的，泛函分析是夏道行老師教的，然後 Sobolov Space 是李大潛老師教的。

周：這些都是研究所的課？

馬：大學的，Sobolev Space 是大四的選修課。那時候，他們都很願意教。

姜：所以幫助很大，訓練很扎實。

馬：因為大家都有一股衝動，老師也是非常興奮，因為終於可以教了 (眾人笑)，做老師這麼多年，終於可以教了。

黃：過去10年復旦出去念書的學生跟你們那時候的學習態度比較，你的感覺如何？

馬：我覺得現在讓人分心的事物太多，一個是客觀的分心，就是現在玩的東西太多。我們那時候晚上沒有什麼活動，頂多到校外買碗餛飩吃吃。那時候開始有舞會，學生組織起來開一些舞會，但沒有那麼多。不過有一條我從現在招生看到的分心，就是從課程上看到的，你拿學生的成績單來看，幾乎找不到有用的課 (眾人笑)。比方講，應用數學系，選課瀏覽時出現的都是音樂、古典文學欣賞、現代舞，這種課都可以算學分。

黃：那沒關係，至少數學的課要好好的學。

馬：數學的課很少。至少一路看下來都很少，但 GPA (Grade Point Average) 很高。所以如果有實變函數之類的課，我都覺得挺好的。其實修其他系的課不是問題，但數學系的學生至

⁴⁴ 譯註：(1926-)，中國大陸數學家，為中國科學院院士，現任教復旦大學。

⁴⁵ 譯註：(1930-)，中國大陸數學家，為中國科學院院士，現任教復旦大學。

⁴⁶ 譯註：(1937-)，為中國大陸數學家，為中國科學院及法國科學院院士，現任教復旦大學。

⁴⁷ 譯註：中國大陸數學家，現任教復旦大學。

少要學足夠的數學課，可是那麼多課排下來，都像美國說的課餘活動。選課應該要有個大概的規範，而不是什麼課都可以選。有些學校的課，學生選得很有條理，對這種學生，我們很容易就決定要收了。我覺得要有些硬的課，像台大的代數就很好，我念書的時候沒有代數，那時復旦代數比較弱。

黃：台大是例外，因為台大的電機很好，念電機要用到密碼，所以要求數學系開代數課程。

馬：我有朋友念電機，92 還是 93 年時去英特爾 (Intel)，由於他念過抽象代數，英特爾要求他教同事工作上會用到的編碼學 (Coding)，所以數學的基礎訓練還是很重要。像我如果現在要招收 Mathematical Finance 的學生，我對他 Finance 修習的科目要求不高，可能修一兩門課就可以了。但對於數學，就不是一兩門課可以訓練得出來，要練習，才能有功力在那裡，訓練過跟沒訓練過就是不一樣。如果有好的數學訓練，念起書來就不一樣。有些 Mathematical Finance 的書，說是也不需要數學也不需要 Mathematical Finance，我教你，你念我這本書，我這本書是 self-contained，但你如果光念這本書，結果大多是不成功的。因為就算你把他的定理全部背出來，你也不一定會做他的習題，你不能複製 (reproduce)，你不曉得他在講什麼，要有數學的背景才能知道他在講什麼，不能單把定理背出來，那沒用的。

黃：1978 大陸第一批出去的到現在也有 30 多年了，以機率的成就來講如果跟日本比，你覺得大概在那裡？

馬：我覺得不比日本差，你要看有沒有領頭的人 (leader)，有沒有什麼領域的帶頭者。比方說馬志明，彭實戈，他們現在都是很頂尖的帶頭者。數學家做得好的，以及像我們這種沒成家的，大概有兩大類，一類是啃骨頭的，一類是吃肉的。什麼意思呢？有的人會找問題，發現了，衝進去，把“好做的”都做掉了，然後大家都撲上去做。到後來，剩下來的都是難題，然後就有人鏗而不捨，把很難的東西給啃掉。那麼，是吃肉的厲害還是後面啃骨頭的厲害？從中國的觀念來講，很多人很推崇這些解決了誰誰誰的問題，解決誰誰誰的猜想的人。那麼，我們想一下，那一個猜想是以中國人命名的？或者說，一個領域全世界會追隨的人有幾個是中國人？如果要講成就的話，我覺得彭實戈是一個很厲害的人，我非常佩服他，他做的很多東西，很多人都會跟。當然不是說整個機率領域，至少是一群全世界範圍內的人會跟，這就不容易，這樣的人很少。我們這一代有馬志明、彭實戈這樣的人出來，但目前在日本，能指導我們這個領域的人，好像不多。其實像 Fleming 做幾何測度論，50 幾年的時候，開創了幾何測度論的新領域，因而拿過 Steele Prize，到後來，他說：『太難了，我不做了。』轉做隨機控制，又開出一塊新領域來，他就是領頭的。他做的東西，有人會跟。領頭的人需要有想法有眼界。

黃：高木貞治⁴⁸ 先生在 1894 年才進東大，東大畢業後，就去 Göttingen 跟 Hilbert (David

⁴⁸譯註：高木貞治 (TAKAGI Teiji, 1875-1960)，在代數學論方面貢獻卓著。寫了許多大學教材、中小學教科書及各種普及讀物。關於高木教授之生平事蹟，詳見數學傳播第 23 卷第 2、3 期。

Hilbert, 1862-1943), 20世紀初才回日本, 帶了一批人上來, 他們大概在 30 或 40 幾年後都已經出頭了, 他們一代就上來了, 不只有代數, 還有分析, 泛函, 很多不同方面的人才。中國大陸這三十多年, 看不看得出來有這種氣勢。

馬: 這問題太大了, 不太敢回答 (笑)。

李: 不過, 日本在明治維新時已經打好基礎, 對於外面的知識, 他們能夠很快翻成日文引進日本, 可以很快吸收。

馬: 交流得比較快。

黃: 可是大陸的書就寫得很好。

姜: 機率論, 是西方先開創出來的, 所以中國領域其實起步得比較晚。

黃: 我想問的是中國方面有沒有這種開創領域的人才?

馬: 雖然現在還看不太出來, 但我覺得彭實戈, 至少他做的東西有一批人跟著做, 包括法國人。

許: 今年 ICM(International Congress of Mathematicians) 也邀請他做60分鐘的演講。

馬: 對。BSDE 他從一開始就做, 到現在一條線下來大多數有相連繫的, 都是他領頭, 小 g -expectation, 大 G -expectation, 他都是領頭者, 有很多人跟著去做。

許: 我覺得在文化上要發展某樣東西, 需要一段很長的時間, 像剛剛提到的彭實戈, 還有日本跟中國, 發展過程還是需要跟外界有往來。

黃: 某種意義來說, 像法國, 他們的數學就有自己的樣子, 有自己的傳統—這一步總是要走的, 國際合作是不一樣的。

許: 現在跟以前完全不一樣, 以前可以與世隔絕一個人就可以做問題, 現在很難這樣做了。

黃: 我把問 Itô 先生的問題拿來問你, 我1987年問他日本的機率怎麼樣? 他覺得沒有那麼好, 因為那時候在日本, 不是每個機率的方向都有, 像在美國, 每個機率的方向都有, 你可以拿起電話跟某個人討教, 他會告訴你誰做到什麼地步。在日本, 不見得可以做到這步。之後他講了一句話:『畢竟, 科學是西方的產物。After all science is a western culture.』那時候是1987, 當然他可能是客氣, 但他是這樣講, 畢竟日本已經發展這麼久了, 他又是開創性的人物。

姜: Itô 當然是 Itô 積分的開創者, 是了不起的, 但在這之前, 也是蘊育了很久, 但是這些是在西方蘊育, 不是在日本蘊育, 所以 Itô 是集大成, 但歐洲跟美國有一大段歷史我們不能忽略。

黃: 因為現在做機率的不少, 所以我才想問你, 你覺得呢?

馬: 這個就是吃肉跟啃骨頭, 因為一個領域做了很久還是可以啃骨頭, 可以研究很難的問題。

黃: Itô先生幫我們留字寫的是: 溫故知新。

姜: 像機率這種領域, 跟其他科學有很多互動, 機率本身理論的發展有些會跟外界互動, 像 Finance, 如果我們專事機率, 不會有 Finance 出來, Finance 出來就引發了機率很多問題。

機率本身原來就可以產生很多問題出來，但如果跟外界互動，可以得到很多刺激。所以不是說研究機率的人多就會有個帶頭者出來，有時還是要靠與外界的環境跟刺激的配合。而且不僅僅跟數學本身配合，還要跟數學以外的領域配合。

馬：還有就是知識的視野 (knowledge scope)，還是要看到一些東西，要不然你很難成為領頭者，你提出問題，憑什麼人家要跟著你走。

姜：所以 Itô 先生說得沒錯，科學是西方先開始，我們不能把人家的 credit 搶過來，像物理，化學更是西方比我們早發展，早太多了。

黃：不過，你講得也不完全對，原因是機率發展得比較晚，跟其他領域比起來沒有那麼久。

姜：不過機率受其他領域的刺激很大，像工程，這方面，還是西方的國家走在我們前面，我們這方面的刺激比較慢，像統計裡面的生物統計，美國的刺激就比我們大多了。

馬：Itô先生講得很有道理，科學發展還是有早晚的問題。

姜：他們有傳統，我們要慢慢發展建立，然後再跟他們比。

黃：還有你對 Finance 上的計算...

馬：這是我的弱項 (眾人笑)，這是很重要的問題。

黃：即使在機率上，Finance 還是要能算，因為要能得個數字出來，要不然沒辦法去做任何事情。

馬：計算是一個非常非常重要的功夫。我現在有個產品給你，你給我算個價錢，客人在等著，你說我大概要 3~5 個小時，或者說明天再給你好了，沒用的。所以這是一個很挑戰的東西。因此有很多 Program，像普度就強調是 Computational Finance，也就是強調有 computer science involved，學生如果知道一些算法，出路就會好很多。

姜：今天麻煩你很久了，非常感謝。

—本文訪問者許順吉、姜祖恕、黃啓瑞、周雲雄、李宣北任職中央研究院數學所，整理者林思華為中央研究院數學所助理—

Taipei Conference on Representation Theory

台北表現理論研討會

日期：2010年12月20日(星期一) ~ 2010年12月23日(星期四)

地點：臺北市大安區羅斯福路四段1號 天文數學館6樓 中央研究院數學研究所 演講廳

Please refer to <http://www.math.sinica.edu.tw> for further details.