數學傳播 34卷2期, pp. 3-26

疊書問題

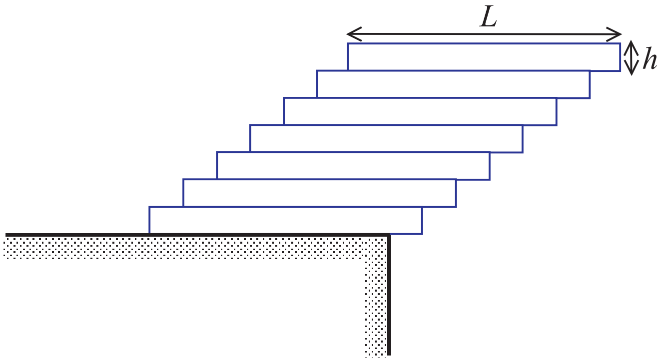
伍庭曄

摘要: 如何在桌面邊緣以依序向外延伸的方式堆疊書本, 並令其有最大的水平延伸距離而不塌落? 這個看似憑直覺經驗即可回答的簡單問題, 其實並不如想像中的容易。根據物理常識: 一傾斜物體, 若通過其質心的鉛垂線落在物體底面積外, 則會傾倒。然而物體的質心位置取決於其外形, 在外形未確定之前質心的位置無法預先得知。本文即是嘗試運用物理學中力矩平衡的定律, 配合高中數學所教導的級數的觀念來解析不同參數情況下書本應堆疊的方式, 並推導出各個不同參數組合下書本最大突出桌緣距離的數學公式。研究的結果顯示基本上, 當書本長度、質量均相等的情形下, 應將書本由上而下做調和級數的差排方式堆疊, 會得到最大的突出桌邊距離。由於調和級數是一個發散級數, 因此最上層的書本突出桌緣外的距離會隨著書本的堆疊數量以對數函數的速率緩慢的趨向無窮大。而在書本長度、質量作等差改變的情形下, 則應將書本由上而下以一類似調和級數與等差級數組合的排列方式堆疊, 會得到最大的突出桌緣距離。除此之外, 本研究亦運用求解微分方程式的方法驗證了堆疊書本端點所形成的軌跡爲一對數函數與線性函數的組合形式。利用此解析函數, 我們可輕易的求出堆疊數量任意大的情況下書本突出桌緣的概略距離。

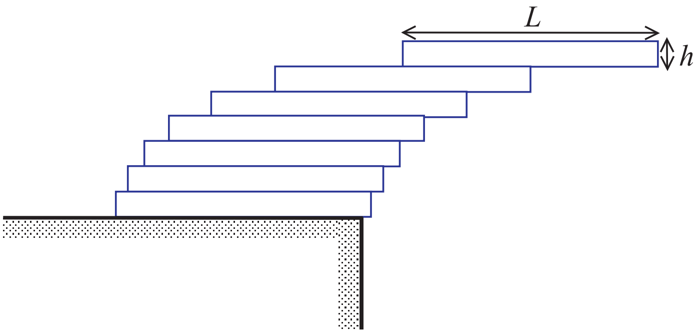
一、疊書問題描述

有關疊書問題的基本描述爲: 在桌面邊緣堆疊書本, 讓每本書皆突出於下面的書本, 則最上面的那本書最多可以向外延伸多長而不會坍塌? 如果有 N 本書相疊, 則最大突出桌邊緣的量會是多少? 要怎麼疊才會得到最大突出量? 按一般直覺的想法 (如圖一) 會認爲最上面那本書能突出桌緣的部份不會超過一本書的長度, 實際的情形果眞是如此嗎? 如果書本堆疊的方式不是呈線性差排的話 (如圖二), 情況又會是如何? 可不可能堆疊無限多本書, 使其遠超出桌緣 (如同一通天的梯子) 而不垮下來? 當書本越疊越多時, 最上面的書突出桌邊緣的距離是否有極

限? 再將上述問題做進一步的延伸, 如果各本書之質量、長度不相同, 又該如何堆疊才會得到最大的突出量? 是否有數學公式可以求出各種不同情形下書本突出桌緣的距離?



圖一: 常見的等差排堆疊方式。



圖二: 非線性差排的堆疊方式。

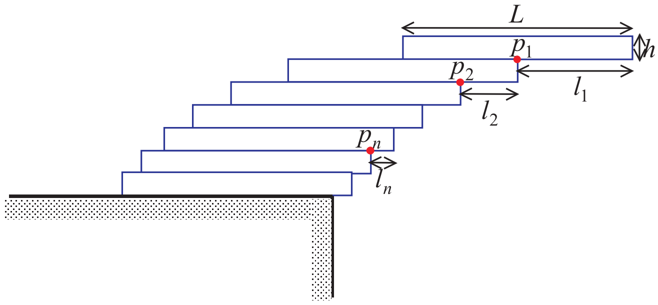
堆疊書本其實是一個古老的問題, 在網路上及物理書籍中 [1-5] 皆曾出現過, 但大多未詳細解釋書本應如何疊置, 也未做系統化的深入分析不同書本質量、長度情形下的堆疊方式以及列出堆疊的數學公式。諸如前段所敘述的一些問題, 憑直覺所推斷的結論可能與實際的答案南轅北轍。本研究即是希望藉由高中物理課中所學到的質量中心與力矩平衡的概念, 配合數學中級數的觀念與性質來解釋、分析及推導不同情況下堆疊書本的最大突出量之數學式; 最後並利用極限與微積分的方法得出各個突出桌邊緣的書本端點所形成的軌跡曲線, 此軌跡函數同時也提供了一個計算書本突出桌緣距離的簡便公式。

二、解析方法與過程

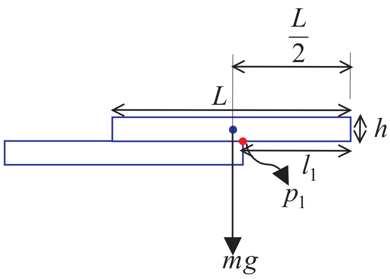
影響堆疊書本延伸量的因素包括書本的質量、長度等, 所以我們把問題分成四個不同的情

況來探討:

(一)、等大小、等質量之書本堆疊



圖三: 書本堆疊之各個物理參數定義圖。

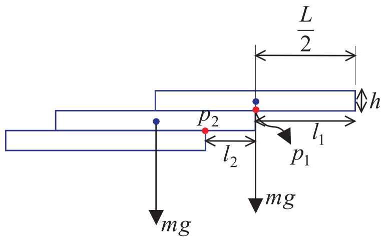


圖四: 最上層書本力矩平衡示意圖。

如圖三, 假設書本長度爲 L、質量爲 m、高度爲 h, l_n 爲從最上層往下數第 n 層書相對於第 $n+1$ 層書之突出量。因爲下層書本的排列並不會影響上層書本是否會掉落, 所以此問題若將最上方的書當作第一本書然後依序往下分析會比較容易處理。每一層書本是否會落下可以從此層以上每本書的質量中心 (材質均勻的書本質心位於 $L/2$ 處) 對緊鄰此層之下的那本書的邊緣所產生的力矩來判斷。因此, 若只考慮最上面的那本書所受力矩情形 (如圖四), 要使書本突出量能達到最大而且不會掉落的條件爲 p_1 處所受力矩爲零, 其數學式爲:

$$(l_1 - \frac{L}{2})mg = 0 \qquad \text{得} \quad l_1 = \frac{L}{2} \tag{2.1.1}$$

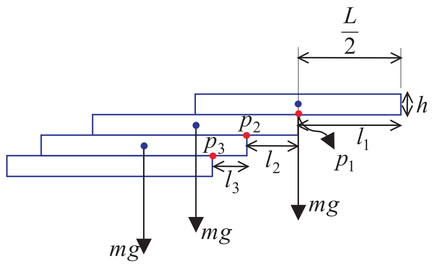
這個結果是顯而易見的, 一本書若突出下本書邊緣超過自身長的一半 (即質量中心在下本書邊緣之外) 則會掉落。



圖五: 最上面兩本書之力矩平衡示意圖。

接下來考慮最上面兩本書的力矩平衡 (如圖五), p_2 處所受力矩也應爲零, 才能使第二本書 (連同第一本書) 向外延伸量爲最大且不會掉落 (此時, 因爲第二本書如何排列並不會影響第一本書對 p_1 點所施加之力矩, 因此 p_1 處所受力矩仍爲零)。即:

$$(l_1+l_2-\frac{L}{2})mg+(l_2-\frac{L}{2})mg=0 \qquad \text{得} \quad l_1+2l_2=\frac{2L}{2} \tag{2.1.2}$$



圖六: 最上面三本書之力矩平衡示意圖。

同理, 三本書堆疊的情形 (如圖六) 之下, 書本不會落下的臨界條件爲 p_3 處所受力矩爲零:

$$(l_1+l_2+l_3-\frac{L}{2})mg+(l_2+l_3-\frac{L}{2})mg+(l_3-\frac{L}{2})mg=0$$

$$\text{得} \quad l_1+2l_2+3l_3=\frac{3L}{2} \tag{2.1.3}$$

由 (2.1.1)、(2.1.2)、(2.1.3) 式可以推得當堆疊 n 本書時, 欲得到最大突出量, 各書本之排列須滿足下列之級數關係式:

$$\sum_{k=1}^{n} kl_k=\frac{nL}{2}$$

要解出第 n 本書所能突出的最大長度可以由下列式子求得:

$$\sum_{k=1}^{n} kl_k-\sum_{k=1}^{n-1} kl_k=\frac{nL}{2}-\frac{(n-1)L}{2}, \quad \text{即 } nl_n=\frac{L}{2}$$

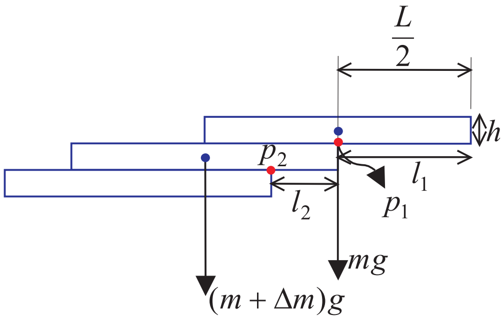
故 $$l_n = \frac{L}{2n} \tag{2.1.4}$$

而 N 本書共能突出桌緣的總長度爲 $$l = \sum_{n=1}^{N} l_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{L}{2n} \tag{2.1.5}$$

(二)、等大小、質量不等之書本堆疊

在此例中爲求簡便, 我們假設書本的厚度 h 爲定值, 且由上到下書本質量的變化是一線性關係; 即第一本書質量爲 m, 第二本書質量爲 $m+\Delta m\cdots\cdots$, 第 n 本書質量則爲 $m+(n-1)\Delta m$。其中我們並沒有限定 Δm 的正負值, 所以書本質量的變化可以是遞增, 也可以是遞減。由於此例中書長並未改變, 所以可以沿用上例等大小書本堆疊的情形, 並將質量項作修改即可。

設最上面的那本書長度爲 L、質量爲 m, 和例一中的情形相同, 故第一本書最大突出距離爲 $L/2$。

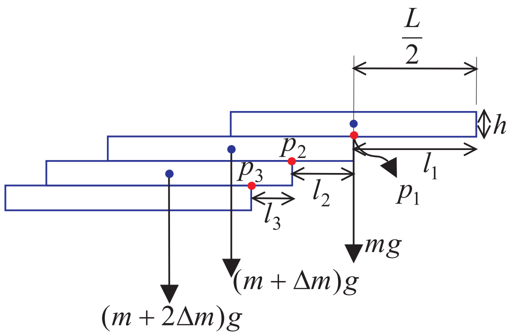


圖七: 例二中最上面兩本書之力矩平衡示意圖。

考慮最上面的兩本書的情形 (如圖七), 要使 p_2 處所受力矩爲零, 則:

$$(l_1 + l_2 - \frac{L}{2})mg + (l_2 - \frac{L}{2})(m+\Delta m)g = 0$$

得 $$l_1 m + l_2[m + (m+\Delta m)] = \frac{L[m+(m+\Delta m)]}{2} = \frac{L(2m+\Delta m)}{2}$$



圖八: 例二中最上面三本書之力矩平衡示意圖。

同理, 考慮三本書時 p_3 處的力矩平衡 (如圖八), 則:

$$(l_1+l_2+l_3-\frac{L}{2})mg+(l_2+l_3-\frac{L}{2})(m+\Delta m)g+(l_3-\frac{L}{2})(m+2\Delta m)g=0$$

得 $$l_1m+l_2[m+(m+\Delta m)]+l_3[m+(m+\Delta m)+(m+2\Delta m)]$$
$$=\frac{L[m+(m+\Delta m)+(m+2\Delta m)]}{2}=\frac{L(3m+(1+2)\Delta m)}{2}$$

依此類推, 可得出 n 本書堆疊時所須滿足之通式如下:

$$\sum_{k=1}^{n} l_k\Big[km+\frac{(k-1)k}{2}\Delta m\Big]=\frac{L}{2}\Big[nm+\frac{(n-1)n}{2}\Delta m\Big]$$

l_n 之值則可由下式求出:

$$\sum_{k=1}^{n} l_k\Big[km+\frac{(k-1)k}{2}\Delta m\Big]-\sum_{k=1}^{n-1} l_k\Big[km+\frac{(k-1)k}{2}\Delta m\Big]$$
$$=\frac{L}{2}\Big[nm+\frac{(n-1)n}{2}\Delta m\Big]-\frac{L}{2}\Big[(n-1)m+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\Delta m\Big]$$

即 $l_n\Big[nm+\frac{(n-1)n}{2}\Delta m\Big]=\frac{L}{2}[m+(n-1)\Delta m]$

化簡得:

$$l_n=\frac{L[m+(n-1)\Delta m]}{2nm+n(n-1)\Delta m}=\frac{L}{n}\Big[\frac{1+(n-1)\varepsilon}{2+(n-1)\varepsilon}\Big]=\frac{L}{n}\Big[1-\frac{1}{2+(n-1)\varepsilon}\Big] \tag{2.2.1}$$

其中 $\varepsilon=\frac{\Delta m}{m}$ 代表書本質量改變量與最上層書 (即第一本書) 質量的比值。
N 本書共能突出桌緣的總長度則爲:

$$l=\sum_{n=1}^{N} l_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{n}\Big[\frac{1+(n-1)\varepsilon}{2+(n-1)\varepsilon}\Big]=\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{n}\Big[1-\frac{1}{2+(n-1)\varepsilon}\Big] \tag{2.2.2}$$

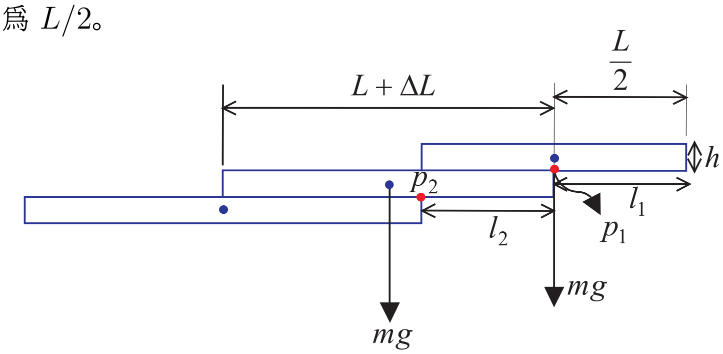
上式對 $\varepsilon>0$ 或 $\varepsilon<0$ 皆適用。但須注意的是當 $\varepsilon<0$ 時 (即書本質量從上到下爲遞減關係), 堆疊書本的總數目 N 會受到限制, 這是因爲書本的質量不得爲負值的緣故。故 (2.2.1) 及 (2.2.2) 式中的 n 和 N 在 $\varepsilon<0$ 的情況下應限制在小於 $[1/|\varepsilon|]+1$ 的範圍內, 其中 [ ] 爲高斯符號, | | 爲絕對值。

(三)、質量相等、長度不等之書本堆疊

爲求簡便, 我們假設書本的厚度 h 爲定值, 且由上到下的書本長度變化是線性關係; 即第一本書長度爲 L, 第二本書長度爲 $L+\Delta L\cdots\cdots$, 第 n 本書長度則爲 $L+(n-1)\Delta L$。我

們依然不限定 ΔL 的正負值, 所以書本長度的變化可以是遞增, 也可以是遞減。由於書質量並未改變, 所以可以沿用第一例中等質量書本堆疊的情形, 並將長度項作修改即可。

在只有一本書的情形時, 書本長為 L、質量為 m, 和等大小、等質量之書本堆疊的情形相同, 故最大突出距離為 $L/2$。

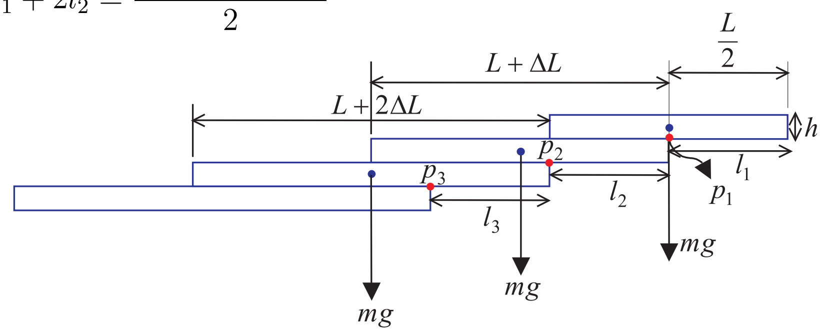


圖九: 例三中最上面兩本書之力矩平衡示意圖。

考慮最上面的兩本書的情形 (如圖九), 要使 p_2 處所受力矩為零, 則:

$$(l_1 + l_2 - \frac{L}{2})mg + (l_2 - \frac{L+\Delta L}{2})mg = 0$$

得 $$l_1 + 2l_2 = \frac{L + (L+\Delta L)}{2}$$



圖十: 例三中最上面三本書之力矩平衡示意圖。

考慮三本書時 p_3 處的力矩平衡 (如圖十), 則:

$$(l_1 + l_2 + l_3 - \frac{L}{2})mg + (l_2 + l_3 - \frac{L+\Delta L}{2})mg + (l_3 - \frac{L+2\Delta L}{2})mg = 0$$

得 $$l_1 + 2l_2 + 3l_3 = \frac{L + (L+\Delta L) + (L+2\Delta L)]}{2}$$

依此類推, 可得出 n 本書堆疊時所須滿足之通式如下:

$$\sum_{k=1}^{n} kl_k = \frac{nL + \frac{(n-1)n}{2}\Delta L}{2}$$

l_n 之值則可由下式求出:

$$\sum_{k=1}^{n} kl_k - \sum_{k=1}^{n-1} kl_k = nl_n = \frac{L+(n-1)\Delta L}{2}$$

$$\text{即}\quad l_n = \frac{L+(n-1)\Delta L}{2n} = L\frac{1+(n-1)\frac{\Delta L}{L}}{2n} = \frac{L}{2n}[1+(n-1)\eta] \qquad (2.3.1)$$

式中 $\eta = \frac{\Delta L}{L}$ 代表書本長度改變量與最上層書本(即第一本書) 長度的比值。
而 N 本書共能突出桌緣的總長度則爲:

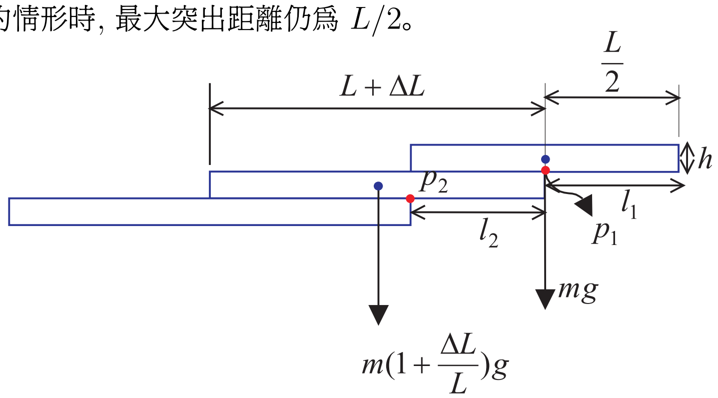
$$l = \sum_{n=1}^{N} l_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{L+(n-1)\Delta L}{2n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{L}{2n}[1+(n-1)\eta] \qquad (2.3.2)$$

上式對 $\eta > 0$ 或 $\eta < 0$ 皆適用。如同前例, 若 $\eta < 0$ 時 (即書本長度從上到下爲遞減關係), 堆疊書本的總數目 N 會受到限制, 這是因爲書本的長度不得爲負值的緣故。故 (2.3.1) 及 (2.3.2) 式中的 n 和 N 在 $\eta < 0$ 的情況下應限制在小於 $[1/|\eta|]+1$ 的範圍內, 其中 [ ] 爲高斯符號, | | 爲絕對值。

(四)、密度相等、大小不等之書本堆疊

此例較爲複雜, 是綜合二、三兩例的情形。我們依然假設書本的厚度 h 爲定值且書本寬度皆相同, 由上到下書本長度的變化爲線性關係; 由於各書本密度相同, 書本的質量比即等同於長度比。因此第二本書長度爲 $L+\Delta L$、質量爲 $m(\frac{L+\Delta L}{L}) = m(1+\frac{\Delta L}{L})$, 第三本書長度爲 $L+2\Delta L$、質量爲 $m(\frac{L+2\Delta L}{L}) = m(1+\frac{2\Delta L}{L})$, 餘依此類推。

在只有一本書的情形時, 最大突出距離仍爲 $L/2$。

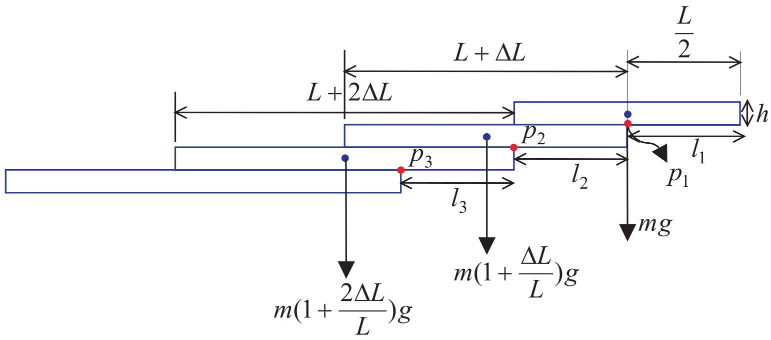


圖十一: 例四中最上面兩本書之力矩平衡示意圖。

考慮最上面的兩本書 (如圖十一), 要使 p_2 處所受力矩爲零, 則:

$$(l_1+l_2-\frac{L}{2})mg + (l_2 - \frac{L+\Delta L}{2})m(1+\frac{\Delta L}{L})g = 0$$

得 $$l_1 + l_2\Big[1 + (1 + \frac{\Delta L}{L})\Big] = \frac{L}{2} + \frac{(L+\Delta L)}{2}(1 + \frac{\Delta L}{L}) = \frac{L^2 + (L+\Delta L)^2}{2L}$$



圖十二: 例四中最上面三本書之力矩平衡示意圖。

同理, 考慮最上面的三本書於 p_3 處的力矩平衡 (如圖十二), 可得:

$$\begin{aligned}&(l_1 + l_2 + l_3 - \frac{L}{2})mg + (l_2 + l_3 - \frac{L+\Delta L}{2})m(1 + \frac{\Delta L}{L})g \\ &+(l_3 - \frac{L+2\Delta L}{2})m(1 + \frac{2\Delta L}{L})g = 0\end{aligned}$$

即 $$\begin{aligned}&l_1 + l_2\Big[1 + (1 + \frac{\Delta L}{L})\Big] + l_3\Big[1 + (1 + \frac{\Delta L}{L}) + (1 + \frac{2\Delta L}{L})\Big] \\ &= \frac{L}{2} + \frac{(L+\Delta L)}{2}(1 + \frac{\Delta L}{L}) + \frac{(L+2\Delta L)}{2}(1 + \frac{2\Delta L}{L}) \\ &= \frac{L^2 + (L+\Delta L)^2 + (L+2\Delta L)^2}{2L}\end{aligned}$$

依此類推, 可得出 n 本書堆疊時所須滿足之通式如下:

$$\sum_{k=1}^{n} l_k\Big[k + \frac{(k-1)k}{2}\frac{\Delta L}{L}\Big] = \sum_{k=1}^{n}\frac{[L+(k-1)\Delta L]^2}{2L}$$

l_n 之值則可由下式求出:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} l_k\Big[k + \frac{(k-1)k}{2}\frac{\Delta L}{L}\Big] - \sum_{k=1}^{n-1} l_k\Big[k + \frac{(k-1)k}{2}\frac{\Delta L}{L}\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{[L+(k-1)\Delta L]^2}{2L} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{[L+(k-1)\Delta L]^2}{2L}\end{aligned}$$

即 $$l_n\Big[n + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\Delta L}{L}\Big] = \frac{[L+(n-1)\Delta L]^2}{2L}$$

$$\Rightarrow\ l_n=\frac{[L+(n-1)\Delta L]^2}{2L\Big[n+\dfrac{n(n-1)\Delta L}{2L}\Big]}$$

化簡得:

$$l_n=\frac{1}{n}\frac{[L+(n-1)\Delta L]^2}{[2L+(n-1)\Delta L]}=\frac{L}{n}\frac{[1+(n-1)\eta]^2}{[2+(n-1)\eta]} \tag{2.4.1}$$

式中 $\eta=\frac{\Delta L}{L}$ 代表書本長度改變量與最上層書本長度的比值 (亦爲質量變化之比 $\frac{\Delta m}{m}$)。而 N 本書共能突出桌緣的總長度則爲:

$$l=\sum_{n=1}^{N}l_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\frac{[L+(n-1)\Delta L]^2}{[2L+(n-1)\Delta L]}=\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{n}\frac{[1+(n-1)\eta]^2}{[2+(n-1)\eta]} \tag{2.4.2}$$

同樣地, 上式對 $\eta>0$ 或 $\eta<0$ 皆適用。若 $\eta<0$ 時 (即書本長度與質量從上到下爲遞減關係), 由於書本的長度及質量均不得爲負值, 因此堆疊書本的總數目 N 會受到限制。故 (2.4.1) 及 (2.4.2) 式中的 n 和 N 在 $\eta<0$ 的情況下應限制在小於 $[1/|\eta|]+1$ 的範圍內, 其中 [ ] 爲高斯符號, | | 爲絕對值。

三、結果與討論

總結以上四種情況下所推導出書本堆疊最大突出量的數學式, 將其整理如下:

例一: 書本等長、等質量

$$l_n=\frac{L}{2n} \tag{3.1}$$

N 本書突出桌緣的總長度爲:

$$l=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}L \tag{3.2}$$

(3.2) 式爲一調和級數。

例二: 書本等長、質量呈線性變化

$$l_n=\frac{L[m+(n-1)\Delta m]}{2nm+n(n-1)\Delta m}=\frac{L\Big[1+(n-1)\dfrac{\Delta m}{m}\Big]}{2n+n(n-1)\dfrac{\Delta m}{m}}=\frac{L}{n}\Big[\frac{1+(n-1)\varepsilon}{2+(n-1)\varepsilon}\Big] \tag{3.3}$$

N 本書突出桌緣的總長度爲:

$$l_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{L\Big[1+(n-1)\dfrac{\Delta m}{m}\Big]}{2n+n(n-1)\dfrac{\Delta m}{m}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{n}\Big[\frac{1+(n-1)\varepsilon}{2+(n-1)\varepsilon}\Big]=\sum_{n=1}^{N}\frac{L}{n}\Big[1-\frac{1}{2+(n-1)\varepsilon}\Big] \tag{3.4}$$

其中 $\varepsilon = \frac{\Delta m}{m}$, $\varepsilon > 0$ 代表書本質量由上而下呈遞增排列, $\varepsilon < 0$ 則爲遞減排列; 當 $\varepsilon < 0$ 時, 堆疊書本的總數量 N 不得超過 $[1/|\varepsilon|] + 1$。(3.4) 式基本上仍爲一調和級數的形式。

例三: 書本質量相等、長度呈線性變化

$$l_n = \frac{L + (n-1)\Delta L}{2n} = \frac{L}{2n}[1 + (n-1)\eta] \tag{3.5}$$

N 本書突出桌緣的總長度爲:

$$l = \sum_{n=1}^{N} \frac{L + (n-1)\Delta L}{2n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{L}{2n}[1 + (n-1)\eta] \tag{3.6}$$

其中 $\eta = \frac{\Delta L}{L}$, $\eta > 0$ 代表書本長度由上而下呈遞增排列, $\eta < 0$ 則爲遞減排列; 當 $\eta < 0$ 時, 堆疊書本的總數量 N 不得超過 $[1/|\eta|] + 1$。(3.6) 式爲一調和級數與等差級數 (公差爲0) 的組合。

例四: 書本密度相等、長度呈線性變化

$$l_n = \frac{1}{n}\frac{[L + (n-1)\Delta L]^2}{[2L + (n-1)\Delta L]} = \frac{L}{n}\frac{[1 + (n-1)\eta]^2}{[2 + (n-1)\eta]} \tag{3.7}$$

N 本書突出桌緣的總長度爲:

$$l = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\frac{[L + (n-1)\Delta L]^2}{[2L + (n-1)\Delta L]} = \sum_{n=1}^{N} \frac{L}{n}\frac{[1 + (n-1)\eta]^2}{[2 + (n-1)\eta]} \tag{3.8}$$

其中 $\eta = \frac{\Delta L}{L}$, $\eta > 0$ 代表書本長度 (以及質量) 由上而下呈遞增排列, $\eta < 0$ 則爲遞減排列; 當 $\eta < 0$ 時, 堆疊書本的總數量 N 不得超過 $[1/|\eta|] + 1$。將 (3.8) 式的分子展開, 我們可看出 (3.8) 式主要是由調和級數與等差級數 (公差爲0) 所組成。

比較上面四個例子的結果, 各書本突出量 l_n 以及總突出量 l 的公式皆有下述之基本形式:

$$l_n = \frac{L}{n}A_n \tag{3.9}$$

$$l = \sum_{n=1}^{N} \frac{L}{n}A_n \tag{3.10}$$

其中, 堆疊因子 A_n 與堆疊書本的質量改變率 ε 與長度改變率 η 有關, 在不同的例子中有不同的形式:

$$\text{例一、} A_n \equiv A_n^{(1)} = \frac{1}{2} \tag{3.11}$$

$$\text{例二、} A_n \equiv A_n^{(2)} = \Big[\frac{1 + (n-1)\varepsilon}{2 + (n-1)\varepsilon}\Big] = 1 - \frac{1}{2 + (n-1)\varepsilon} \tag{3.12}$$

$$例三、A_n \equiv A_n^{(3)} = \frac{1}{2}[1+(n-1)\eta] \tag{3.13}$$

$$例四、A_n \equiv A_n^{(4)} = \frac{[1+(n-1)\eta]^2}{[2+(n-1)\eta]} \tag{3.14}$$

從上式中, 我們可觀察到 $A_n^{(3)} = [1+(n-1)\eta]A_n^{(1)}$, $A_n^{(4)} = [1+(n-1)\eta]A_n^{(2)}$。由於例三與例一相較只是書本長度變化的關係, 而例四與例二之間雖然是書本質量變化的關係, 但由於書本密度假設相同, 因此亦等同於長度變化的關係。所以 $A_n^{(3)}$、$A_n^{(1)}$ 之間與 $A_n^{(4)}$、$A_n^{(2)}$ 間有相同的關係式並不意外。同時, 我們可以很容易的證明對所有正整數 n, 下列不等式恆成立:

$$\begin{aligned}
&當\ \varepsilon \geq 0\ 時,\ A_n^{(2)} \geq A_n^{(1)};\\
&當\ \varepsilon < 0\ 且\ n < 1/|\varepsilon|+1\ 時,\ A_n^{(2)} \leq A_n^{(1)};\\
&當\ \eta \geq 0\ 時,\ A_n^{(4)} \geq A_n^{(3)},\ A_n^{(3)} \geq A_n^{(1)},\ A_n^{(4)} \geq A_n^{(2)};\\
&當\ \eta < 0\ 且\ n < 1/|\eta|+1\ 時,\ A_n^{(4)} \leq A_n^{(3)},\ A_n^{(3)} \leq A_n^{(1)},\ A_n^{(4)} \leq A_n^{(2)}。
\end{aligned} \tag{3.15}$$

給定書本總數 N 以及書本質量或長度改變率 ε、η 後, 上列諸多資訊可作爲比較不同參數情況下書本最大突出量之參考依據。

從上述堆疊數學式 (3.9) 至 (3.14) 以及不等式 (3.15), 我們可得出下列定理:

定理一: 設 $\varepsilon, \eta \geq 0$; 在上述四種情況中, 當堆疊無窮多本書時, 書本伸出桌緣的總突出量皆會趨近無窮大。

證明: 例一與例二 ($\varepsilon \geq 0$) 中的書本總突出量爲一調和級數, 已知調和級數是以對數函數 $\ln N$ 的方式發散 [6]。而由 (3.15) 中的不等式: 當 $\eta \geq 0$ 時, $A_n^{(3)} \geq A_n^{(1)}$、$A_n^{(4)} \geq A_n^{(2)}$; 再運用判斷級數收斂與否的「比較測試」(comparison test) 定理 [6]可得知例三與例四的式子亦爲發散級數。亦即, 書本伸出桌緣的總突出量會隨著堆疊書本的數目趨近無窮大。

定理二: 針對*同一批書*, 在書本等長、質量作線性改變的情形下, 質量順排 ($\varepsilon > 0$) 的堆疊方式書本總突出量會大於逆排 ($\varepsilon < 0$)。

證明: 由 (3.12) 式可得知在例二中, 當 $\varepsilon > 0$ 時 $A_n^{(2)}$ 之値會較 $\varepsilon < 0$ 時來得大, 亦即書本長度相同、質量爲等差時, 由上而下書本質量呈遞增堆疊會得到較大突出量。

定理三: 針對*同一批書*, 書本質量相等但長度作線性改變的情形下, 長度逆排 ($\eta < 0$) 的堆疊方式書本總突出量會大於順排 ($\eta > 0$)。

證明: 例三中的 (3.6) 式 $l = \sum_{n=1}^{N} \frac{L}{2n}[1+(n-1)\eta]$ 可以寫爲 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} L_n$ 的形式, 即 $\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}L_2 + \frac{1}{6}L_3 + \cdots + \frac{1}{2N}L_N$, 其中 $L_n = L + (n-1)\Delta L$ 代表由最上層數來第 n 本

書的長度。若 $\eta > 0$, 則 $L_1 < L_2 < L_3 < \cdots < L_N$, 由於 $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \cdots > \frac{1}{2N}$, 因此 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} L_n$ 爲一逆序和。但如果將同一批書倒過來疊置 ($\eta < 0$, 即最長的書置於最上層, 書長由上而下是遞減關係), 則 $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} L_{N-n+1}$ 爲一順序和。根據排序不等式定理 [7]: 順序和>亂序和>逆序和; 亦即對同一批書而言, 將其中最長的書本置於最上層並依遞減關係向下疊放會比順疊能得到更大的突出桌緣距離。

定理四: 針對<u>*同一批書*</u>, 書本密度相等但長度作線性改變(因此質量亦不等) 的情形下, 長度逆排 ($\eta < 0$) 的堆疊方式書本總突出量會大於順排 ($\eta > 0$)。

證明: 此定理爲例二與例三的綜合情形, 較爲複雜。我們用數學歸納法來證明。首先, 將例四中以順排方式 ($\eta > 0$) 堆疊 N 本書的總突出量 (3.8) 式改寫爲: $l_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \frac{[L+(n-1)\Delta L]^2}{[2L+(n-1)\Delta L]} = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \frac{L_n^2}{L_1+L_n}$; 如前, $L_n = L + (n-1)\Delta L$ 代表順排時由最上層數來第 n 本書的長度。因此, 對同一批書以逆排方式堆疊的總突出量 $\tilde{l}_N$ 則爲: $\tilde{l}_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \frac{L_{N-n+1}^2}{L_N+L_{N-n+1}}$。我們可以輕易的證明當 $N=2$ 時, $\tilde{l}_2 = l_2$; 當 $N=3$ 時, $\tilde{l}_3 - l_3 > 0$。假設 $N=K$ 時, $\tilde{l}_K - l_K > 0$ 成立, 以下證明當 $N=K+1$ 時, $\tilde{l}_{K+1} - l_{K+1} > 0$ 亦成立。由於

$$l_{K+1} = l_K + \frac{1}{K+1} \frac{L_{K+1}^2}{L_1 + L_{K+1}} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\tilde{l}_{K+1} = \tilde{l}_K &+ \Big(\frac{L_{K+1}^2}{L_{K+1}+L_{K+1}} - \frac{L_K^2}{L_K+L_K}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{L_K^2}{L_{K+1}+L_K} - \frac{L_{K-1}^2}{L_K+L_{K-1}}\Big) \\ &+ \frac{1}{3}\Big(\frac{L_{K-1}^2}{L_{K+1}+L_{K-1}} - \frac{L_{K-2}^2}{L_K+L_{K-2}}\Big) + \cdots + \frac{1}{K}\Big(\frac{L_2^2}{L_{K+1}+L_2} - \frac{L_1^2}{L_K+L_1}\Big) \\ &+ \frac{1}{K+1} \frac{L_1^2}{L_{K+1}+L_1}\end{aligned} \tag{3.17}$$

在 (3.17) 式中, 利用 $L_n = L + (n-1)\Delta L$ 的關係式將括號 $(\cdots)$ 內之項通分相減後, 可得到:

$$\Big(\frac{L_{K+1}^2}{L_{K+1}+L_{K+1}} - \frac{L_K^2}{L_K+L_K}\Big) > \frac{\Delta L}{2}, \qquad \Big(\frac{L_K^2}{L_{K+1}+L_K} - \frac{L_{K-1}^2}{L_K+L_{K-1}}\Big) > \frac{\Delta L}{3},$$
$$\Big(\frac{L_{K-1}^2}{L_{K+1}+L_{K-1}} - \frac{L_{K-2}^2}{L_K+L_{K-2}}\Big) > \frac{\Delta L}{4}, \ \ldots \ \Big(\frac{L_2^2}{L_{K+1}+L_2} - \frac{L_1^2}{L_K+L_1}\Big) > \frac{\Delta L}{K+1},$$

因此 (3.17) 式滿足不等式:

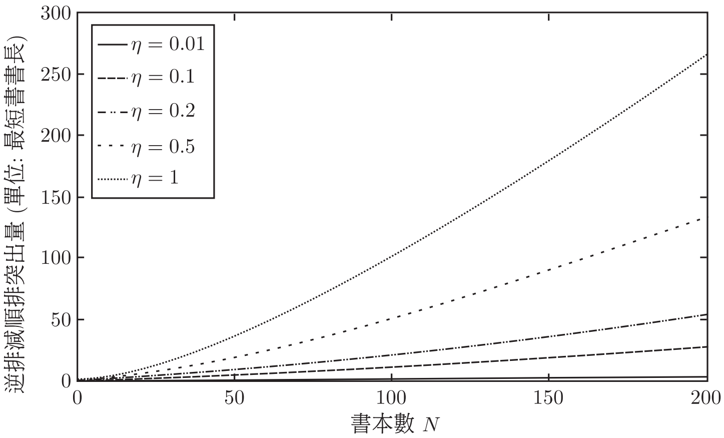
$$\tilde{l}_{K+1} = \tilde{l}_K + \frac{\Delta L}{2} + \Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big)\Delta L + \Big(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\Big)\Delta L + \cdots + \Big(\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{K+1}\Big)\Delta L + \frac{1}{K+1}\frac{L_1^2}{L_{K+1}+L_1}$$

所以,

$$\begin{aligned}
\tilde{l}_{K+1}-l_{K+1}>&\tilde{l}_K-l_K+\frac{\Delta L}{2}+\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big)\Delta L+\Big(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\Big)\Delta L+\cdots+\Big(\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{K+1}\Big)\Delta L\\
&+\frac{1}{K+1}\frac{L_1^2}{L_{K+1}+L_1}-\frac{1}{K+1}\frac{L_{K+1}^2}{L_1+L_{K+1}}\\
=&\tilde{l}_K-l_K+\frac{\Delta L}{2}+\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big)\Delta L+\Big(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\Big)\Delta L+\cdots\\
&+\Big(\frac{1}{K}\cdot\frac{1}{K+1}\Big)\Delta L-\frac{K}{K+1}\Delta L\\
=&\tilde{l}_K-l_K+\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\Big)\Delta L+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)\Delta L+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)\Delta L+\cdots\\
&+\Big(\frac{1}{K}-\frac{1}{K+1}\Big)\Delta L-\frac{K}{K+1}\Delta L\\
=&\tilde{l}_K-l_K+\Big(1-\frac{1}{K+1}\Big)\Delta L-\frac{K}{K+1}\Delta L\\
=&\tilde{l}_K-l_K\\
>&0
\end{aligned}$$

故得證。亦即, 當堆疊書本總數在兩本以上時, 將書長最長 (且最重) 的書本置於最上層並依遞減關係向下疊放, 可以得到比順疊更大的突出距離。

為了驗證定理四, 我們應用 Matlab 軟體 [8]撰寫了一個程式, 計算在不同書本堆疊總數 N 以及不同 η 值情形下逆排與順排書本突出量的差值, 其結果如圖十三所示。由圖中可清楚得知書本逆排 (即書本長度由上而下作遞減之堆疊) 比順排有較大的突出量, 且其差值會隨著書本總數 N 及 η 值的增加而加大。



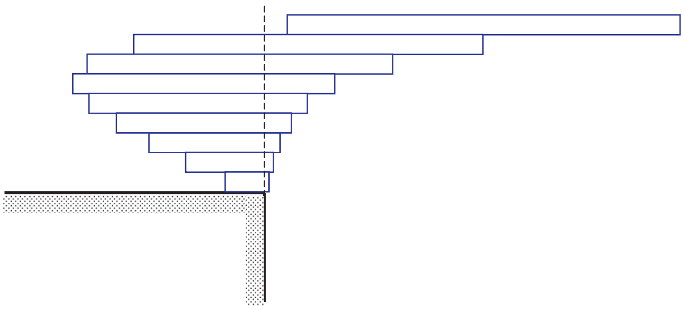
圖十三: 例四中書本長度逆排與順排突出量之差值與書本總數 N 及 η 之關係。

推導出書本堆疊數學公式及上述定理之後, 現在, 我們可以明確的回答之前所提出有關疊書的一些問題。例一的基本疊書形式告訴了我們當書本大小與質量相同時, 欲得到最大的突出桌緣距離, 書本從上而下應按 $\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{6}, \frac{L}{8}\cdots$ 的伸出量來排列堆疊, 其總突出量 $l=\frac{L}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 即會是最長。疊書問題最有趣的地方是在尚未決定該疊多少書本之前, 我們無從知道最底層的那本書 (即桌面上的那一本) 應突出桌邊多少距離, 該距離是由書本總數以及在其上方所有其他書本的堆疊形式所決定。這也是爲什麼我們必須選擇從最上層的那本書當作第一本書來處理的原因。此例當中的書本總突出量爲一調和級數。調和級數爲一發散的級數, 其值在 N 很大時是以對數函數 $\ln N$ 的形式增長 [6]。因此, 按此堆疊的書本絕對可以超出桌緣一本書以上的距離。理論上, 在理想狀況下書本可以無限堆疊, 且其延伸出桌邊緣的距離沒有極限; 亦即, 其突出量可達無窮大。只不過, 由於調和級數 (對數函數) 發散的速度非常緩慢, 需要堆疊非常多本書, 才能將突出量增加一點。此情形在書本數 n 越大時越是如此。表一中列出了突出桌緣距離 l 與堆疊書本總數 N 之間的幾個數值結果。例如, 欲突出桌緣一本書的距離, 需堆疊至少4本書; 欲突出桌緣兩本書的距離, 需堆疊至少31本書; 欲突出桌緣3本書的距離, 需堆疊至少227本書; 若欲突出桌緣10本書的距離, 則需堆疊至少約 272400600本書。這是一個相當大的數字。假設每本書的厚度爲1公分、長度爲30公分, 則欲突出桌緣10本書的距離 (即3公尺), 堆疊書本的高度須達 $1\times 272400600/100=2724006$ 公尺, 這個高度已大約是台北 101 大樓的 5360 倍高! 試想想若有一隻重量可忽略不計的甲蟲, 由最底層往上爬這些書本所堆疊而成的梯子, 當其累的半死爬了兩億七千多萬階時, 它才前進了不到3公尺的水平距離。

表一: 由公式計算所得出各例情況下書本突出量 l 與堆疊書本總數 N 的對照值。當 ε 或 η 小於0時堆疊書本總數會受到限制 (書本的質量或長度不可爲負值), 表中的 X 代表在書本總數受到限制情形下無法達到所要求之突出量。

l	N (例一)	N (例二)		N (例三)		N (例四)	
		$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=-0.01$	$\eta=0.01$	$\eta=-0.01$	$\eta=0.01$	$\eta=-0.01$
1	4	4	4	4	4	4	4
2	31	28	37	25	46	23	X
3	227	138	X	94	X	75	X
4	1674	495	X	213	X	153	X
5	12367	1497	X	360	X	242	X
6	91380	4234	X	524	X	335	X
7	675214	11679	X	695	X	431	X
8	4989191	31918	X	873	X	528	X
8	36865412	86934	X	1054	X	626	X
10	272400600	236483	X	1238	X	725	X

定理二證明了當書本大小相同、質量不等時, 應將書本自上而下以質量遞增的方式 ($\varepsilon > 0$) 堆疊, 也就是說將這些書本從上到下以輕到重的方式排列會得到最大的突出桌緣距離。此點也可以從日常經驗得到印證: 越重的書要越靠近桌面且越置於下方方才會得到越穩固的堆疊。定理三與定理四的結論乍看之下似與直覺想法不符, 我們可以下圖作一合理解釋。如圖十四所示, 當以長度遞減的方式堆疊時, 下層絕大部分之書本體積集中於靠近桌邊緣垂直線的左側, 因此上層長度較長的幾本書可盡量向右疊置以滿足力矩平衡。所以同一批書, 書本由上而下以長度遞減的疊法反而會較遞增的疊法突出桌邊的距離來得大。



圖十四: 書本長度由上而下遞減之堆疊示意圖。

表一中同時列出了例一至例四4種不同情況下, 利用公式 (3.1) 至 (3.8) 所計算書本延伸出桌緣的距離 l (以最上層的那本書爲單位長) 與所需堆疊書本數量 N 之間的幾組對應值。爲方便比較, 參數 ε 及 η 之值皆定爲 ± 0.01。以例一與例二 ($\varepsilon > 0$) 做比較, 由表中數據可得知書長皆相同時, 等重書本堆疊的突出量較書本由上自下以輕到重的形式堆疊的突出量來得小。此點亦可由 (3.15) 當中的不等式 $A_n^{(2)} \geq A_n^{(1)}$ 直接獲得。比較例三與例四 ($\eta > 0$) 亦有相同的結論。而在 $\varepsilon < 0$ 與 $\eta < 0$ 的情形, 在給定了 ε 與 η 的值之後, 由於書本總數受到 $N < 1/|\varepsilon| + 1$ 及 $N < 1/|\eta| + 1$ 的限制, 因此書本突出桌緣的延伸量亦受到限制。

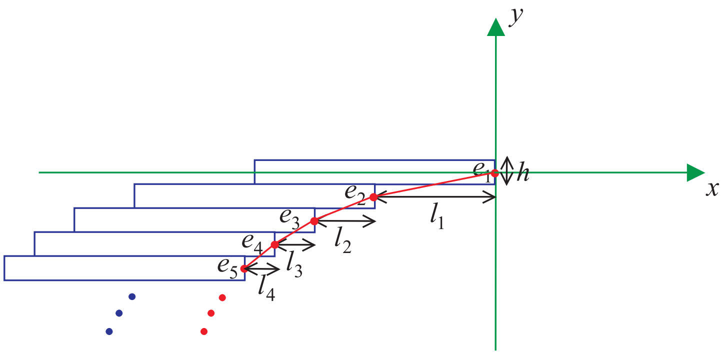
圖十五之 (1) 爲我們實際用12本大小質量皆相近的書來做堆疊的照片。根據公式計算, 最上面的書應突出桌緣約 1.55 倍自身的長度, 實際的情形亦相去不遠。圖十五之 (2) 爲 10 塊長度呈等差變化的木板, 公差爲5公分, 最小的一塊爲5公分長, 以逆排方式堆疊的實際情形。實驗的結果, 逆排較順排長約10公分, 與公式計算值10.4公分亦相當吻合。

最後, 我們觀察到各個書本的端點 e_n 似乎可連成一特定的軌跡形式 (圖十六), 雖然各個不同例子之間的軌跡會有所差異, 然而由於四個例子當中各書的端點突出量基本上爲一調和級數, 或是調和級數與等差級數 (公差爲0) 的組合形式, 因此我們推測當 N 很大或是書本厚度 h 很小時, 書本端點軌跡近似於一對數函數, 或者是對數函數與線性函數的組合。接下來, 我們應用微積分以及極限的概念將各個例子中描繪書本端點軌跡的數學函數求出。

(1) (2)

圖十五: 實際堆疊情形; (1) 書本大小質量約相等, (2) 木板長度自上而下呈遞減變化。

例一、書本等長、等質量



圖十六: 書端點所形成之軌跡圖。

如圖十六, 由於書本突出量的公式是由最上層的那本書開始計算, 因此將座標原點置於最上面書本的右端點 e_1 處較容易處理問題。如此一來, 函數將會位於座標平面的第三象限。參照圖十六, 位於相鄰兩書端點 e_n 與 e_{n+1} 之間中心處的斜率 dy/dx 可表爲:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{y=-(n-\frac{1}{2})h}=\frac{h}{l_n}=\frac{h}{L/2n}=\frac{2nh}{L}=\frac{2}{L}(n-\frac{1}{2})h+\frac{h}{L}$$

當書本厚度 h 很小時, $y=-(n-\frac{1}{2})h$ 可視爲一隨 n 變化的連續變數, 因此在極限的情形下, 上式可近似爲如下的微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{L}y+\frac{h}{L}=\frac{h-2y}{L}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{h-2y}=\frac{dx}{L}$$

將上式作積分可得:

$$\ln(h-2y)=\frac{-2x}{L}+C$$

代入邊界條件: 當 $x=0$ 時 $y=0$; 可推得積分常數 $C=\ln h$。原式則爲:

$$\ln(h-2y)=\frac{-2x}{L}+\ln h \quad\Rightarrow\quad \ln\Big(\frac{h-2y}{h}\Big)=\frac{-2x}{L} \quad\Rightarrow\quad \ln\Big(1-\frac{2y}{h}\Big)=\frac{-2x}{L}$$

若將 x 及 y 分別以書本長度 L 與厚度 h 作無因次化, 則得:

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln(h-2Y)=-X}, \quad \text{其中 } Y=\frac{y}{h},\ X=\frac{x}{L}。 \tag{3.18}$$

$-Y$ 之值即代表多少本書之厚度, $-X$ 之值則爲多少倍最上層那本書之長度。(3.18)式說明了書本突出量 $-X$ 爲書本堆疊厚度 $-Y$ (也就是書本堆疊數量) 的對數函數, 印證了我們先前的推測。

例二、書本等長、質量呈線性變化

求解方式同上,

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{y=-(n-\frac{1}{2})h}=\frac{h}{l_n}=\frac{nh}{L}\Big[\frac{2+(n-1)\varepsilon}{1+(n-1)\varepsilon}\Big]$$

如同前例, 利用 $y=-(n-\frac{1}{2})h$ 的關係可將上式中的 n 表達成 y 的函數:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{h}{2}-y}{L}\cdot\frac{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}{h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)} \Rightarrow \Big[\frac{1}{\frac{h}{2}-y}\cdot\frac{h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}\Big]dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \Big[\frac{1}{\frac{h}{2}-y}\cdot\frac{h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}\Big]dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{h}{2}-y}\cdot\Big[1-\frac{h}{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}\Big]dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\frac{h}{2}-y}-(\frac{1}{2-\varepsilon})\frac{dy}{\frac{h}{2}-y}+(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon})\frac{dy}{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow (\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon})\frac{dy}{\frac{h}{2}-y}+(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon})\frac{dy}{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}=\frac{dx}{L}$$

積分上式, 得:

$$(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon})\ln(\frac{h}{2}-y)+(\frac{1}{2-\varepsilon})\ln[2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)]=\frac{-x}{L}+C$$

代入邊界條件: 當 $x=0$, $y=0$; 可推得積分常數

$$C=(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon})\ln\frac{h}{2}+(\frac{1}{2-\varepsilon})\ln[2h-\frac{\varepsilon}{2}h], \quad \text{原式則爲:}$$

$$(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon})\ln(\frac{\frac{h}{2}-y}{\frac{h}{2}})+(\frac{1}{2-\varepsilon})\ln\left[\frac{2h-\varepsilon(\frac{h}{2}+y)}{2h-\frac{\varepsilon}{2}h}\right]=\frac{-x}{L},$$

$$\Rightarrow(\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon})\ln(1-\frac{2y}{h})+(\frac{1}{2-\varepsilon})\ln\left[1-\frac{2\varepsilon y}{(4-\varepsilon)h}\right]=\frac{-x}{L}$$

令 $Y=\frac{y}{h}$, $X=\frac{x}{L}$, 則上式可表爲:

$$\boxed{(\tfrac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon})\ln(1-2Y)+(\tfrac{1}{2-\varepsilon})\ln\left[1-\tfrac{2\varepsilon}{(4-\varepsilon)}Y\right]=-X} \qquad (3.19)$$

再次, 我們得到 $-X$ 爲 $-Y$ 的對數函數形式。

例三、書本質量相等、長度呈線性變化

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{y=-(n-\frac{1}{2})h}=\frac{h}{l_n}=\frac{2nh}{L[1+(n-1)\eta]}$$

利用 $y=-(n-\frac{1}{2})h$, 可將上式中的 n 表達成 y 的函數:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{h-2y}{L[1-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta]}\Rightarrow\frac{[1-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta]}{h-2y}dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{h-2y}+\left[\frac{\eta}{2h}-\frac{\eta}{h-2y}\right]dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow\frac{\eta}{2h}dy+\frac{1-\eta}{h-2y}dy=\frac{dx}{L}$$

積分上式可得:

$$-\frac{\eta}{2h}y+\frac{1}{2}(1-\eta)\ln(h-2y)=\frac{-x}{L}+C$$

代入邊界條件: 當 $x=0$, $y=0$; 可推得積分常數 $C=\frac{1}{2}(1-\eta)\ln h$, 原式則爲:

$$-\frac{\eta}{2h}y+\frac{1}{2}(1-\eta)\ln(\frac{h-2y}{h})=\frac{-x}{L}\Rightarrow-\frac{\eta}{h}y+(1-\eta)\ln(1-\frac{2y}{h})=\frac{-2x}{L}$$

令 $Y=\frac{y}{h}$, $X=\frac{x}{L}$, 則上式可表爲:

$$\boxed{-\frac{\eta}{2}Y+\frac{(1-\eta)}{2}\ln(1-2Y)=-X} \qquad (3.20)$$

上式中 $-X$ 爲 $-Y$ 的對數函數與線性函數的組合。

例四、書本密度相等、長度呈線性變化

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{y=-(n-\frac{1}{2})h}=\frac{h}{l_n}=\frac{h[2n+n(n-1)\eta]}{L[1+2(n-1)\eta+(n-1)^2\eta^2]}$$

利用 $y=-(n-\frac{1}{2})h$, 將上式中的 n 表達成 y 的函數:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{h[2(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})-(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta]}{L[1-2(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta+(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})^2\eta^2]}$$

$$\Rightarrow \frac{[1-2(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta+(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})^2\eta^2]}{h[2(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})-(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta]}dy=\frac{dx}{L}$$

逐步化簡,

$$\Rightarrow \frac{\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]^2+2(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta-3}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]}dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})}dy+\frac{2(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta-3}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]}dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{h}dy-\frac{\eta-2}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})}dy-\frac{2}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})}dy+\frac{1}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]}dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{h}dy-\frac{\eta}{h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})}dy-\frac{1}{(2-\eta)h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})}dy-\frac{\eta}{(2-\eta)h\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]}dy=\frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{h}dy+\frac{(1-\eta)^2}{(2-\eta)h(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})}dy-\frac{\eta}{(2-\eta)h\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]}dy=\frac{dx}{L}$$

積分上式, 得:

$$\frac{-\eta}{h}y+\frac{(1-\eta)^2}{(2-\eta)}\ln(\frac{1}{2}-\frac{y}{h})-\frac{1}{(2-\eta)}\ln\Big[2-(\frac{1}{2}+\frac{y}{h})\eta\Big]=\frac{-x}{L}+C$$

代入邊界條件: 當 $x=0$, $y=0$ 可推得積分常數;

$$C=\frac{(1-\eta)^2}{(2-\eta)}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{(2-\eta)}\ln(2-\frac{\eta}{2}),\ \text{因此原式可寫爲:}$$

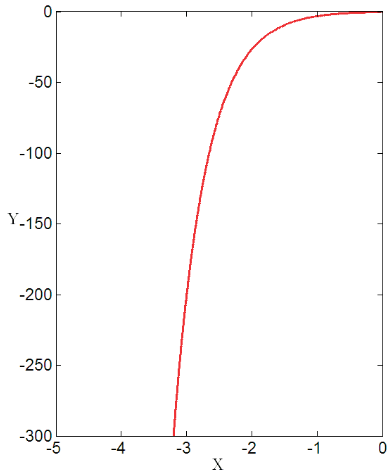
$$\frac{-\eta}{h}y+\frac{(1-\eta)^2}{(2-\eta)}\ln(1-\frac{2y}{h})-\frac{1}{(2-\eta)}\ln\Big[1-\frac{2\eta}{4-\eta}\frac{y}{h}\Big]=\frac{-x}{L}$$

令 $Y = \frac{y}{h}$, $X = \frac{x}{L}$, 則上式可表爲:

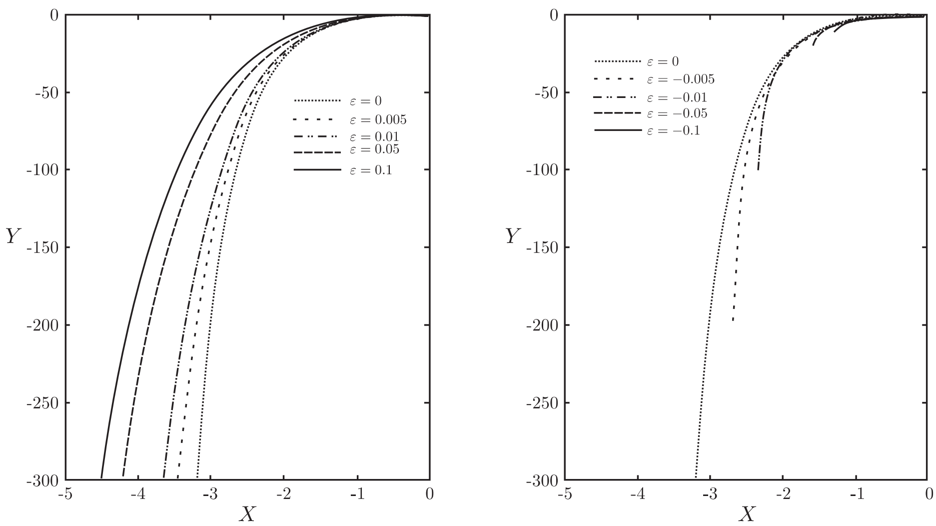
$$\boxed{-\eta Y + \frac{(1-\eta)^2}{(2-\eta)}\ln(1-2Y) - \frac{1}{(2-\eta)}\ln\left[1-\frac{2\eta}{4-\eta}Y\right] = -X} \tag{3.21}$$

上式中 $-X$ 爲 $-Y$ 的對數函數與線性函數的組合。

將函數 (3.18) 至 (3.21) 以 Matlab [8] 軟體作圖, 結果如圖十七至二十所示。



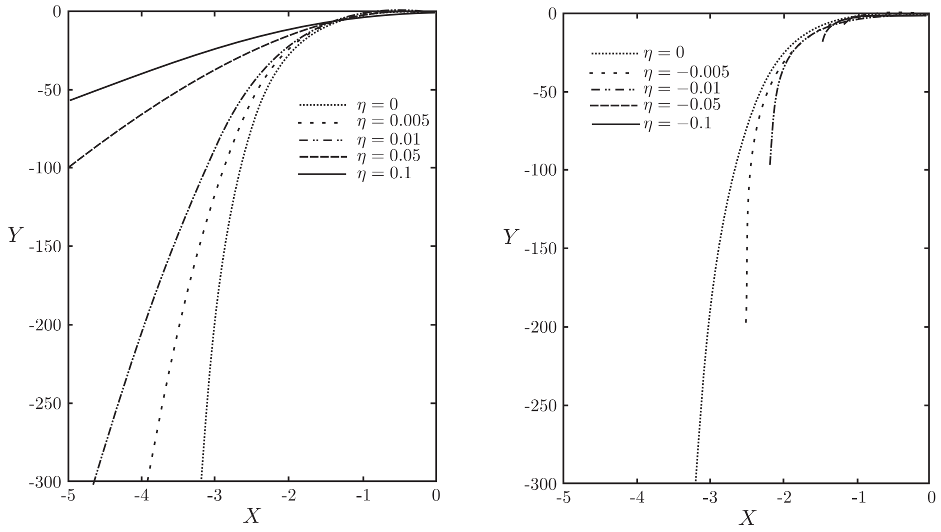
圖十七: 等長度及等質量書本堆疊之端點函數圖形。



(1)　(2)

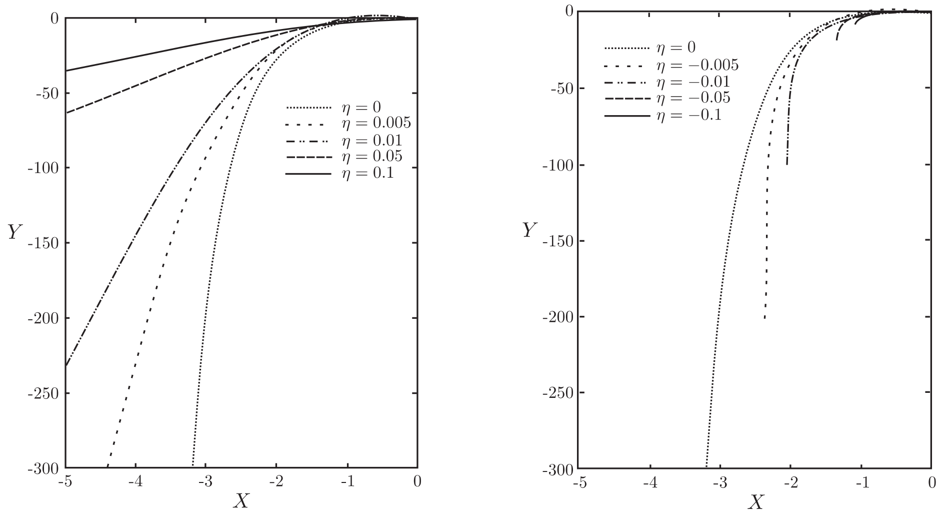
圖十八: 等長度, 質量不等書本堆疊之端點函數圖形。(1) $\varepsilon > 0$, (2) $\varepsilon < 0$。

由圖中可清楚的看出書本突出位移與書堆疊高度的函數關係, 以及在不同的 ε 或 η 值下, 書本



(1) (2)

圖十九: 等質量, 長度不等書本堆疊之端點函數圖形。(1) $\eta > 0$, (2) $\eta < 0$。



(1) (2)

圖二十: 等密度, 長度不等書本堆疊之端點函數圖形。(1) $\eta > 0$, (2) $\eta < 0$。

端點所形成曲線的比較。圖十七與十八爲例一與例二的情形, 如同預期, 書本突出量 $(-X)$ 隨著堆疊數量 $(-Y)$ 呈對數函數增加。圖十九與二十爲例三與例四的情形, 在此二例中書本端點軌跡爲對數函數與線性函數的組合, 由於線性函數的增長率遠大於對數函數, 因此圖中顯示出在 $\eta > 0$ 時, 書本突出量是隨著堆疊數量呈近乎線性的方式增加。當 ε 或 η 值爲負時, 堆疊書

本最大數量受到限制, 因此在這些情形下曲線無法向下無窮延伸。求解出函數方程式 (3.18) 至 (3.21) 的另一個好處在於只要將書本數 (即 $-Y$) 帶入方程式即可快速的得出大概之突出距離 (即 $-X$), 省去了計算級數和的麻煩。尤其在書本數相當大的情形時更爲方便。

四、結論

在本研究中, 我們應用物理學中的力矩平衡定律, 配合數學中級數的觀念, 詳盡的分析了四種不同參數組合情況下, 欲得到最大突出桌緣距離, 書本所應堆疊的方式, 並推導出各個情況下書本最大突出量之數學公式以及書本端點所形成軌跡的數學函數。研究結果顯示, 在給定書本總數 N 的情況下:

(一) 若書本大小與質量均等, 則書本應由上而下以一調和級數的差排方式堆疊, 此時書本端點所形成的軌跡爲一對數函數。

(二) 若書本長度相等但質量呈等差變化, 則書本應自上而下以質量遞增的方式堆疊, 而書本端點形成的軌跡亦爲一對數函數。

(三) 若書本質量相等但長度呈等差變化, 則書本應自上而下以長度遞減的方式堆疊, 此時書本端點形成的軌跡是由一對數函數與線性函數所組成。

(四) 若書本密度相同、寬度相同但長度呈等差變化, 則書本應自上而下以長度遞減的方式堆疊, 而書本端點形成的軌跡也是對數函數與線性函數的組合。

後二種情形乍看之下似與直覺想法不符, 然而藉由定理三與四的證明、數值計算 (圖十三) 以及實際去做堆疊實驗的結果 (圖十五之 (2)) 皆驗證了這個結論, 我們也以簡單的質量中心與力矩平衡的概念 (圖十四) 解釋了這個情形。研究結果亦指出除了在逆排堆疊情形下書本的數量受到限制, 其餘情況下書本端點的位移量皆是以對數函數或線性函數的形式隨著堆疊書本的數量增長至無窮大; 惟在例一與例二中, 其增長的速度非常緩慢, 如同攀登一個無窮多階且極其陡峭的天梯, 在爬過了似乎數不完的階層後, 水平位移只前進了一點點。

本文中所運用到的力矩平衡及質心觀念以及無窮級數的特性皆爲高中階段物理與數學所學到的內容。在實際生活應用上, 本研究的概念及分析法亦可融入於建築物 (譬如無須靠外力支撐即可自行矗立之拱門、拱橋) 及工藝品的設計中。藉由本研究, 我們獲致一個寶貴的經驗: 任何看似簡單的現象, 其背後皆有著合理以及嚴謹的物理解釋。若事實與直覺的想法不符, 應回到物理與數學做更進一步的剖析。

參考文獻

1. http://zhidao.baidu.com/question/7035164.html?fr=qrl3
2. http://mathworld.wolfram.com/BookStackingProblem.html
3. http://web01.shu.edu/projects/reals/numser/answers/lire_tower.html
4. Walker, J. 原著, 葉偉文譯,「物理馬戲團」, 天下文化, 2000年。
5. Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fundamentals of Physics*, 8th ed. John Wiley & Sons Inc., 2008.
6. Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R. *Thomas' Calculus*, 11th ed. Pearson, 2006.
7. http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%92%E5%BA%8F%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F
8. 洪維恩著,「Matlab 7程式設計」, 旗標出版股份有限公司, 2007年。

—本文作者現爲國立台灣師範大學附屬高級中學三年級學生—