數學傳播 34卷1期, pp. 81-88

線性代數理論的形成與發展

馮 進

摘要: 線性代數是數學的一個重要分支, 也是大學理工科各專業的一門重要基礎課。線性代數不僅在技術上發展了數學計算方法, 在語言上充分體現了數學符號的思維簡潔性, 並在導向抽象代數的結構理論中具有不可忽視的重要作用。我們試圖從學科發展的整體角度考察線性代數理論的形成與發展, 並指出其在導向抽象理論發展過程中的某些重要數學思想。

關鍵詞: 線性代數, 抽象代數, 結構理論, 計算技術, 數學思想。

線性代數是數學的一個重要分支, 也是大學理工科各學科的一門重要基礎課, 其計算技術與數學理論對自然科學和數學學科本身的發展都起著重要作用。瞭解線性代數理論形成與發展的歷史, 對理解和掌握線性代數的學科特徵與本質屬性, 以及探索近現代數學發展的歷史軌跡都具有重要意義。一般數學史研究都對作爲線性代數重要部分的行列式與矩陣的發展論述較爲詳細, 如文獻[1]~[6] 以及文獻[8][10] 等, 大多認爲它們在語言上、技術上爲數學提供的貢獻大於它們在思想上爲數學作出的啓示, 但它們並沒有深刻地影響數學的進程, 如文獻[8]。事實上, 這種看法並不是十分完善的, 線性代數不僅在技術上發展了數學計算方法, 在語言上充分體現了數學符號的思維簡潔性, 從而更深刻地揭示了物件的本質屬性, 並在導向抽象代數的結構理論中具有不可忽視的重要作用。本文試圖從線性代數作爲一門學科整體發展的角度, 考察其理論的形成與發展, 並指出它在導向抽象理論發展中的某些數學思想。

線性方程組與一元方程一樣有著悠久的歷史, 古代埃及紙草書和巴比倫泥板都記載了方程及方程組的內容, 並清楚地表明古代這些地區的數學家已經知道一元二次方程的求解; 巴比倫泥板上也有二元方程組的例子, 如泥板 AO8862[7] 上是可化爲一元二次方程的方程組, 泥板 VAT8389[8] 上的一題爲二元一次線性方程組; 此外, 大約成書於西元前一世紀的中國數學名著《九章算術》, 其中第八章—— “方程” 章, 專門討論線性方程組的求解, 這也是古代比較集中討論線性方程組的著作。這些都表明, 古代人已經具有 “線性關係” 的初步概念。

按中國古代文字的理解, "方程" 應指把算籌列成方陣進行計算的意思, 這裏的算籌是中國古代的一種計算工具, 《九章算術》 中的線性方程組就是通過排成方陣的算籌的一系列有序的移動 (即運算) 來求解的, 類似於我們今天寫出線性方程組的係數矩陣並進行矩陣的初等變換 (elementary transformation of matrix) 的求解方法, 從這個意義上說, 方程和矩陣的概念起源於中國古代的方陣算籌。

線性方程組的理論研究遲至 18 世紀才眞正開始, 並逐步形成行列式、矩陣、線性空間、線性變換等具體分支, 其中矩陣作爲一個通用的數學工具, 自身就發展成一門龐大的分支學科。經過幾個世紀的發展, 線性方程組不僅從計算的角度獲得了較爲完滿的結果, 並在理論上有了深入的發展, 逐步演變成一個初步公理化的結構體系, 19 世紀末皮亞諾 (G. Peano, 1858∼1932, 義大利) 給出了空間的公理化定義, 由此發展成一門較爲成熟的學科 —— 線性代數。同時, 在認識抽象物件、抽象數學概念、發展結構理論、表示抽象結構等方面, 在 19世紀以來抽象代數結構理論的發展中發揮了積極作用。

一、作為計算的線性方程組的解法

與一元方程一樣, 線性方程組的研究, 一開始就是解法的研究。《九章算術》 中給出了三元一次線性方程組籌算求解方法, 它相當於現在的高斯 (C. F. Gauss, 1777∼1855, 德國) 消去法 (Gaussian elimination), 高斯大約在 1800 年提出了這個方法, 並將它用於解決天體計算和後來的地球表面測量計算, 高斯消去法當時一直被認爲是測地學發展的一部分, 而不是數學。高斯消去法最初被若當 (W. Jordan, 1842∼1899, 德國測量學家) 改進了演算法的穩定性後, 發表在他撰寫的測地學手册中, 許多人把 "高斯-若當" 消去法中的若當誤認爲是著名的法國代數學家 C. 若當 (C. Jordan, 1838∼1922) 或物理學家 P. 若當 (P. Jordan, 1902∼1980, 德國量子物理學家)。這個消去法的重要意義在於, 它不僅可以作爲線性方程組的普通求解方法, 還可用簡短的迭代來表達整個求解過程, 是現代計算方法中一個基本的演算法, 完全可用於電腦自動處理。高斯消去法用矩陣方式表示相當於對矩陣作初等變換, 將它化爲階梯形矩陣或行最簡形的過程, 這是應用矩陣語言對線性方程組解法的進一步簡化。

線性方程組公式解法儘管不像三次方程求根公式那樣轟轟烈烈、舉世聞名, 但它的探索也對數學理論發展起了極大推動作用。二元線性方程組求解公式最初出現在義大利數學家、醫學家卡丹 (G. Cardano, 1501∼1576) 1545 年的著作 《大術》 中, 他用稱爲 "規則之母" 的方法求解了兩個來自貿易問題的線性方程組[9], 用現代符號表示即給出了二元一次線性方程組解

的一般公式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}(b_1/a_{12}) - b_2}{a_{22}(a_{11}/a_{12}) - a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}(b_2/a_{21}) - b_{21}}{a_{22}(a_{11}/a_{21}) - a_{12}} \end{cases}.$$

一般地, 方程個數與未知量個數相同的線性方程組 (係數行列式不爲零時) 的解經過萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646～1716, 德國)、馬克勞林 (C. Maclaurin, 1698～1746, 英國) 的發展, 由克萊姆 (G. Cramer, 1704～1752, 瑞士) 歸納成 “克萊姆法則” 而聞名於世。1750 年, 他在《線性代數分析導言》中給出瞭解線性方程組著名的 “克萊姆法則”, 用今天的矩陣符號表示即: 若設 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 則

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \ \ldots, \quad x_n = \frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 爲方程組係數組成的 n 階可逆矩陣, $\boldsymbol{A}_i$ 分別爲方程組的常數列 $\boldsymbol{b}$ 替換 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列後的矩陣。克萊姆不僅給出了上述公式, 並指出了行列式 $|\boldsymbol{A}|$、$|\boldsymbol{A}_i|$ 計算中項的符號的確定辦法, 以及怎麼由分母上的行列式得到分子上行列式的規律。這個規則克萊姆自己沒有給出證明, 1815 年柯西 (A. L. Cauchy, 1789～1857, 法國) 第一次給出了它的證明。

給出方程組解的公式僅是方程求解的一個部分, 方程組的理論就是要弄清楚, 方程組爲何會有解、什麼時候有解、解是怎麼構成的等等問題, 這些理論在 19 世紀中葉前後還都是以行列式的形式來研究與描述的, 直到發現矩陣可以作爲一個獨立的學科發展而有了現代的矩陣語言敍述。因此, 行列式理論本身就促進了線性方程組理論的深入發展。史密斯 (H. J. S. Smith, 1826～1883, 英國)、道奇森 (L. C. Dodgson, 1832 1898, 英國)、弗羅貝尼烏斯 (F. G. Frobenius, 1849～1917, 德國) 等推動了線性方程組解的結構理論的發展。

歐拉 (L. Euler, 1707～1783, 瑞士) 早先發現過一個方程組的解不唯一的例子, 但他沒有意識到這是由於係數矩陣行列式的值爲零引起的, 對此感到困惑; 弗羅貝尼烏斯也曾嘗試過研究方程組解集的特徵, 但未能如願。史密斯研究了相當於現在的導出組 (derived system of linear equations) 的齊次線性方程組, 給出 “獨立方程 (independent equation)” 以及相當於自由未知數的概念, 史密斯還引入了增廣矩陣和非增廣矩陣的術語, 指出了非齊次線性方程組解的結構, 即: 若非齊次線性方程組爲 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{b} \neq 0$, 則方程組的全部解爲 $X^* + X$, 這裏 X^* 爲非齊次方程組的一個特解, X 爲對應的導出組的全部解。道奇森在 1867 年《行列式的初等理論》中, 用較爲複雜、囉嗦的語言描述了非齊次線性方程組有解的判別定理, 他對方程組是否一定有解使用的是 “相容”, 這與矛盾方程相對應。弗羅貝尼烏斯 1879 年在他們基礎上, 徹底理解了 “獨立方程”和 “相容性” 概念, 將 “獨立” 概念定義爲 n 元陣列的 “線性無關

性”, 並給出了 “秩” 的概念, “相容性” 即爲 “有解” 的意思, 並用行列式的語言對它們作了描述。用矩陣語言簡潔的敍述, 道奇森的結論即爲: 線性方程組有解的充要條件是其係數矩陣與增廣矩陣秩相等。

至此, 線性方程組的數値解法與解的結構理論獲得了令人滿意的結果。

二、作為輔助計算的行列式與矩陣

行列式和矩陣理論是隨著實際需要和對線性方程組求解認識的不斷深入而發展起來的。研究的不斷深入, 方程組的形式也漸漸複雜起來, 反映獨立條件的變數個數與約束條件的方程個數不斷增加, 爲了適應計算要求, 需要有簡潔的語言和合理的規則來方便計算, 行列式和矩陣正是適應這樣一種需要, 它們被認爲是現代數學高度有用的工具和抽象物件的具體表現物。從邏輯結構上考察, 矩陣概念應先於行列式, 但歷史發展表明順序恰好相反, 數學史上這樣的例子不是個別的, 如數系基礎的建立, 最早認識的自然數其基礎是最晚建立, 文藝復興時期發展的射影幾何被發現邏輯上應早於古希臘的歐氏幾何等等。

行列式的研究起源於對方程組解法及結論的簡潔表示。二元一次方程組的解的公式最初由義大利數學家卡丹給出, 但他沒有對一般解的形式給出規律性和結構性的分析, 因此也就未能產生進一步推廣的思想。到 17 世紀後半葉, 萊布尼茲用規則的符號, 例如用 10、11、. . . , 20、21、. . . , . . . 、ij、. . . 等等, 表示我們現在常用的方程的系數 a_{10}、a_{11}、. . . , a_{20}、. . . , . . . 、a_{ij}、. . . 等, 並給出了我們現在的行列式形式的線性方程組解, 但他的研究到 1850 年才發表, 沒有對行列式的發展產生多大影響。行列式的計算後來由馬克勞林、克萊姆、貝佐特 (É. Bézout, 1730∼1783, 法國) 分別給出, 尤其以克萊姆給出的最爲明確、清晰、完整。

將行列式作爲一個相對獨立的課題來研究始於范德蒙 (A. T. Vandermonde, 1735∼1796, 法國) , 他將行列式從線性方程組的求解中分離出來, 研究了行列式的數値運算式本身的有關問題, 如行列式的計算規則、變換性質、降階法則等等, 導致行列式理論的建立, 給出了像我們現在熟知的 “范德蒙行列式” 的計算方法等。拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736∼1813, 法國) 曾給出三階行列式的乘法定理, 但未能將它一般化。范德蒙除了在線性方程組的研究中有很大影響外, 在一元代數方程的求解研究中也有極大影響, 他 1771 年的論文《論代數方程的解》中的思想最終導致了群論的研究, 與拉格朗日一起被譽爲是群論研究的先驅者。

范德蒙、拉格朗日以後, 拉普拉斯 (S. Laplace, 1749∼1827, 法國)、歐拉、柯西、西爾維斯特 (J. J. Sylvester, 1814∼1897, 英國)、凱萊 (A. Cayley, 1821∼1895, 英國)、雅可比 (Jacobi, 1804∼1851, 德國) 及他的學生卡塔蘭 (C. Catalan, 1814∼1894, 比利時) 等在行列式的理論發展與應用中都有重要貢獻, 拉普拉斯將范德蒙行列式降階的思想一般化爲現在高等代數中我們熟知的拉普拉斯展開定理, 柯西正式使用 “行列式” 的名稱, 並將萊布尼茲的係數

的符號系統改爲現在通用的雙重足標的符號 a_{ij}, 凱萊引進了現在通用的行列式符號 (在矩陣兩邊加上兩豎線), 西爾維斯特在研究二次曲線、曲面分類時引入了 λ-矩陣、初等因數等概念, 雅可比等數學家還給出了行列式在其他數學分支中的應用, 比如特徵多項式及其計算、二次型化簡、二次曲線和曲面的分類、變換中的雅可比行列式等, 雅可比 1841 年的著名論文《論行列式的形成和性質》標誌著行列式系統理論的建立。

行列式研究實際上與矩陣概念發展是密不可分的, 邏輯上應該是先有矩陣再定義行列式, 但歷史發展卻是在行列式理論發展到一定程度後, 才引起矩陣理論的眞正發展, 矩陣的很多性質以及它的應用在行列式研究中已經被討論過, 例如, 行列式行與列的變換的很多性質與矩陣的行、列變換性質基本一致, 太多的使用矩陣概念促使數學家考慮必須把它們作爲一個實體引入數學大家庭。矩陣和行列式兩個分支的共同發展, 又反過來促進了它們自身內容的進一步深入, 矩陣理論與 19 世紀抽象代數思想的發展是不可割裂的, 它促使矩陣作爲一個重要的數學結構來研究, 從而發展出龐大的矩陣論這一數學分支。

矩陣作爲數的方陣列的概念, 在中國《九章算術》中已有體現[11], "矩陣" 作爲一個數學名詞則首先由西爾維斯特創造, 以區別於行列式概念。由於行列式在范德蒙的貢獻下作爲一個獨立的課題來研究, 使得它不需要直接考慮行列式的值是多少, 因此引起對其中數字陣列的特別關注。凱萊在矩陣論的發展中作出了重大貢獻, 1855 年他引入了西爾維斯特創造的 "矩陣" 概念, 1858 年發表了關於這個課題的第一篇重要文章《矩陣論的研究報告》, 系統地闡述了關於矩陣的理論。他在文中定義了矩陣的相等、矩陣的運算法則、矩陣的轉置、零矩陣、單位矩陣以及矩陣的逆等一系列基本概念, 指出了矩陣加法的可交換性與可結合性; 另外, 凱萊在這篇文章中還給出了方陣的特徵方程 (characteristic equation) 和特徵根 (characteristic root) (特徵值, characteristic value) 及有關矩陣的一些基本結果, 以及著名的凱萊-哈密爾頓定理, 即: 若 $d(\lambda)$ 是 n 階矩陣 A 的特徵多項式 (characteristic polynomial), 則有 $d(A)=0$。

矩陣理論是一個十分龐大的數學分支, 我們只能粗略地介紹由線性方程組求解引起的矩陣理論發展初期的主要思想與內容。矩陣理論的發展大致有以下幾個方面。首先, 將已有的矩陣概念及內容形式化, 包括矩陣的定義、符號、基本運算的規定等, 建立矩陣理論的一些基本概念與框架; 其次, 將重新建立的矩陣概念應用於行列式研究和線性方程組求解, 及其他的數學分支學科, 使之成爲數學研究的一種基本工具; 再次, 考慮矩陣理論本身的一些基本問題, 如矩陣對角化 (diagonalization of matrix) 問題, 包括特徵值、特徵向量 (eigenvector)、矩陣相似、標準型、對角化、正交性等, 將矩陣的化簡與二次型、線性變換化簡問題建立聯繫, 並與線性空間進行溝通, 但矩陣與向量空間線性變換之間的關係, 直到 20 世紀中葉才眞正認識淸楚[12]。矩陣乘法運算與矩陣對角化問題源于高斯型的合成的研究, 是矩陣論中極其深刻的一部分內容; 第四, 將矩陣作爲一般的代數物件來對待, 可以研究數域 (number field) 上、一般域 (general domain) 上、環上的矩陣, 以及無窮階的行列式與矩陣等等, 矩陣的元素可以從普通的數一直到一般的環與域的元素。

在發展一般矩陣論的工作中作出貢獻的還有很多著名數學家, 大學代數課程中的很多地方都留有他們的英名。1855 年, 法國數學家埃爾米特 (C. Hermite, 1822∼1901) 證明了矩陣特徵根的許多性質, 如我們稱爲埃米特矩陣的特徵根性質等, 克萊伯希 (A. Clebsch, 1833∼1872, 德國)、布赫海姆 (A. Buchheim, 1859∼1888) 等證明了實的斜對稱、對稱矩陣的特徵根性質, 泰伯 (H. Taber) 引入矩陣的跡的概念, 並斷言任一方陣主對角線上元素的和等於全部特徵根之和, 並且是特徵方程一次項係數的相反數, 但他沒有給出證明, 梅茨勒 (W. H. Metzler, 1863∼1943) 於 1891 年給出了這個結論的證明。弗羅貝尼烏斯在矩陣發展中的貢獻是不可磨滅的, 他提出了最小多項式問題, 引進了矩陣的秩 (它當時是對行列式而言的)、正交矩陣 (orthogonal matrices)、相似矩陣 (similar matrices)、相合矩陣 (congruent matrices) 等概念, 將西爾維斯特和魏爾斯特拉斯的不變因數 (invariant factor) 和初等因數 (elementary divisor) 引入到矩陣中, 整理了不變因數和初等因數的理論, 並討論了正交矩陣與相合矩陣的一些重要性質。1870 年 C. 若當 (C. Jordan, 1838∼1922) 研究了矩陣化爲標準型的問題, 1892 年梅茨勒引進了矩陣的超越函數概念, 並將其寫成矩陣的冪級數的形式, 傅立葉等還討論了無限階矩陣問題, 無限階矩陣研究的動力主要來自於積分方程的理論[13]。

因此, 矩陣概念經過最初作爲一種工具而發展兩個多世紀後, 現已成爲一門獨立的數學分支學科——矩陣論, 矩陣論可分爲矩陣方程論、矩陣分解論和廣義逆矩陣論等矩陣的現代理論, 矩陣及其理論現已廣泛應用於數學及現代科技的各個領域。

三、作為導向結構理論的線性代數

19 世紀是線性方程組解法與理論興旺發展的時期, 與此相關的行列式與矩陣理論受到極大關注, 一個有力的證據就是, 關於這兩個課題有成千篇的文章。儘管行列式與矩陣沒有在本質上爲數學提供新的思想, 從而改變數學發展的方向與進程。但是, 新型的計算方法與簡潔的表達形式, 使這兩個內容具有相當的生命力。作爲工具與語言, 行列式與矩陣爲越來越複雜、越來越抽象的數學物件, 提供了具體而簡潔的表達形式和直觀易理解的模型解釋, 直到現在都被認爲是 “高度有用的工具”。

19 世紀也是數學界開創又一個新紀元的時期, 這一時期與以往任何一個時期數學方面的變革都不相同, 其特徵就是在思維的許多方面突破了古老習慣的約束和直觀形象的解釋。非歐幾何的創立突破了原有的現實空間模式, 開拓了更爲廣闊的思維空間, 群論、四元數的建立提升了人類的抽象思維能力, 讓數學家族增添了大量新的成員, 整個 19 世紀的數學思維都受到這種突破的影響, 群概念建立後的大半個世紀都在探索、認識其抽象性程度, 到 19 世紀末抽象群概

念正式建立, 已經認識了大量具體的、抽象的代數結構, 並且也爲如何探索這種抽象結構確立了初步的方法與思想, 實際上這種思想與方法的獲得, 也受到 19 世紀後半葉公理化趨勢的影響。線性代數正是在這多種數學思想的交叉影響之下得以逐步的發展, 並反過來對新數學思想的發展產生反作用, 至 20 世紀初成爲一門基本而又比較完善的數學學科, 從而作爲大學理工科各專業的一門基礎課程。

線性代數結構理論的認識, 首先是將方程組的係數、未知量組、解等概念從線性方程組中分離出來, 用矩陣或向量的觀點來認識, 並進一步用集合及代數結構的觀點來處理。格拉斯曼的工作從幾何角度出發, 將空間概念擴充爲 n 維空間, 空間的元素稱爲向量, 類似于普通空間中的向量, 並建立元素間的基本運算關係, 這些思想被數學家認爲具有永恆的價值, 事實證明確是如此。這種觀念可以使線性方程組的解與其係數列之間, 在運算概念之下建立起聯繫, 從而將解與係數列向量看成是一空間中向量之間的一種關係; 其次是范德蒙、凱萊等數學家將係數陣列從方程組中剝離出來發展了行列式、矩陣理論, 並使衆多數學家通過大量研究揭示出矩陣、行列式的本質屬性; 第三, 弗羅貝尼烏斯等在其他數學家研究的基礎上, 用 “線性相關性”、“秩” 等概念具體描述了向量、矩陣的本質屬性。從而可知, 線性方程組的解, 不過是一組已知向量間的組合係數罷了, 或更進一步地, 它們表達了線性空間子空間間的某種關係, 從而也認清了線性方程組的本質特徵; 最後, 在 19 世紀末由皮亞諾建立了公理化的空間定義, 基本完成線性代數的公理化結構建構。

現在大學中理工科的基礎數學課程——線性代數, 就是綜合了代數、n 維幾何、向量數學等學科中的有關基本內容, 包括行列式、矩陣、向量空間、線性變換、歐氏空間以及多項式的有關內容; 如果改變係數範圍, 變爲環上的向量空間, 則可引向抽象的模論, 它是數域上線性空間的進一步推廣; 如果進一步取一般的環 (ring) 和域 (field) 作爲係數集, 就成爲抽象線性代數了; 在 n 維超複數基礎上還發展了一般的線性結合代數, 可以用任意的域來替換其中的實或複係數域, 也可用環來替代域, 並且還研究了係數是任意域 (any field) 或有限域 (finite field) 的方程理論等等。

作爲輔助計算的行列式和矩陣最終發展成了代數學的獨立分支, 並成爲衆多數學、物理及其他許多理工科學科的基本工具; 線性方程組的求解問題演變成爲研究線性關係的線性代數, 以及其他的代數分支學科, 並在許多數學分支中得到應用, 線性關係是數學中最簡單、最基本的一種關係, 幾乎體現在數學的所有分支中。由此, 我們可以說線性方程組的研究是富有成果的, 借用希爾伯特的話說, 它是一隻 “會下金蛋的雞”。線性代數不僅在理論上得到了充分的發展, 並且還成爲解決實際問題的有力工具, 它是現代電腦與數學學科間的一個良好結合點。

至此, 我們可以進一步理解我國代數學前輩段學複先生關於線性代數在引向抽象代數學建立中巨大推動作用的評述[14]。

參考文獻

1. L. Novy, Origins of Modern Algebra, *The Netherlands*, pp.165-173, 1973.
2. Thomas Muir, The Theory of Determinants in the Historical Order of Development. Vol. l, London: Macmillan, pp.63-67, pp.92-131, 1906.
3. T. Hawkins, Cauchy and the Spectral Theory of Matrices, *Historia Mathematics*, Vol. 2, pp.1-29, 1975.
4. T. Hawkins, Another Look at Cayley and the Theory of Matrices, *Archives Internationales d' Histoire des Sciences*, Vol. 26, pp.82-112, 1977.
5. T. Hawkins, Weierstrass and the Theory of Matrices, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 17, pp.119-163, 1977.
6. R. W. Feldmann, History of Elementary Matrices, *Mathematics Teacher*, Vol. 55, 1962, Vol. 56, 1963.
7. 梁宗巨, 世界數學通史 (上), 遼寧教育出版社, 2001. 192 (AO 是古代東方文物的縮寫, 8862是編號, 此泥板現藏于巴黎羅浮宮博物館)。
8. J. Katz, 數學史通論 (第 2版), 李文林等譯, 高等教育出版社, 2004, 13。
9. 楊浩菊, 行列式理論歷史發展, 西北大學博士論文, 2004, 5。
10. M. 克萊因, 古今數學思想 (第三册), 冷生明等譯, 上海科學技術出版社, 1980, 197。
11. J. Katz, 數學史通論 (第 2版), 李文林等譯, 高等教育出版社, 2004, 534。
12. J. Katz, 數學史通論 (第 2版), 李文林等譯, 高等教育出版社, 2004, 541。
13. M. 克萊因, 古今數學思想 (第三册), 冷生明等譯, 上海科學技術出版社, 1980, 212-216。
14. 段學複, 代數學, 引自張繼平主編《新世紀代數學》, 北京大學出版社, 2002, 10。

—本文作者任教江蘇常熟理工學院數學與統計學院—