數學傳播 34卷1期, pp. 74-80

# 不僅僅是遊戲
## —— 非記憶通訊系統的信息傳播

柳柏濂

## 一、改革「擊鼓傳花」遊戲

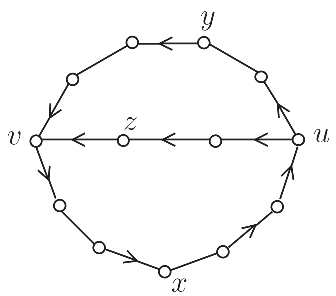
進過學堂的人都玩過擊鼓傳花的遊戲: 一群人圍坐成一個大圈, 隨著鼓聲響起, 一朵大紅花沿著反時針方向 (或順時針方向) 從一個人的手中, 傳到另一個人的手中。當鼓聲嘎然停止時, 花留在誰的手上, 誰就該表演一個節目, 至於是唱歌, 還是跳舞, 就請自便。

節目表演完後, 鼓聲繼續響起, 大紅花繼續前進, 從一個人的手中又傳到另一個人的手中, 如此繼續, 花仍是一朵, 但個人表演的節目可以無數, 足足可湊成一個晚會。

當今時代, 言必稱改革。讓我們也來改革一下「擊鼓傳花」。

讓這群人圍坐成兩個相連的圈 (圖 1) , 隨著鼓聲響起, 一朵大紅花仍沿著反時針方向從一個人的手中傳到另一個人的手中。

當傳到分岔點 (如圖 1中的 $u$ 點) 往下傳時, 把一朵大紅花拆開成兩朵, 分別傳給兩個圈中的下一個人。若紅花在傳遞時, 恰好在某一個點匯合 (如圖1中的 $v$ 點) , 則把兩朵花合成一朵。按此規則往下傳遞, $\cdots\cdots$, 當鼓聲嘎然而止, 手上拿著花的人 (可能是一位, 也可能是多位) 就該表演節目了。




$D_1$

圖1

改革後的擊鼓傳花的一大優點是, 隨著鼓聲不斷響起, 傳遞的花越來越多。不僅場面壯觀, 而且表演也可由獨唱變成小組唱, 由獨舞變成集體舞。如果我們有意識地調整兩個圈的人數, 如圖 1中圈 $xuyv$, 和圈 $xuzv$ 的人數分別說爲 $a$ 和 $b$ 。若 $a$, $b$ 互素, 簡記爲 $(a,b)=1$, 則當鼓聲響下去, 必然有一個時刻, 每一個人手中都拿著紅花。當鼓聲停止時, 全體參加都要合演一個節目, 想想看, 這是多麼完美的謝幕。

## 二、原來是一個通訊系統

我們手上的雜誌是《數學傳播》而不是《紅花傳播》, 因此, 我們還應該走回正道, 從遊戲到數學。

我們有「閒心」去想到改革「擊鼓傳花」的遊戲, 完全是因爲一個稱爲非記憶通訊系統 (memoryless communication system) 的數學模型。一個通訊系統的模型就是一個網絡, 或帶 $n$ 個頂點的有向圖 $D$ (見文獻 [1])。假設在時間 $t=0$ 時, $D$ 中的 $k$ 個頂點 $(1 \leq k \leq n)$ 掌握著各自不同的信息。當 $t=1$ (即傳遞 1次) 時, 每個頂點把掌握的信息傳遞給相鄰的頂點, 而自己卻失掉 (忘記了) 這個信息。當然, 它可以同時接收來自鄰點的信息。這個系統用此方法運作, 稱爲非記憶通訊系統 ($MCS$)。

回過頭來, 看看我們改革了的擊鼓傳花, 把圖 1看成一個網絡。它就是一個 $k=1$ 的 $MCS$。

正如不是圖 1的任何一種排圈方法都可以保證將來每人手中都有一朵花, (讀者可以嘗試, 當 $a=10$, $b=6$ 時, 是不可能演全體大合唱的), 不是任何 $MCS$ 網絡都可以使初始的 $k$ 個信息傳遍每個頂點的。但是, 當 $D$ 是本原有向圖時 (見文獻 [1]) 可以保證至某一個時刻, $D$ 的每個頂點都可掌握原來的 $k$ 個信息。

如文 [1] 所述, 本原有向圖就是一個強連通圖 (任兩點都有路到達) , 且不同的圈長的最大公約數爲 1的圖。

在圖 1中, 我們令 $(a,b)=1$, 就是保證 $MCS$ 的本原性。

一個自然的問題接踵而來: 對於某個 $MCS$ 的本原有向圖 $D$, 使每個頂點掌握原來的 $k$ 個信息, 最短的時間是多少?

我們考慮簡單的 $k=1$ 的情況, 也就是:

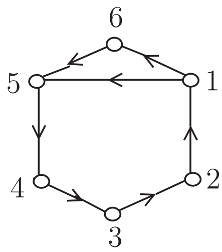
在改革的擊鼓傳花遊戲中, 圖 1的 $D$ 中, 當第一聲鼓響起後, 至少經過多少步傳遞, 每個人手中都有一朵紅花?

我們知道一個網絡可以與一個 $(0,1)$ 矩陣一一對應 (見文獻 [1]) , 讓我們用矩陣刻劃上述問題的數學本質。

不失一般性, 把圖 1的 $D_1$ 簡化爲圖 2的一個 6階有向圖 $D_2$。

$D_2$ 的鄰接矩陣爲

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$




$D_2$

圖2

在布爾運算下, 設 $A^k=(a_{ij}^{(k)})$, 則 $a_{ij}^{(k)}=1$ 當且僅當從 $i$ 到 $j$ 有長為 $k$ 的途徑 (walk), 於是上述問題便是求使 $A^k$ 有一列全 1的最小的 $k$。(這裏, 我們定義矩陣的橫行為列)

試運算

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\ A^{20}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&1\\1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{21}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\&\cdots&\cdots&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\quad A^{22}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\&\cdots&\cdots&\end{pmatrix}\quad A^{23},\quad A^{24},$$

$$A^{25}=\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\\&\cdots&\cdots&\\1&\cdots&\cdots&1\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}\quad A^{26}=J$$

從運算結果, 我們知道, $A^{21}$ 第一次出現了一個全 1列 (第 1列)。而到 $A^{26}$ 每個列都是全 1列。其實際意義是: 當第一次聲鼓響起後, 至少經過 21次傳遞, 有可能 6個人都手上拿著花, 但是, 要出現這種結果, 初始拿花的應是第 1位置的人。而若把初始拿花者放在第 6位置。即便經過 25次傳遞, 也不會出現人人手上均有花的場面。但是, 不論初始拿花位置如何, 傳遞 26次或以後, 鼓聲一停, 一定保證全體都要起立唱歌或跳舞。

用數學的語言表述, 圖 2中的 $MCS$ 網絡 $D_2$, 要使一個初始信息傳遍各點, 至少要傳遞 21次。而要使兩個不同的初始信息傳遍各點, 至少要傳遞 22次, $\ldots\ldots$, 使 5個不同的初始信息傳遍各點, 至少要 25次。

## 三、矩陣的「點指數」

用網絡的鄰接矩陣的冪運算, 確實能直接算出結果。然而, 我們更需要用數學方法知道一個本原 $MCS$ 網絡傳遍 $k$ 個信息的最小步數。如果用 $t$ 表示步數 (或稱時間) 的話, 即求 $t$ 的最小值。

從矩陣的冪運算又回到有向圖模型。我們先討論 $k=1$。

要知道, 矩陣 $A^t$ 中有一列, 不妨第 $i$ 列, 是全 1列, 就意味著在有向圖 $D$ 中頂點 $i$ 到每個頂點, 都有長為 $t$ 的途徑。求 $t$ 的最小值, 即求第一次出現全 1列的 $A^t$。

考慮一個有 $n$ 個頂點 $1,2,\ldots,n$ 的本原有向圖 $D$。爲了使敍述更數字化, 我們定義 $\exp_D(i,j)$ 爲這樣最小的整數 $p$, 使對於每一個整數 $t \geq p$, 從點 $i$ 到 $j$ 都有長爲 $t$ 的途徑 $(1 \leq i,j \leq n)$。因爲 $D$ 是本原的, 因此 $\exp_D(i,j)$ 是有限的。我們定義頂點 $i$ 的「點指數」爲

$$\exp(i) := \max\{\exp_D(i,j)\}, \quad i=1,\ldots,n$$

於是, $\exp(i)$ 是這樣的最小整數 $t$, 使得從 $i$ 到每一點 $j$ 都有長不小於 $t$ 的途徑。

爲方便處理, 我們可以選擇 $D$ 中頂點的次序滿足

$$\exp_D(1) \leq \exp_D(2) \leq \cdots \leq \exp_D(n)$$

即 $\exp_D(1)$ 爲在 $D$ 中一個信息傳遍各個頂點所需的最小時間 (步數) $t$。換言之, $\exp_D(k)$ $(1 \leq k \leq n)$ 是使 $A^t$ 有 $k$ 個全 1列的最小的 $t$, 也即在 $D$ 中, $k$ 個不同的初始信息能傳遍各頂點的最小時間 $t$。易見, 這個最小時間與初始信息所在的位置是有關的。但 $\exp_D(n)$ 是本原 $MCS$ 網絡 $D$ 的 $n$ 個不同的初始信息傳遍各點的最小時間。因而也是任意 $k$ 個不同的信息 (與初始位置無關) 傳遍各點所需的最小時間。

現在我們看一個特殊的 $n$ 階有向圖 $D_3$ (圖3)。

這是圖 2中的 $D_2$ 的一般化, 即僅含長爲 $n-1$ 和 $n$ 的兩個圈的圖。我們考察 $k=1$ 的情形。

直接驗證可知, 若初始信息放在頂點 1, 則經過至少 $(n-2)(n-1)+1$ 步。此點的信息可傳遍各個頂點。而若初始信息放在第 $m$ 點 $(2 \leq m \leq n)$, 要使各點都掌握此信息, 至少要 $(n-2)(n-1)+m$ 步。

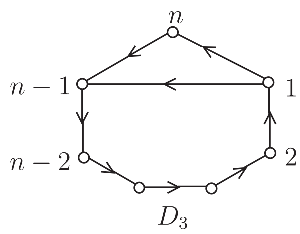



圖3

因此, $\exp_{D_3}(1) = (n-1)(n-2)+1 = n^2-3n+3$ 。

從這個特殊的圖 $D_3$ 中, 也可以看出

$$\exp_{D_3}(k) = (n-1)(n-2)+k = n^2-3n+k+2, \quad (1 \leq k \leq n)。$$

## 四、任意的本原 $MCS$ 網絡

我們不限於討論特殊的兩圈網絡。用組合矩陣論的方法, 可以解決一般本原 $MCS$ 網路的點指數問題。設 $n$ 階本原有向 $D$。

我們定義 $\exp(n,k) := \max\limits_{D}\{\exp_D(k)\}$, $k=1,\ldots,n$ 。此處, 求最大值 max 取遍所有的 $n$ 階本原圖 $D$。

我們將用 $D$ 的最短圈的長給出 $\exp_D(k)$ 的上確界, 從而導出 $\exp(n,k)$ 的值。

我們稱長爲 1的圈爲環。先看 $\exp_D(1)$ 的一個上界。

**引理**1: 設 $D$ 是具有頂點集 $1,2,\ldots,n$ 的本原圖, $D$ 中 $r$ 個頂點有環 $(r\geq 1)$, 則

$$\exp_D(1)\leq n-1$$

**證**: 取 $D$ 中的一個環點, 則此環點到 $D$ 的每個頂點必有長爲 $n-1$ 的途徑。

**引理**2: 設 $s$ 是 $n$ 階本原有向圖 $D$ 的最短圈長, 則

$$\exp_D(1)\leq s(n-1)$$

**證**: 設 $A$ 是 $D$ 的鄰接矩陣, 則 $A^s$ 的對角線有 $s$ 個 1 。

$D$ 是強連通圖, $A^s$ 所對應的有向圖 $D^{(s)}$ 也是強連通圖。在 $D^{(s)}$ 中, 點 $i$ 到 $j$ 有弧當且僅當在 $D$ 中, 從點 $i$ 到 $j$ 有長爲 $s$ 的途徑。因此 $D$ 中的長爲 $s$ 的圈對應於 $D^{(s)}$ 有 $s$ 個環。

由引理 1, $\exp_{D^{(s)}}(1)\leq(n-1)$, 即 $\exp_D(1)\leq s(n-1)$ 。

**引理**3: 若圖 $D$ 含有子圖 $D'$, 則 $\exp_D(1)\leq\exp_{D'}(1)$ 。

**證**: $D'$ 的弧集也是 $D$ 的弧集的子集, 由點指數定義, 引理 3得證。

另一方面, 從強連通圖的性質, 我們容易得到

**引理**4: 對 $n$ 階本原有向圖 $D$

$$\exp_D(k)\leq\exp_D(k-1)+1,\quad 2\leq k\leq n \text{ 。}$$

**證**: 因 $D$ 是強連通圖, 故必存在一個頂點 $j$ 與具有第 $k-1$ 個點指數的頂點相連, 便得引理 3結論。

現在我們可以得出 $\exp_D(n,k)$ 。

**定理**: 若 $k$ 是正整數, $1\leq k\leq n$, 則

$$\exp_D(n,k)=n^2-3n+k+2$$

**證**: 由引理 4, 有

$$\exp_D(k)\leq\exp_D(1)+(k-1) \tag{1}$$

設 $s$ 是 $D$ 的最短圈長。若 $s\leq n-2$, 則由引理 2

$$\exp_D(1)\leq(n-2)(n-1)\leq n^2-3n+2 \tag{2}$$

若 $s = n-1$, 因 $D$ 是本原圖, 故 $D$ 必有另一個長爲 $n$ 的圈。

即 $D$ 必含有圖 3的 $D_3$ 作爲子圖。由引理 3及上節關於 $D_3$ 的討論

$$\exp_D(1) \le \exp_{D_3}(1) = n^2 - 3n + 3\ 。 \tag{3}$$

比較式 (2) 和 (3) 便得

$$\exp_D(1) \le n^2 - 3n + 3$$

於是由 (1)

$$\exp_D(k) \le (n^2 - 3n + 3) + (k-1) = n^2 - 3n + k + 2\ 。 \tag{4}$$

但由第三節對 $D_3$ 的討論知

$$\exp_{D_3}(k) = n^2 - 3n + k + 2$$

故 (4) 的界是 $\exp_D(k)$ 的上確界, 即 $\exp_D(n,k) = n^2 - 3n + k + 2$ 。

## 五、故事還可以繼續 ⋯⋯

上節的定理告訴我們: 對於任一個本原的 $n$ 階 $MCS$ 網絡, 可以選擇初始的 $k$ 個位置發出 $k$ 個不同信息, 從而使 $n$ 個頂點在最短的時間 (步數) 都同時接受到這些信息。這個最短時間最多不超過 $n^2 - 3n + k + 2$ 步。而當此 $MCS$ 網絡形如圖 3的 $D_3$ 時 (恰具有兩個長分別是 $n-1$ 和 $n$ 的有向圈), 就需要耗費恰好 $n^2 - 3n + k + 2$ 步。

從定理的證明, 我們不難看到, 這時, 初始信息所在的初始位置就是圖 $D_3$ 的

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ k \text{ 點}$$

用定理的公式, 無須像第二節那樣借助於矩陣的冪運算, 我們可以直接得到圖 2中 $D_2'$ 的 $\exp_{D_2'}(1) = 6^2 - 3\times 6 + 1 + 2 = 21$, 而 $\exp_{D'}(6) = 6^2 - 3\times 6 + 6 + 2 = 26$ 。

當然, 對於圖 1中的 13階 $D_1$, 我們知道一個信息傳遍網絡所需時間的上界

$$\exp_{D_1}(1) \le 13^2 - 3\times 13 + 1 + 2 = 133\ 。$$

然而, 善於動腦筋的讀者還會有所作爲, 故事還可以繼續。

一個進一步的問題會提出來: 如果 $k$ 個初始的信息是相同的, 那麼要傳遍 $n$ 個頂點, 所需的最小時間又是多少呢?

容易理解, 與此相聯繫的一個矩陣問題是: 給出一個 $n$ 階 $MCS$ 網絡的鄰接矩陣, 求出一個最小的 $t$, 使 $A^t$ 出現有 $k$ 列, 它們所成的子矩陣沒有全零行。

這個問題同樣可以用有向圖的模型解決, 不過與上述方法稍有不同而已。有興趣的讀者可參考文獻 [2] 。

「擊鼓傳花」是一個遊戲, 但不僅僅是一個遊戲。它與非記憶信息傳遞系統有著本質的聯繫。透過這個窗口, 我們可以看到《組合矩陣論》解決實踐問題的奧妙。

## 參考文獻


1. 柳柏濂, 尋尋冪冪⋯⋯——非負矩陣冪序列初探, 數學傳播, 32卷 3期, p.55。
2. 柳柏濂, 組合矩陣論, 科學出版社, 2005年第二版。


—本文作者任教中國廣州華南師範大學數學科學學院—