數學傳播 34卷1期, pp. 65-73

明安圖和他的冪級數展開式

羅見今

內容提要: 簡要介紹清代蒙古族科學家明安圖在天文、地理測繪和數學方面的貢獻。重新表述明安圖在他的遺著《割圜密率捷法》中的三角函數冪級數公式, 特別是係數中含卡塔蘭數 (Catalan numbers) 的無窮級數展開式, 指出在世界數學史上明安圖是卡塔蘭數的首創者; 以一無窮級數 y_{10} 自乘爲例, 說明他在中國數學史上奠定了無窮級數運算的基礎。明氏的成就引起諸多國內外史學家和數學家的興趣, 例如當代電腦科學先驅者、斯坦福大學的克努特 (D. E. Knuth) 教授的專著中、英國德爾比大學拉坎布 (P. J. Larcombe) 博士的多篇論文中均有論述。國際天文學聯合會2002年5月26日宣佈將新發現的28242號小行星命名爲 "明安圖星", 政府也將他家鄉的城鎮命名爲 "明安圖鎮"。

關鍵詞: 中國數學史, 無窮冪級數, 卡塔蘭數, 明安圖星。

1、明安圖的生活與工作

明安圖塑像

明安圖 (1692?−1763?), 蒙古族, "明安圖, 字靜庵, 蒙古正白旗人。"[1] 他是中國著名的天文學家、數學家、測繪學家。

根據康熙帝 1670年的旨意: "天文關係重大, 必選擇得人, 令其專心學習, 方能通曉精徹", 禮部規定於官學生內 "每旗選十名, 交欽天監分科學習, 有精通者, 俟滿漢博士缺補用[2]。" 1710年前明安圖被選入欽天監, 開始學習自然科學。

康熙帝喜歡學習自然科學和數學, 他親自教導學生, 是明安圖的數學教師。明安圖學習努力, 受到皇帝喜愛。

[1] 見明安圖, 清史稿 46冊 506卷, 中華書局, 1977, 13961-13964。

[2] 見東華錄·康熙十。

1.1. 明安圖是中國當時一流天文學家

1713年明安圖完成學業, 就職於欽天監, 後來他成爲當時國內一流天文學家。他共參加了三項重要天文書的編寫工作:

1、《律曆淵源》100卷 (1713−1723)

2、《曆象考成後編》10卷 (1737−1742)

3、《儀象考成》32卷 (1744−1752)

在 18世紀中期他成爲天文學的領導人, 任欽天監監正 (皇家天文臺臺長)。他所接受的天文學思想屬於第谷 (Tycho Brahe, 1546−1601) 體系。現今保存在呼和浩特市五塔寺的石刻蒙古文天文圖是那個時代的成果, 可能出自明安圖之手。

1.2. 明安圖完成了中國大地測量

1708−1716年清政府組織過一次中國國土測量, 未完成。1755−1756年明安圖到新疆省參加測量經緯度的工作。1759年作爲領導人率隊再赴新疆和塔什干等地測量經緯度。根據幾次測量的結果繪成中國全圖, 它成爲後來中國大地圖的基礎。

1.3. 明安圖對數學的貢獻

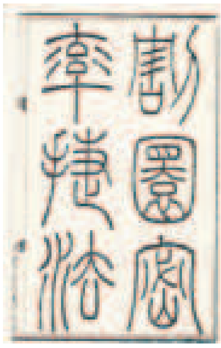
中國傳統數學到明代日漸式微, 大量古算書失傳。與此同時, 西方文藝復興, 出現了許多著名數學家, 中西數學間的差距越來越大。雍正之後形成了閉關自守的環境, 明安圖在不能得到新的外部資訊的條件下付出巨大努力, 推進中國傳統數學前進。

明安圖在 1730−1763年著書《割圓密率捷法》[3], 但生前未能完稿, 臨終時囑咐他的兒子明新和學生陳繼新寫成此書。1774年完稿, 抄本曾經在數學家中流傳開, 幾經周折, 直到 1839年才正式出版。在清代他的數學工作產生了一百多年的影響, 形成了 “明安圖學派”。其主要數學貢獻是:

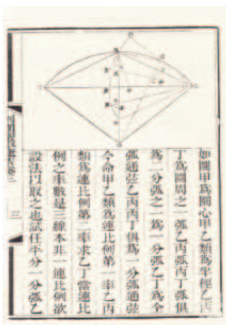
1、他是中國數學史上的第一人, 計算並獲得了若干無窮級數。

2、他是世界數學史上的第一人, 首先提出並應用了卡塔蘭數。

3、他奠定了互反函數的理論和演算法, 並給出四組互反公式。



《割圓密率捷法》扉頁



《割圓密率捷法》3卷 3頁

[3] 明安圖, 割圓密率捷法, 道光己亥 (1839) 孟秋, 石樑岑氏校刊本。

4、提出 “形數相生” 的理論, “堪與笛卡兒軔解析幾何媲美”(李儼)

5、提出曲線和直線在無窮分割時可達到同一的極限理論。

6、在中國首次將三角函數的無窮級數公式應用於天文計算。

本文以下討論上面第一 、二項成就。

2、明安圖的冪級數展開式

18世紀早期法國耶穌會傳教士杜德美 (P. Jartoux, 1668−1720) 到中國, 帶來三個級數展開式[4]:

格列高裏 (J. Gregory) 1667年正弦、正矢展開式:

$$r\sin\frac{a}{r} = a - \frac{a^3}{3!r^2} + \frac{a^5}{5!r^4} - \frac{a^7}{7!r^6} + \cdots\cdots \tag{1}$$

$$rVers\frac{a}{r} = \frac{a^2}{2!r} - \frac{a^4}{4!r^3} + \frac{a^6}{6!r^5} - \cdots\cdots \tag{2}$$

牛頓 (I. Newton) 1676年 π 的展開式:

$$\pi = 3\Big(1 + \frac{1^2}{4\cdot 3!} + \frac{1^2\cdot 3^2}{4^2\cdot 5!} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4^3\cdot 7!} + \cdots\cdots\Big) \tag{3}$$

使用這三式計算的結果很精確, 中國傳統數學裏沒有這樣的公式, 但杜德美並未將三式的證明帶到中國, 這引起了青年明安圖的懷疑, 認爲西方人有 “金針不度之疑” 。他決心做出這三個公式的證明, 並獲得了若干三角函數其他的無窮級數展開式。

2.1. 明安圖獲得的 6個無窮級數展開式

令半徑爲 r, 弧爲 a, 圓心角爲 $\alpha = a/r$, $2a$ 的弦爲 c, $2a$ 和 c 的中矢爲 b, 明安圖獲得[5] (現代形式):

$$c = 2r\sin\alpha = 2a - \frac{(2a)^3}{4\cdot 3!r^2} + \frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!r^4} - \frac{(2a)^7}{4^3\cdot 7!r^6} + \cdots\cdots \tag{4}$$

或 $$c = 2r\sin\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2a)^{2n+1}}{4^n(2n+1)!r^{2n}}$$

$$b = rVers\alpha = \frac{(2a)^2}{4\cdot 2!r} - \frac{(2a)^4}{4^2\cdot 4!r^3} + \frac{(2a)^6}{4^3\cdot 6!r^5} - \frac{(2a)^8}{4^4\cdot 8!r^7} + \cdots\cdots \tag{5}$$

[4] 錢寶琮主編, 中國數學史, 科學出版社, 1964, 301。

[5] 羅見今, 明安圖公式辨正, 內蒙古師大學報 (自然科學版), 1988, 第 1期, 42-48。

或　$$b=rVers\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2a)^{2n}}{4^n(2n)!r^{2n-1}}$$

$$2a=c+\frac{1^2\cdot c^3}{4\cdot 3!r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot c^5}{4^2\cdot 5!r^4}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot c^7}{4^3\cdot 7!r^6}+\cdots\cdots \tag{6}$$

或　$$2a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2c^{2n+1}}{4^n(2n+1)!r^{2n-1}}$$

$$a=r\sin\alpha+\frac{1^2(r\sin\alpha)^3}{3!r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2(r\sin\alpha)^5}{5!r^4}+\cdots\cdots \tag{7}$$

或　$$a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n-1)!!]^2(r\sin\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!r^{2n}}$$

$$a^2=2r^2Vers\alpha+\frac{2\cdot 1^2(2rVers\alpha)^2}{4!}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2^2(2rVers\alpha)^3}{6!r}+\cdots\cdots \tag{8}$$

或　$$a^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(2rVers\alpha)^{n+1}}{(2n+2)!r^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(2b)^{n+1}}{(2n+2)!r^{n-1}}$$

$$(2a)^2=(8b)r+\frac{2\cdot 1^2(8b)^2}{4\cdot 4!}+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2^2(8b)^3}{4^2\cdot 6!r}+\cdots\cdots \tag{9}$$

或　$$(2a)^2=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(8rVers\alpha)^{n+1}}{4^n(2n+2)!r^{n-1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(8b)^{n+1}}{4^n(2n+2)!r^{n-1}}$$

上述 9個公式在中國數學史裏很有名, 在歷史上曾被不恰當地稱做 “杜氏九術”; 當代不少數學史書中譯成現代形式的九術也出現了較多錯誤[6], 這裏的寫法是正確的。

2.2. 無窮冪級數展開式中的卡塔蘭數

明安圖還獲得另外的重要的幾個無窮級數展開式[6]:

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^{2n} \tag{10}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\sin\alpha)^{2n+1}/4^{n-1} \tag{11}$$

$$\sin 4\alpha=4\sin\alpha-10(\sin\alpha)^3+\sum_{n=1}^{\infty}(16C_n-2C_{n+1})(\sin\alpha)^{2n+3}/4^n \tag{12}$$

[6] 明安圖原著, 羅見今譯注, 割圓密率捷法譯注, 內蒙古教育出版社, 1998。

他還得到 $\sin 10\alpha$, $\sin 100\alpha$, $\sin 1000\alpha$, $\sin 10000\alpha$ 的無窮級數。英國數學家 P. J. Larcombe 博士 2000年將其推廣到 $\sin 2k\alpha$ 的情況[7]。

在式中 C_n 是卡塔蘭數 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ... 。卡塔蘭數在今天離散數學 (組合數學、圖論和數論) 中是一種著名的計數函數, 得到了廣泛的應用。現在我們知道, 卡塔蘭數有 6～7個定義公式, 具有 50種組合背景的含義, 現代已發表了至少 600種論文或著作, 與著名的 F_n 斐波那契數 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... 堪相媲美。

卡塔蘭 (E. Catalan, 1814−1894, 比利時) 1838年發表的一篇論文[8] 中講到這種計數函數, 後來該數就以他的名字命名。後來發現大數學家歐拉 (L. Euler, 1707−1783) 在 1758年曾經研究過它[9]。

卡塔蘭數的公式是

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad (n \geq 0)$$

卡塔蘭數的卷積遞迴公式是

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 1, \quad C_n = \sum_{k-1}^{n-1} C_{n-k}C_k \qquad (n \geq 2)$$

牛頓二項式定理當指數爲 1/2 時可得

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_n z^n}{2^{2n-1}} \qquad (|z| < 1)$$

1839年畢奈特 (J. Binet) 給出了卡塔蘭數的生成函數[10]

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4z} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n \qquad (|z| < 1/4)$$

一些文獻[11]介紹了它的發展史[12]。 但在這些文獻中, 西方學者不瞭解明安圖領先世界的工作。1730年代明安圖已遇到並應用了 C_n 數, 在他的著作《割圓密率捷法》卷三用三種方法都

[7] Larcombe P. J., On Catalan numbers and Expanding the Sine Function, *Mathematics Today*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Application(ICA), Vol. 28(2000), 39-47.

[8] Catalan E., Note sur une equation aux differences, *J. Math. Pures Appl.* 1838, 3(1), 508-516.

[9] Euler L., Novi Commentarii Acade Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 7(1758-59), 13-14.

[10] Binet J., Reflexi ons sur le probleme de determiner le nomblre de manieres dontune figure rectiligne peut etre partagee en triangles au moyen de ses diagonals, *J. Math. Pures Appl.* 1839, 4, 79-91.

[11] Brown W. G., Historical note on a recurrent combinatorial problem, *Ame. Math. Month.* 72(1965), 973-977.

[12] Alter R., Some remarks and results on Catalan numbers, *Proc. 2nd Louisiana conf. on combinatorics, garph theory and computing* (1971), 109-132.

獲得了卡塔蘭數列, 其中有兩種公式是 “新的” , 亦即現代數學界未知的, 1988年由筆者按照明安圖原著的演算法表示爲現代數學形式[13]:

公式 A: 卡塔蘭數的遞推公式

$$C_1=1,\quad C_2=1,\quad C_{n+1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{n-k}{k+1}C_{n-k} \tag{13}$$

公式 B: 卡塔蘭數的有限多項式生成函數

$$\begin{aligned}
M_1 &= (1),\quad M_2=(0,1),\\
M_3 &= (2M_1+M_2)M_2=[2(1)+(0,1)](0,1)\\
&= [(2)+(0,1)](0,1)=(2,1)(0,1)=(0,0,2,1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_{n+1} &= \left(2\sum_{k=1}^{n-1}M_k+M_n\right)M_n\\
MC_n &= \sum_{k=1}^{n}M_k=(1,1,2,5,14,42,132,429,\ldots,C_n)
\end{aligned} \tag{14}$$

這是一種表述方式複雜而特異的新函數, 1999年拉坎布給出它的一個證明[14]。

我們認爲, 明安圖獲得的無窮級數中, 其係數包含有卡塔蘭數的那些結果是重要的, 以前的研究沒有涉及, 因此這裏提出, 帶有卡塔蘭數的無窮級數應當引起更多的注意。

2.3. 明安圖使用的計算無窮級數的方法

中國傳統數學中沒有無窮級數, 明安圖必須建立一套計算無窮級數的新方法。這種工作具有原創的特點[15]:

1、他建立了無窮級數的定義和符號系統。

2、他創立了無窮級數的加法、減法、乘法的新演算法。

3、他實際進行了運算並獲得若干無窮級數的正確結果。

本文以無窮級數 y_{10} 爲例, 介紹他的無窮級數自乘的方法, 並根據他的《割圓密率捷法》第 3卷第 34−35頁的內容, 將明安圖的演算法翻譯成現代數學語言。

[13] 羅見今, 明安圖是卡塔蘭數的首創者, 內蒙古大學學報, 19卷 2期, 1988, 239-245。

[14] Larcombe P. J., On a Finite Polynomial Generating Function for Catalan Subsequences: An 18th Century Observation Proved, *Congresses Numerantium* (Winnipeg Canada), 141(1999), 49-60.

[15] 羅見今, 明安圖計算無窮級數的方法分析, 自然科學史研究, 9卷 3期, 1990, 197-207。

令

$$x = 2\sin\alpha \quad (0 < \alpha < \pi/4), \qquad y_m^n = (2\sin m\alpha)^n \quad (m \geq 1)$$

明安圖得到

$$\begin{aligned} y_{10} = 5y_2 - 5y_2^3 + y_2^5 &= 10x - 165x^3/4 - 3003x^5/4^3 - 21450x^7/4^5 \\ &-60775x^9/4^7 - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(16^4C_n - 8\cdot 16^3C_{n+1} + 21\cdot 16^2C_{n+2} \\ &-20\cdot 16C_{n+3} + 5C_{n+4}\Big)x^{2n+9}/4^{2n+7} \end{aligned}$$

這裏 C_n 是卡塔蘭數。當 $n = 1, 2, 3$, 括弧內的係數是 41990, 22610, 29716。現在我們將此無窮級數寫成如下的形式:

$$y_{10} = a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}/4^{2n-1} \tag{15}$$

明安圖必須計算 y_{10} 的自乘積, 即 $y_{10}\cdot y_{10}$。他的方法像這樣:

$$\begin{aligned} y_{10}^2 &= \left(a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}/4^{2n-1}\right)^2 \\ &= (a_0x)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_0a_n x^{2n+2}/4^{2n-1} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}/4^{2n-1}\right)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

關鍵是計算式 (16) 中末項, 他發明的方法是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}/4^{2n-1}\right)^2 = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} 4a_{n-k}a_k\right)x^{2n+2}/4^{2n-1} \tag{17}$$

他最終得到:

$$y_{10}^2 = b_0x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n+2}/4^{2n-1} \tag{18}$$

這裏

$$b_0 = a_0^2, \quad b_1 = 2a_0a_1; \quad \text{when} \quad n \geq 2 : b_n = 2a_0a_n + \sum_{k=1}^{n-1} 4a_{n-k}a_k$$

就這樣, 明安圖終於解決了無窮級數自乘的難題。

3、學習和紀念

3.1. 史學家和數學家對明安圖的研究

日本著名學者三上義夫 (Mikami Yoshio, 1863−1950) 說 (1910): “圓理發達爲最緊要之事件, 可比西洋之定積分, 其演算法則始于所謂杜氏九術。及蒙古族人欽天監監正明安圖, 積三十餘年之辛勞, 始考出解析方法, 且別附以六術。”[16] 李儼 (1892−1962) 、錢寶琮 (1892−1974) 做了基本的研究工作。

李迪 (1927−2006) 發表了明安圖傳記[17]和 10多篇論文, 何紹庚、羅見今、特古斯做了深入的工作。法國學者詹嘉玲 (Catherine Jami) 說[18]: 明安圖數學工作的特點是綜合了西方和中國兩種數學傳統。

程式設計的先驅者、美國斯坦福大學克努特 (D. E. Knuth) 教授在他的名著《電腦程式設計藝術》中提到卡塔蘭數的歷史, 他說: “蒙古族中國數學家明安圖在 1750年前研究無窮級數時提出了卡塔蘭數⋯⋯ [見羅見今, 內蒙古大學學報, 19(1988), 239-245;《組合數學和圖論》(世界科學出版社, 1993, 68-70)]”[19]。

德爾比大學的拉坎布 (P. J. Larcombe) 博士按照筆者對明安圖的解讀, 發表了 7篇論文, 研究明安圖和卡塔蘭數, 例如 “卡塔蘭數的歷史: 中國的最早紀錄”[20], “18世紀中國發現的卡塔蘭數”[21], “展開式中帶有卡塔蘭數的正弦函數: 超幾何函數研究的一個注記”[22], 等。

3.2. 關於明安圖星

1992年明安圖誕生 300周年時, 在呼和浩特召開了紀念會, 北京天文臺台長、中國科學院王綬琯院士和 80多位學者 (其中包括30多位外國學者) 參加了會議。

明安圖的天文學成就在國際天文學領域獲得承認。1999年中國天文學家發現了新的小行星 28242號, 國際天文學聯合會小天體提名委員會 2002年 5月 26日宣佈將 28242號命名爲 “明安圖星”[23]。

---

[16] 三上義夫: 中國數學之發展, 1910。見中國算學之特色, 1925 (1929林科堂譯自日文)。

[17] 李迪, 蒙古族科學家明安圖, 內蒙古人民出版社, 1978。

[18] 詹家玲, 18世紀中國數學中的傳統工作以及所受的西方影響, 國際數學史雜誌, 1988。

[19] Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1, Fundamental Algorithms, Third Edition, Tsinghua University Press 2002 (English, for sale in mainland China only), 407.

[20] See *Mathematics Today*, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Application (IMA), Vol. 35, No. 3, (1999), 89.

[21] See *Mathematical Spectrum*, Vol. 32, No. 1, (1999/2000), 5-7.

[22] See *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* (JCMCC), Vol. 37, (2001), 65-74.

[23] The document of “2002 May 26 M. P. C. 45750 New Name of Minor Planet” said: “Ming Antu (1692-1765?) was a Chinese astronomer and mathematician of Qing Dynasty. During the decades of his service in the Imperial Observatory, he participated in compiling and editing three very important astronomical works.”

2002年是明安圖誕生 310周年, 2002年 8月 “明安圖星” 命名大會和那達慕[24]大會在明安圖的故鄉舉行, 王綬琯院士和中國科學院地質地理科學研究所的滕吉文院士參加, 500多位代表和 2萬多本地居民參加了慶祝, 舉行了 “明安圖科學成果研討會”, 政府決定將明安圖故鄉城鎮命名爲 “明安圖鎮”, 宣佈建立 “明安圖科學技術博物館”。王綬琯院士寫了一首紀念明安圖的詩, 廣爲流傳:

科學巨星明安圖　冉冉升起康乾初　精修曆象制皇輿　割圜密率冠前驅
碧野連空故上都　循公往跡纂公書　欲上青天攬公裾　今朝興國並興區

—本文作者任教內蒙古師大科學史研究所(呼和浩特), 浙江大學科技與文化研究所(杭州)—

The Symposium on Analysis and Probability

日　　期：2010年8月10日 (星期二) ~ 2010年8月12日 (星期四)

目　　的：The goal of this symposium is to expose young researchers and students to the latest developments in the field of analysis and probability. The main topics consist of

- Stochastic Analysis and Its Applications
- Infinite dimensional Analysis
- Probability
- Nonlinear Analysis and Its Applications
- Harmonic Analysis

Please refer to http://www.math.sinica.edu.tw for further details.

[24] “那達慕” 是蒙古民族在草原上舉行的大型傳統聚會。