數學傳播 34卷1期, pp. 35-57

線性遞迴關係之求解(下)

張福春 · 莊淨惠

4. 常係數線性遞迴關係 (linear recurrence relation with constant coefficients)

本節將針對 k 階常係數線性遞迴關係 (定義 2.5)

$$C_0a_n + C_1a_{n-1} + \cdots + C_ka_{n-k} = f(n), \quad n \geq k$$

分別對齊次及常見非齊次個別介紹其求解方法。

4.1. 齊次常係數線性遞迴關係 (homogeneous linear recurrence relation with constant coefficients)

首先考慮齊次的求解, 即 $f(n) = 0$, 將具有型式 $a_n = A\alpha^n$ 代入得

$$C_0A\alpha^n + C_1A\alpha^{n-1} + \cdots + C_kA\alpha^{n-k} = 0$$

因此得到

$$A\alpha^{n-k}(C_0\alpha^k + C_1\alpha^{k-1} + \cdots + C_k) = 0$$

我們稱 $C_0\alpha^k + C_1\alpha^{k-1} + \cdots + C_k = 0$ 爲該遞迴關係式的特徵方程式 (characteristic equation), 且稱 α 爲特徵根 (characteristic root)。由代數基本定理知, 最多具有 k 個相異特徵根, 討論其特徵根 α, 有參種不同的情形, 以下分別討論之:

I: **相異根** α 具有 k 個相異根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, 則 $a_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$ 爲此遞迴關係式的解, 其中 c_i 爲常數, $1 \leq i \leq k$, 證明如下面定理。

定理 4.1: (**齊次相異根**) 在定義 2.5 的齊次遞迴關係式中, 假設 α_i 爲其特徵根, $i=1,2,\ldots,k$, 則

$$a_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$$

爲此遞迴關係式的解, 其中 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 爲常數。

證明: 因爲 α_i 爲其特徵根, $i=1,2,\ldots,k$, 代入原方程式得 $C_0\alpha_i^k + C_1\alpha_i^{k-1} + \cdots + C_k = 0$, $i=1,2,\ldots,k$。將等式兩邊同乘上 $c_i\alpha_i^{n-k}$, 則 $c_i\alpha_i^{n-k}(C_0\alpha_i^k + C_1\alpha_i^{k-1} + \cdots + C_k) = 0$, $i=1,2,\ldots,k$, 再將 $c_i\alpha_i^{n-k}$ 乘進去, 即 $C_0(c_i\alpha_i^n) + C_1(c_i\alpha_i^{n-1}) + \cdots + C_k(c_i\alpha_i^{n-k}) = 0$, $i=1,2,\ldots,k$。將 $i=1,2,\ldots,k$ 代入並加總起來 且同係數的項合併整理, 可得 $C_0(c_1\alpha_1^n + \cdots + c_k\alpha_k^n) + C_1(c_1\alpha_1^{n-1} + \cdots + c_k\alpha_k^{n-1}) + \cdots + C_k(c_1\alpha_1^{n-k} + \cdots + c_k\alpha_k^{n-k}) = 0$, 即 $C_0(c_1\alpha_1^n) + C_1(c_1\alpha_1^{n-1}) + \cdots + C_k(c_1\alpha_1^{n-k}) + C_0(c_2\alpha_2^n) + C_1(c_2\alpha_2^{n-1}) + \cdots + C_k(c_2\alpha_2^{n-k}) + \cdots + C_0(c_k\alpha_k^n) + C_1(c_k\alpha_k^{n-1}) + \cdots + C_k(c_k\alpha_k^{n-k}) = 0$, 所以 $c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$ 爲齊次遞迴關係式的解。 □

例 4.1: 設 $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, 求 a_n 的一般解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$, 其解爲兩相異根 $\alpha = 2, -3$, 因此可假設 $a_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n$。代入邊界條件得

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 = 2c_1 - 3c_2 = 2 \end{cases}$$

其解爲 $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, 所以 $a_n = 2^n$, $n \geq 0$。 □

例 4.2: (**賭徒問題**) A 和 B 玩一個遊戲, 在每一階段 A 贏 B 的機率爲 p, B 贏 A 的機率爲 q, 其中 p, q 爲正實數, 且滿足 $p+q=1$。假設不會有平手的情況發生, 且遊戲一開始 A 有 a 塊錢, B 有 b 塊錢, 且 $a+b=N$, 此遊戲在其中一人得到 M 塊錢即停止, 這裡 M 滿足 $\min(M, N-M) \leq \min(a,b)$, $\max(M, N-M) \geq \max(a,b)$。

(a) 求此遞迴關係式及其邊界條件。

(b) 當 $p \neq q$ 時, 求 A 贏的機率。

解:

(a) 設 u_k 爲當 A 在 k 塊錢贏得此比賽的機率, 而 A 會贏得此場比賽的情況有下列兩種: 在下一步 A 贏一塊錢且 A 即贏得比賽, 或是下一步 A 輸一塊錢且 A 贏得比賽。第一種情況的機率爲 pu_{k+1}, 第二種情況的機率爲 qu_{k-1}, 所以 $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$。

決定邊界條件, 因爲當 A 有 M 塊錢時, 他贏的機率爲 1, 即 $u_M = 1$, 如果 A 輸了此場比賽, 即 B 得到 M 塊錢, 此時 A 有 $N-M$ 塊錢, 即 A 贏的機率爲零, $u_{N-M} = 0$。

(b) 其特徵多項式爲 $pr^2 - r + q = 0$, 所以 $r = \frac{1\pm\sqrt{1-4pq}}{2p} = \frac{1\pm\sqrt{1-4p+4p^2}}{2p} = \frac{1\pm(1-2p)}{2p} = 1, q/p$, 所以 $u_k = c_1 + c_2(q/p)^k$, 因爲 $u_M = 1$, 即 $1 = c_1 + c_2(q/p)^M$, 又知 $u_{N-M} = 0$, 故 $0 = c_1 + c_2(q/p)^{N-M}$。兩聯立方程式可求得 $c_1 = \frac{-(q/p)^{N-M}}{(q/p)^M-(q/p)^{N-M}}$, $c_2 = \frac{1}{(q/p)^M-(q/p)^{N-M}}$, 所以 $u_k = \frac{(q/p)^k-(q/p)^{N-M}}{(q/p)^M-(q/p)^{N-M}}$。因爲 A 一開始有 a 塊錢, 所以 A 贏的機率爲 $u_a = \frac{(q/p)^a-(q/p)^{N-M}}{(q/p)^M-(q/p)^{N-M}}$。 □

II: **重根** α 具有 t 個相異根 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, 其中 α_i 具有重根數 m_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, 則相對於 α_i 部分的解爲 $u_i(n) = (c_{i_0} + c_{i_1}n + \cdots + c_{i_{m_i-1}}n^{m_i-1})\alpha_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, t$, 且

$$a_n = u_1(n) + u_2(n) + \cdots + u_t(n)$$

其中 $c_{i_0}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_{m_i-1}}$ 爲常數, $i = 1, 2, \ldots, t$, 證明如下面定理。

定理 4.2: (**齊次重根**) 在定義 2.5 的齊次遞迴關係式中, 假設 α_i 爲其相異特徵根, $i = 1, 2, \ldots, t$, 其中 α_i 具有重根數 m_i, $1 \le i \le t$, 且 $u_i(n) = (c_{i_0}+c_{i_1}n+\cdots+c_{i_{m_i-1}}n^{m_i-1})\alpha_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, t$, 則 $a_n = u_1(n) + u_2(n) + \cdots + u_t(n)$ 爲此遞迴關係式的解。

證明: 對於所有的 $i = 1, 2, \ldots, t$, 首先證明 $u_i(n)$ 爲此齊次遞迴關係式的解, 類似定理 4.1 的證明可得 $c_{i_0}\alpha_i^n$ 爲此齊次遞迴關係式的解。若 α_i 的重根數 $m_i = 1$, 則 $u_i(n) = c_{i_0}\alpha_i^n$ 爲此齊次遞迴關係式的解。

若 α_i 的重根數 $m_i > 1$, 欲證明 $c_{i_1}n\alpha_i^n$ 亦爲此齊次遞迴關係式的解。因爲 α_i 爲其特徵根, 所以 α_i 滿足特徵方程式 $C_0\alpha^k + C_1\alpha^{k-1} + \cdots + C_k = 0$, 等式兩邊同乘 α^{n-k}, 因此 α_i 滿足方程式

$$C_0\alpha^n + C_1\alpha^{n-1} + \cdots + C_k\alpha^{n-k} = 0 \tag{4.1}$$

因爲 α_i 爲方程式 (4.1) 的 m_i 重根, 所以 α_i 滿足 (4.1) 式的微分, 即滿足方程式

$$C_0n\alpha^{n-1} + C_1(n-1)\alpha^{n-2} + \cdots + C_k(n-k)\alpha^{n-k-1} = 0$$

將 α_i 代入得 $C_0n\alpha_i^{n-1} + C_1(n-1)\alpha_i^{n-2} + \cdots + C_k(n-k)\alpha_i^{n-k-1} = 0$, 等式左右同乘上 $c_{i_1}\alpha_i$ 整理可得 $C_0[c_{i_1}n\alpha_i^n] + C_1[c_{i_1}(n-1)\alpha_i^{n-1}] + \cdots + C_k[c_{i_1}(n-k)\alpha_i^{n-k}] = 0$, 將 $i = 1, 2, \ldots, t$ 代入加總起來, 可得 $C_0[c_{1_1}n\alpha_1^n] + C_1[c_{1_1}(n-1)\alpha_1^{n-1}] + \cdots + C_k[c_{1_1}(n-k)\alpha_1^{n-k}] + C_0[c_{2_1}n\alpha_2^n] + C_1[c_{2_1}(n-1)\alpha_2^{n-1}] + \cdots + C_k[c_{2_1}(n-k)\alpha_2^{n-k}] + \cdots + C_0[c_{t_1}n\alpha_t^n] + C_1[c_{t_1}(n-1)\alpha_t^{n-1}] + \cdots + C_k[c_{t_1}(n-k)\alpha_t^{n-k}] = 0$, 所以 $c_{i_1}n\alpha_i^n$ 爲此齊次遞迴關係式的解。同理, 因爲 α_i 滿足 (4.1) 式的 2次微分, 3次微分, $\cdots$, (m_i-1)次微分, 可證得

$$c_{i_2}n^2\alpha_i^n, c_{i_3}n^3\alpha_i^n, \ldots, c_{i_{m_i-1}}n^{m_i-1}\alpha_i^n$$

皆為此齊次遞迴關係式的解。類似定理 4.1 可證明 $u_i(n)=c_{i_0}\alpha_i^n+c_{i_1}n\alpha_i^n+\cdots+c_{i_{m_i-1}}\times n^{m_i-1}\alpha_i^n$ 為此齊次遞迴關係式的解, 即 $C_0u_i(n)+C_1u_i(n-1)+\cdots+C_ku_i(n-k)=0$, $i=1,2,\ldots,t$。將所有 i 加總可得 $C_0(\sum_{i=1}^t u_i(n))+C_1(\sum_{i=1}^t u_i(n-1))+\cdots+C_k(\sum_{i=1}^t u_i(n-k))=\sum_{i=1}^t(C_0u_i(n)+C_1u_i(n-1)+\cdots+C_ku_i(n-k))=0$, 所以 $\sum_{i=1}^t u_i(n)=u_1(n)+u_2(n)+\cdots+u_t(n)$ 為此齊次遞迴關係的解。 □

例 4.3: 設 $a_n-7a_{n-1}+16a_{n-2}-12a_{n-3}=0$, $n\geq 3$, $a_0=0$, $a_1=3$, $a_2=13$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式為 $\alpha^3-7\alpha^2+16\alpha-12=0$, 因式分解後 $(\alpha-2)^2(\alpha-3)=0$, 所以 $\alpha=2,2,3$, 將 $a_n=(c_1+c_2n)2^n+c_33^n$ 代入邊界條件 $(n=0,1,2)$, 可得

$$\begin{cases} a_0=c_1+c_3=0\\ a_1=2(c_1+c_2)+3c_3=3\\ a_2=4(c_1+2c_2)+9c_3=13\end{cases}$$

由聯立方程式解出 $c_1=-1$, $c_2=1$, $c_3=1$, 所以 $a_n=(-1+n)2^n+3^n$, $n\geq 0$。 □

例 4.4: 同例題 4.2 當 $p=q=1/2$ 時, 求 A 贏的機率。

解: 當 $p=q=\frac{1}{2}$ 時, $pr^2-r+q=0$ 即為 $\frac{1}{2}r^2-r+\frac{1}{2}=0$, 所以 $r^2-2r+1=0$, $r=1,1$ 為重根, 則 $u_k=c_3+c_4k$。代入邊界條件 $u_M=1$, $u_{N-M}=0$, 得 $c_3+c_4M=1$, $c_3+c_4(N-M)=0$, 解出 $c_3=\frac{M-N}{2M-N}$, $c_4=\frac{1}{2M-N}$, 所以 $u_k=\frac{M-N+k}{2M-N}$。因為 A 一開始有a塊錢, 所以 A 贏的機率為 $u_a=\frac{M-N+a}{2M-N}$。 □

III: **齊次共軛複根** 當出現有一組共軛複根 $\alpha_1=\delta+i\omega$, $\alpha_2=\delta-i\omega$, δ, $\omega\in R$, 其中 $\omega\neq 0$, 事實上它只是相異根的一個特例, 令 $\rho=\sqrt{\delta^2+\omega^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}$, 如圖 4 所示。

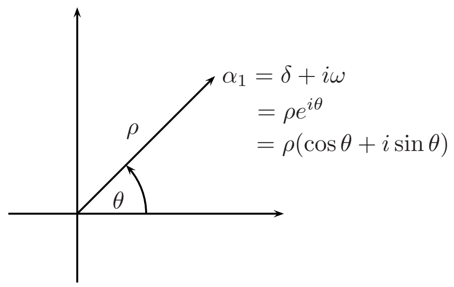

圖 4. 共軛複根

定理 4.3: (**齊次共軛複根**) 在定義 2.5 的齊次遞迴關係式中, 假設出現有一組共軛根 $\alpha_1 = \delta + i\omega$, $\alpha_2 = \delta - i\omega$, 其中 $\omega \neq 0$, 事實上它只是相異根的一個特例, 令 $\rho = \sqrt{\delta^2+\omega^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega}{\delta}$, 則 $a_n = B_1\rho^n\cos n\theta + B_2\rho^n\sin n\theta$ 爲此遞迴關係式的解, 其中 $B_1 = c_1 + c_2$, $B_2 = i(c_1 - c_2)$ 爲常數。

證明: 相對於該組根的解爲

$$\begin{aligned}
c_1(\alpha_1)^n + c_2(\alpha_2)^n &= c_1(\delta+i\omega)^n + c_2(\delta-i\omega)^n \\
&= c_1(\rho e^{i\theta})^n + c_2(\rho e^{-i\theta})^n \\
&= c_1(\rho^n e^{in\theta}) + c_2(\rho^n e^{-in\theta}) \\
&= c_1\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + c_2\rho^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) \\
&= (c_1+c_2)\rho^n\cos n\theta + i(c_1-c_2)\rho^n\sin n\theta \\
&= B_1\rho^n\cos n\theta + B_2\rho^n\sin n\theta
\end{aligned}$$

其中 $B_1 = c_1 + c_2$, $B_2 = i(c_1 - c_2)$ 爲常數。 □

例 4.5: 設 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, 所以 $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 則 $\rho = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$, $\theta = \tan^{-1}((\sqrt{3}/2)/(1/2)) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, 因此 $a_n = B_1\cos\frac{\pi}{3} + B_2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2$。代入邊界條件得

$$\begin{cases}
a_1 = B_1\cos\frac{\pi}{3} + B_2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 = 1 \\
a_2 = B_1\cos\frac{2\pi}{3} + B_2\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 = 0
\end{cases}$$

由聯立方程式解出可得 $B_1 = 1$, $B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $a_n = \cos\frac{n}{3}\pi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n}{3}\pi$, $n \geq 1$。 □

例 4.6: 設 $b > 0$, $n \times n$ 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix}
b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
b & b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b
\end{vmatrix}$$

求 D_n之值。

解: 對第一列展開得

$$D_n = b\underbrace{\begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b \end{vmatrix}}_{D_{n-1}} - b\begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= bD_{n-1} - b^2\underbrace{\begin{vmatrix} b & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b & b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & b \end{vmatrix}}_{D_{n-2}} \quad \text{(對第一行展開的結果)}$$

$$= bD_{n-1} - b^2 D_{n-2}$$

另外, $D_1 = |b| = b$, $D_2 = \begin{vmatrix} b & b \\ b & b \end{vmatrix} = 0$, 得遞迴關係式 $D_n = bD_{n-1} - b^2 D_{n-2}$, $D_1 = b$, $D_2 = 0$。

特徵方程式 $\alpha^2 - b\alpha + b^2 = 0$, 其兩共軛複數根為 $\alpha = \frac{b\pm\sqrt{-3b^2}}{2} = b[\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i]$, 所以 $\delta = \frac{b}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, $\rho = \sqrt{\delta^2+\omega^2} = b$, $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega}{\delta} = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$。因此 $D_n = b^n[B_1\cos(\frac{n\pi}{3}) + B_2\sin(\frac{n\pi}{3})]$, 代入邊界條件得

$$\begin{cases} D_1 = b(\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2) = b \\ D_2 = b^2(-\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2) = 0 \end{cases}$$

解聯立方程式得 $B_1 = 1$, $B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 所以 $D_n = b^n[\cos(\frac{n\pi}{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{3})]$, $n \geq 1$。 □

若解出來的特徵根包含不止 I, II, III 的其中一型時, 則 a_n 為各型的和, 例如若解出的特徵根為 2, 2, 4, 5, $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, 則 $a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + d_1 4^n + d_2 5^n + B_1\cos\frac{n}{3}\pi + B_2\sin\frac{n}{3}\pi$。

例 4.7: 設 $a_n - 8a_{n-1} + 20a_{n-2} - 16a_{n-3} = 0$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式為 $\alpha^3 - 8\alpha^2 + 20\alpha - 16 = 0$, 因式分解可得 $(\alpha-2)^2(\alpha-4) = 0$, 所以 $\alpha = 2, 2, 4$, 故可設 $a_n = (c_0 + c_1 n)2^n + c_2 4^n$。 □

以上的所有情形都可以用矩陣的形式來表示, 下面分別對三種情形舉例, 介紹其對應的矩陣表示法:

例 4.8: (**相異根**) 設 $a_{n+2}-6a_{n+1}+8a_n=0$, $n\geq 0$, $a_0=1$, $a_1=2$, 求 a_n 的解。

解: 可將上述的遞迴關係式寫成

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = A^2\begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = A^n\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

其中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$。只要計算出 A^n, 即可求得此遞迴關係式, 因爲 A^n 的計算較複雜, 先將 A 分解成標準形式 (對角化或 Jordan 形式)。經過計算, 在此例子中 A 可對角化, 所以 A^n 可利用矩陣的對角化性質簡單的求得。因爲 $A=P\Lambda P^{-1}$, 其中 Λ 是 A 對應的特徵根, 而 P 的第一行爲特徵根 2 所對應的特徵向量, 第二行爲特徵根 4 所對應的特徵向量, 可得 $\Lambda=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, 所以 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$ 即可很容易求得。將起始條件代入, 可得

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1}-4^n & 2^{2n-1}-2^{n-1} \\ 2^{n+2}-4^{n+1} & 2^{2n+1}-2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2^{n+1} \end{bmatrix}$$

因此 $a_n=2^n$, $n\geq 0$。 □

例 4.9: (**重根**) 設 $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$, $n\geq 0$, $a_0=1$, $a_1=2$, 求 a_n 的解。

解: 可將上述的遞迴關係式寫成

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \cdots = A^n\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

其中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$。$A$ 的特徵根有 2 的二重根, 而特徵向量只有一個 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 因此 A 無法對角化。但可利用矩陣 Jordan 形式算出 $J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, 其中 $P=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$。故 $A^n=PJ^nP^{-1}$ 即可很容易求得。將起始條件代入, 可得

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n-n2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & 2^n+n2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n \\ 2^{n+1} \end{bmatrix}$$

因此 $a_n = 2^n$, $n \geq 0$。 □

例 4.10: (**共軛複根**) 設 $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, 求 a_n 的解。

解: 可將上述的遞迴關係式寫成

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$。只要計算出 A^n, 即可求得此遞迴關係式。先將 A 分解成標準形式 (對角化或 Jordan 形式), 經過計算, 在此例子中 A 可對角化, 所以 A^n 可利用矩陣的對角化性質簡單的求得。因爲 $A = P\Lambda P^{-1}$, 其中 Λ 是 A 對應的特徵根, 而 P 的第一行爲特徵根 $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 所對應的特徵向量, 第二行爲特徵根 $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 所對應的特徵向量, 可得 $\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 所以 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ 即可很容易求得。將起始條件代入, 可得

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2^{-n-1}((1-\sqrt{3}i)^n(3-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)^n(3+\sqrt{3}i))}{3} & \frac{i2^{-n}((1-\sqrt{3}i)^n-(1+\sqrt{3}i)^n)}{\sqrt{3}} \\ \frac{i2^{-n}(-(1-\sqrt{3}i)^n+(1+\sqrt{3}i)^n)}{\sqrt{3}} & \frac{2^{-n-1}((3-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^n+(1-\sqrt{3}i)^n(3+\sqrt{3}i))}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{-n-1}((1-\sqrt{3}i)^n(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^n) \\ 2^{-n}((1-\sqrt{3}i)^n+(1+\sqrt{3}i)^n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

因此 $a_n = 2^{-n-1}((1-\sqrt{3}i)^n(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)^n)$, $n \geq 0$。 □

綜合以上的例子, 對於一般的常係數 k 階遞迴關係式:

$$C_0a_n + C_1a_{n-1} + \cdots + C_ka_{n-k} = 0, \quad n \geq k$$

有下列矩陣的表達式:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{C_k}{C_0} & -\frac{C_{k-1}}{C_0} & -\frac{C_{k-2}}{C_0} & \cdots & -\frac{C_1}{C_0} \end{bmatrix}$$

由矩陣的理論可知 A 的特徵方程式與遞迴關係式成比例, 且 A 的特徵方程式如果有相異根或共軛複根時, 則 A 可以對角化, 故可利用對角化簡單的算出 A^n, 矩陣 A 可對角化故其解會設成定理 4.1 及定理 4.3 的形式; 而當 A 的特徵根為重根時, 矩陣 A 僅具有 Jordan 形式不可對角化需藉由 Jordan 形式的轉換, 即可以求出 A^n, 所以可以設成定理 4.2 的形式。

根據上面三個情形的分析可得到下面表 (2) 的結果。

表2. 齊次解型式

特徵根型式	一般解型式
相異根	$a_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$
重根	$a_n = u_1(n) + u_2(n) + \cdots + u_t(n)$, $u_i(n) = (c_{i_0} + c_{i_1}n + \cdots + c_{i_{m_i-1}}n^{m_i-1})\alpha_i^n$
共軛複根	$a_n = B_1\rho^n\cos n\theta + B_2\rho^n\sin n\theta$ 其中 B_1, B_2 為常數

4.2. 非齊次常係數線性遞迴關係 (nonhomogeneous linear recurrence relation with constant coefficients)

接下來考慮非齊次求解, 即 $f(n) \neq 0$, 假設 $a_n^{(h)}$ 及 $a_n^{(p)}$ 分別為此遞迴關係式的齊次解 (general solution) 及特解 (particular solution), 滿足

$$C_0a_n^{(h)} + C_1a_{n-1}^{(h)} + \cdots + C_ka_{n-k}^{(h)} = 0 \quad \text{且}$$
$$C_0a_n^{(p)} + C_1a_{n-1}^{(p)} + \cdots + C_ka_{n-k}^{(p)} = f(n)$$

則 $C_0(a_n^{(h)}+a_n^{(p)})+C_1(a_{n-1}^{(h)}+a_{n-1}^{(p)})+\cdots+C_k(a_{n-k}^{(h)}+a_{n-k}^{(p)}) = f(n)$, 所以 $a_n = a_n^{(h)}+a_n^{(p)}$ 為此遞迴關係式的解。因此, 解非齊次常係數線性遞迴關係式只比齊次多一道求特解的手續, 至於 $a_n^{(p)}$ 如何決定, 以下分成三種常見可解的情形來討論:

定理 4.4: (**非齊次項為一多項式**) 若 $f(n) = \sum_{i=0}^{k} c_in^i$, 其中 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 為常數且 $c_k \neq 0$, 則

$$a_n^{(p)} = n^r(d_0 + d_1n + \cdots + d_kn^k)$$

其中 $r = \begin{cases} 0, & \text{若 1不為特徵方程式的根} \\ 1\text{的重根數}, & \text{若 1為特徵方程式的根} \end{cases}$

證明: 不妨假設 $C_0 = 1$, 在此舉二階常係數線性非齊次遞迴方程式

$$a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} = f(n) \tag{4.2}$$

且$f(n) = k_2n^2 + k_1n + k_0$來說明, 其他階可以用相同的辦法證明。它所對應的特徵方程式為

$$\alpha^2 + C_1\alpha + C_2 = 0 \tag{4.3}$$

(i) 若 $\alpha=1$ 不是特徵方程式 (4.3) 的根, 則我們設 (4.2) 的特解為

$$a_n^{(p)}=d_0+d_1n+d_2n^2 \quad (d_0,d_1,d_2 \text{ 為特定常數})$$

代入 (4.2) 化簡得

$$\begin{aligned}&(d_2+C_1d_2+C_2d_2)n^2+[d_1+C_1(d_1-2d_2)+C_2(d_1-4d_2)]n\\&+[d_0+C_1(d_2-d_1+d_0)+C_2(4d_2-d_1+d_0)]\\=\,&k_2n^2+k_1n+k_0\end{aligned}$$

比較係數得

$$\begin{cases}d_2(1+C_1+C_2)=k_2\\d_1(1+C_1+C_2)-2d_2(C_1+2C_2)=k_1\\d_0(1+C_1+C_2)-d_1(C_1+C_2)+d_2(C_1+4C_2)=k_0\end{cases}\tag{4.4}$$

由於 $\alpha=1$ 不是 $\alpha^2+C_1\alpha+C_2=0$ 的根, 即 $1+C_1+C_2\neq 0$, 故 d_2, d_1, d_0可以確定。則 $a_n^{(p)}=d_2n^2+d_1n+d_0$ 是 (4.2) 的特解。

(ii) 若 $\alpha=1$ 是特徵方程式 $\alpha^2+C_1\alpha+C_2=0$ 的單根, 即 $1+C_1+C_2=0$。因為判別式 $\Delta=C_1^2-4C_2>0$, 所以特徵方程式的另一個根為 $\alpha_2=-(1+C_1)=C_2\neq 1$, 這樣方程組 (4.4) 就不能定出 d_2。此時令 (4.2) 的特解為

$$a_n^{(p)}=n(d_0+d_1n+d_2n^2)$$

代入 (4.2), 比較係數, 且利用 $1+C_1+C_2=0$ 可得

$$\begin{cases}d_2(-3C_1-6C_2)=k_2\\d_2(3C_1+12C_2)+d_1(-2C_1-4C_2)=k_1\\d_2(-C_1-8C_2)+d_1(C_1+4C_2)+d_0(-C_1-2C_2)=k_0\end{cases}\tag{4.5}$$

由 $C_2\neq 1$, $1+C_1+C_2=0$, $C_1+2C_2\neq 0$, 可確定 d_2, d_1, d_0。

(iii) 如果 $\alpha=1$ 是特徵方程式 $\alpha^2+C_1\alpha+C_2=0$ 的重根, 這時判別式 $\Delta=0$, $\alpha_1=\alpha_2=-\frac{C_1}{2}=1$, 所以 $C_1=-2$, $C_2=1$, 因此 $C_1+2C_2=0$。這樣從方程組 (4.5) 中確定不了 d_2。此時我們設 (4.2) 的特解為

$$a_n^{(p)}=n^2(d_0+d_1n+d_2n^2)$$

代入 (4.2), 用比較係數及重根的條件得

$$\begin{cases} 6d_2(C_1+4C_2)=k_2 \\ 3d_1(C_1+4C_2)-4d_2(C_1+8C_2)=k_1 \\ d_0(C_1+4C_2)-d_1(C_1+8C_2)+d_2(C_1+16C_2)=k_0 \end{cases}$$

這樣可以確定 d_2, d_1, d_0。

因此, 當 $f(n)$ 是二次多項式時, (4.2) 的特解可以這樣來確定:

(i) 若 $\alpha=1$ 不是特徵方程式的根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=d_0+d_1n+d_2n^2$$

(ii) 若 $\alpha=1$ 是特徵方程式的單根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=n(d_0+d_1n+d_2n^2)$$

(iii) 若 $\alpha=1$ 是特徵方程式的重根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=n^2(d_0+d_1n+d_2n^2)$$ □

例 4.11: (1**不為特徵根**) 設 $a_n-7a_{n-1}+10a_{n-2}=4n-5$, $n\geq 2$, $a_0=2$, $a_1=4$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha^2-7\alpha+10=(\alpha-5)(\alpha-2)=0$, 得 $\alpha=2,5$, 所以 $a_n^{(h)}=c_12^n+c_25^n$。因爲特徵根不含 1, 令 $a_n^{(p)}=d_0+d_1n$ 代入原遞迴關係式得 $(d_0+d_1n)-7(d_0+d_1(n-1))+10(d_0+d_1(n-2))=4n-5$。整理後可得 $4d_1n+(4d_0-13d_1)=4n-5$, 所以

$$\begin{cases} 4d_1=4 \\ 4d_0-13d_1=-5 \end{cases}$$

可得 $d_0=2$, $d_1=1$。所以 $a_n^{(p)}=n+2$, 則 $a_n=a_n^{(h)}+a_n^{(p)}=c_12^n+c_25^n+n+2$ 代入邊界條件可得

$$\begin{cases} a_0=c_1+c_2+2=2 \\ a_1=2c_1+5c_2+3=4 \end{cases}$$

求聯立方程式可得 $c_1=-\frac{1}{3}$, $c_2=\frac{1}{3}$, 所以 $a_n=-\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{3}\cdot 5^n+n+2$, $n\geq 0$。 □

例 4.12: (1**為特徵根的二重根**) 設 $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+4$, $n\geq 2$, $a_0=0$, $a_1=2$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha^2-2\alpha+1=(\alpha-1)^2=0$, 得 $\alpha=1,1$, 所以 $a_n^{(h)}=(c_0+c_1n)\cdot 1^n=c_0+c_1n$。因爲 1爲特徵根, 令 $a_n^{(p)}=n^2d_0$ 代入原遞迴關係式得 $n^2d_0-2(n-1)^2d_0+(n-2)^2d_0=4$。將 $n=0$ 代入$-2d_0+4d_0=4$, 整理可得 $2d_0=4$, 即 $d_0=2$, 所以 $a_n^{(p)}=2n^2$。則

$$a_n=a_n^{(h)}+a_n^{(p)}=c_0+c_1n+2n^2$$

代入邊界條件

$$\begin{cases} a_0=c_0=0 \\ a_1=c_0+c_1+2=2 \end{cases}$$

解聯立方程式可得 $c_0=c_1=0$。所以 $a_n=2n^2$, $n\ge 0$。 □

定理 4.5: (**非齊次項為一指數函數**) 若 $f(n)=c\lambda^n$, 其中 $c,\lambda\neq 1$ 爲常數, 則

$$a_n^{(p)}=(d_0+d_1n+\cdots+d_rn^r)\lambda^n$$

其中 $r=\begin{cases} 0, & \text{若 } \lambda \text{ 不爲特徵方程式的根} \\ \lambda \text{ 之重根數}, & \text{若 } \lambda \text{ 爲特徵方程式的根} \end{cases}$

證明: 相同地, 在此舉二階常係數線性非齊次遞迴方程式來說明:

(i) 若 λ 不是特徵方程式 (4.3) 的根, 設 (4.2) 的特解爲 $a_n^{(p)}=d_0\lambda^n$, 代入 (4.2) 得

$$d_0\lambda^n+C_1(d_0\lambda^{n-1})+C_2(d_0\lambda^{n-2})=c\lambda^n$$

整理後得 $d_0(\lambda^2+C_1\lambda+C_2)=c\lambda^2$, 因爲 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2\neq 0$, 所以 $d_0=\frac{c\lambda^2}{\lambda^2+C_1\lambda+C_2}$。

(ii) 若 λ 是特徵方程式的單根, 即 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2=0$, 設另一根爲 q, $q\neq\lambda$。因爲 $(\alpha-\lambda)(\alpha-q)=0$, 所以

$$\begin{cases} C_1=-(\lambda+q), \quad C_1\neq -2\lambda \\ C_2=\lambda q, \quad C_2\neq\lambda^2 \end{cases}$$

設 (4.2) 的特解爲 $a_n^{(p)}=(d_0+d_1n)\lambda^n$, 代入 (4.2) 得

$$(d_0+d_1n)\lambda^n+C_1(d_0+d_1(n-1))\lambda^{n-1}+C_2(d_0+d_1(n-2))\lambda^{n-2}=c\lambda^n$$

整理後得 $d_0(\lambda^2+C_1\lambda+C_2)+nd_1(\lambda^2+C_1\lambda+C_2)-d_1(\lambda C_1+2C_2)=c\lambda^2$, 由於 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2=0$, 所以 $C_1\lambda+C_2=-\lambda^2$, 因此 $C_1\lambda+2C_2=-\lambda^2+C_2\neq 0$, 故 $d_1=\frac{-c\lambda^2}{C_1\lambda+2C_2}$。

(iii) 若 λ 是特徵方程式的重根, 即 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\lambda$, 於是 $\lambda=-\frac{C_1}{2}$, $C_1=-2\lambda$, $C_2=\lambda^2$。此時令 (4.2) 的特解爲 $a_n^{(p)}=(d_0+d_1n+d_2n^2)\lambda^n$, 代入 (4.2) 得

$$\begin{aligned}(d_0+d_1n+d_2n^2)\lambda^n+C_1(d_0+d_1(n-1)+d_2(n-1)^2)\lambda^{n-1}\\+C_2(d_0+d_1(n-2)+d_2(n-2)^2)\lambda^{n-2}=c\lambda^n\end{aligned}$$

整理後得 $d_2(C_1\lambda+4C_2)=c\lambda^2$, 因爲 $C_1\lambda+4C_2\neq 0$, 所以 $d_2=\frac{c\lambda^2}{C_1\lambda+4C_2}$。

因此, 當 $f(n)=c\lambda^n$時, (4.2) 的特解可以這樣來確定:

(i) 若 λ 不是特徵方程式的根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=d_0\lambda^n,\quad d_0=\frac{c\lambda^2}{\lambda^2+C_1\lambda+C_2}$$

(ii) 若 λ 是特徵方程式的單根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=(d_0+d_1n)\lambda^n,\quad d_1=\frac{-c\lambda^2}{C_1\lambda+2C_2}$$

(iii) 若 λ 是特徵方程式的重根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=(d_0+d_1n+d_2n^2)\lambda^n,\quad d_2=\frac{c\lambda^2}{C_1\lambda+4C_2}\qquad\square$$

由以上的方法可發現當 λ 是特徵方程式的單根或重根時, d_0, d_1會被消去, 所以可以不用設, 故也可用以下方法求解

(i) 若 λ 不是特徵方程式 (4.3) 的根, 設 (4.2) 的特解爲 $a_n^{(p)}=d\lambda^{n+2}$ (d 爲特定常數), 代入 (4.2) 得

$$d(\lambda^2+C_1\lambda+C_2)=c$$

因爲 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2\neq 0$, 所以 $d=\frac{c}{\lambda^2+C_1\lambda+C_2}$。

(ii) 若 λ 是特徵方程式的單根, 即 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2=0$, 設另一根爲 q, $q\neq\lambda$。因爲 $(\alpha-\lambda)(\alpha-q)=0$, 所以

$$\begin{cases}C_1=-(\lambda+q),\quad C_1\neq-2\lambda\\ C_2=\lambda q,\quad C_2\neq\lambda^2\end{cases}$$

設 (4.2) 的特解爲 $a_n^{(p)}=-dn\lambda^{n+2}$, 代入 (4.2) 得

$$-d(C_1\lambda+2C_2)=c$$

由於 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2=0$, 所以 $C_1\lambda+C_2=-\lambda^2$, 因此 $C_1\lambda+2C_2=-\lambda^2+C_2\neq 0$, 故 $d=\frac{-c}{C_1\lambda+2C_2}$。

(iii) 若 λ 是特徵方程式的重根, 即 $\lambda^2+C_1\lambda+C_2=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\lambda$, 於是 $\lambda=-\frac{C_1}{2}$, $C_1=-2\lambda$, $C_2=\lambda^2$。此時令 (4.2) 的特解爲 $a_n^{(p)}=dn^2\lambda^{n+2}$, 代入 (4.2), 得

$$d(C_1\lambda+4C_2)=c$$

因爲 $C_1\lambda+4C_2\neq 0$, 所以 $d=\frac{c}{C_1\lambda+4C_2}$。

因此, 當 $f(n)=c\lambda^n$ 時, (4.2) 的特解可以這樣來確定:

(i) 若 λ 不是特徵方程式的根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=d\lambda^{n+2},\quad d=\frac{c}{\lambda^2+C_1\lambda+C_2}$$

(ii) 若 λ 是特徵方程式的單根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=-dn\lambda^{n+2},\quad d=\frac{-c}{C_1\lambda+2C_2}$$

(iii) 若 λ 是特徵方程式的重根, 則 (4.2) 的特解爲

$$a_n^{(p)}=dn^2\lambda^{n+2},\quad d=\frac{c}{C_1\lambda+4C_2}$$

例 4.13: (λ **不是特徵方程式根**) 設 $a_n-a_{n-1}=3\cdot 2^n$, $n\geq 2$, $a_1=5$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha-1=0$, $\alpha=1$, 則 $a_n^{(h)}=c$ 。因爲 2 不爲特徵根, 令 $a_n^{(p)}=d\cdot 2^n$ 代入原遞迴關係式得 $d\cdot 2^n-d\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$, 故 $d=6$, 所以 $a_n^{(p)}=6\cdot 2^n$, 則

$$\begin{aligned} a_n&=a_n^{(h)}+a_n^{(p)}\\ &=c+6\cdot 2^n \end{aligned}$$

代入邊界條件 $5=a_1=c+12$, $c=-7$, 所以 $a_n=6\cdot 2^n-7$, $n\geq 1$。 □

例 4.14: (λ **是特徵方程式的單根**) 設 $a_n-4a_{n-1}+3a_{n-2}=2\cdot 3^n$, $n\geq 2$, $a_0=2$, $a_1=13$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha^2-4\alpha+3=(\alpha-1)(\alpha-3)=0$, 則 $a_n^{(h)}=c_1\cdot 1^n+c_2\cdot 3^n=c_1+c_2 3^n$。因爲 3 爲特徵根, 令 $a_n^{(p)}=(d_1+d_2n)3^n$ 代入原遞迴關係式得 $(d_1+d_2n)3^n-4(d_1+d_2(n-$

$1))3^{n-1}+3(d_1+d_2(n-2))3^{n-2} = 2\cdot 3^n$。將 $n=2$ 代入得 $9(d_1+2d_2)-12(d_1+d_2)+3d_1 = 18$, 所以 $6d_2 = 18$, 即 $d_2 = 3$。此時還無法求出 d_1, 所以 $a_n^{(p)} = (d_1+3n)3^n$, 則

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \\ &= c_1 + c_2 3^n + (d_1+3n)3^n \\ &= c_1 + (c_2+d_1+3n)3^n \\ &= c_1 + (c_3+3n)3^n, \quad \text{其中 } c_3 = c_2 + d_1 \end{aligned}$$

代入邊界條件

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_3 = 2 \\ a_1 = c_1 + 3(c_3+3) = 13 \end{cases}$$

由聯立方程式可得 $c_1 = 1$, $c_3 = 1$, 所以 $a_n = 1 + (1+3n)3^n$, $n \geq 0$。 □

例 4.15: 求 0, 1, 2, 3 所組成的 n-序列含偶數個 0 的序列數。

解: 令 $a_n = d_1 d_2 \cdots d_n$, $d_i = 0,1,2,3$ 為所求的序列個數, 分成兩種情況來討論:

I 若 $d_n \neq 0$, 欲使整個序列含偶數個 0, 則前面 $(n-1)$-序列需含偶數個 0, 共有 a_{n-1} 種。

II 若 $d_n = 0$, 欲使整個序列含偶數個 0, 則前面 $(n-1)$-序列需含奇數個 0。由於 4元 $(n-1)$-序列中有 4^{n-1} 個序列, 其中含偶數個 0者有 a_{n-1} 個, 所以含奇數個 0者有 $4^{n-1} - a_{n-1}$ 種。

由以上討論知 $a_n = 3a_{n-1} + (4^{n-1} - a_{n-1}) = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$, 當只有 1個數字時有 1, 2, 3 共 3種序列, 即 $a_1 = 3$, 得遞迴關係式 $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$, $n \geq 2$, $a_1 = 3$。

其特徵方程式為 $\alpha - 2 = 0$, 得 $\alpha = 2$, 所以 $a_n^{(h)} = c_1 2^n$。令 $a_n^{(p)} = c_2 4^n$ 代入原遞迴關係式得 $c_2 4^n - 2c_2 4^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot 4^n$, 整理後得 $(c_2 - \frac{1}{2}c_2)4^n = \frac{1}{4}\cdot 4^n$, 所以 $\frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n^{(p)} = \frac{1}{2}\cdot 4^n$。則 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 2^n + \frac{1}{2}\cdot 4^n$ 代入邊界條件得 $3 = a_1 = 2c_1 + 2$, 故 $c_1 = \frac{1}{2}$, 最後可得 $a_n = \frac{1}{2}(2^n + 4^n)$, $n \geq 1$。 □

定理 4.6: (**非齊次項為** $\rho^n \cos n\theta$ **或** $\rho^n \sin n\theta$) 若 $f(n) = \rho^n \cos n\theta$ 或 $\rho^n \sin n\theta$, 其中 θ 為已知, 則 $a_n^{(p)} = \rho^n(B_1 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta)$。

證明: $f(n)$ 是正弦或餘弦函數時, 即 $f(n) = c\cdot\cos n\theta$ 或 $f(n) = c\cdot\sin n\theta$, 方程式 (4.2) 可以寫成

$$a_{1,n} + C_1 a_{1,n-1} + C_2 a_{1,n-2} = c\cos n\theta \tag{4.6}$$

$$a_{2,n} + C_1 a_{2,n-1} + C_2 a_{2,n-2} = c\sin n\theta \tag{4.7}$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$。

將 (4.7) 乘以 i 後與 (4.6) 相加, 得

$$L(a_n) = a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} = c(e^{i\theta})^n \tag{4.8}$$

其中 $a_n = a_{1,n} + i a_{2,n}$。 □

這問題可以歸爲 $f(n) = c \cdot k^n$ 的情形, 由於是複數解, 所以先證明下面定理。

定理 4.7: 若 $a_n^* = u_n + i v_n$ 是 (4.8) 的一個解, 則

$$L_1(u_n) = u_n + C_1 u_{n-1} + C_2 u_{n-2} = c\cos n\theta$$

$$L_2(v_n) = v_n + C_1 v_{n-1} + C_2 v_{n-2} = c\sin n\theta$$

證明: 因爲 a_n^* 是 (4.8) 的解 $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$, 所以

$$\begin{aligned} L(a_n^*) &= L(u_n + i v_n) \\ &= L(u_n) + iL(v_n) \\ &= c(e^{i\theta})^n \\ &= c\cos n\theta + ic\sin n\theta \end{aligned}$$

根據複數相等定義, 得

$$L_1(u_n) = c\cos n\theta, \quad L_2(v_n) = c\sin n\theta$$

因此, 只要我們討論 (4.8) 的特解的求法就可以了, 如果求得它的特解爲 $a_n^* = u_n + i v_n$, 那麼 (4.6) 的特解爲 a_n^* 的實部, (4.7) 的特解爲 a_n^* 的虛部。

關於 (4.8) 的特解求法完全類同於前面 II 的情況。

(i) 當 $\alpha = e^{i\theta}$ 不是特徵方程式 $\alpha^2 + C_1\alpha + C_2 = 0$ 的根時, (4.8) 的特解設爲

$$a_n^* = d(e^{i\theta})^{n+2}$$

代入 (4.8) 得

$$d = \frac{c}{(e^{i\theta})^2 + C_1(e^{i\theta}) + C_2} = c_1 + ic_2$$

其中

$$c_1 = R\Big(\frac{c}{(e^{i\theta})^2 + C_1(e^{i\theta}) + C_2}\Big)$$

$$c_2 = I\Big(\frac{c}{(e^{i\theta})^2 + C_1(e^{i\theta}) + C_2}\Big)$$

所以

$$\begin{aligned} a_n^* &= [c_1\cos(n+2)\theta - c_2\sin(n+2)\theta] + i[c_1\sin(n+2)\theta + c_2\cos(n+2)\theta] \\ &= u_n + iv_n \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} u_n &= c_1\cos(n+2)\theta - c_2\sin(n+2)\theta \\ v_n &= c_1\sin(n+2)\theta + c_2\cos(n+2)\theta \end{aligned}$$

u_n, v_n 分別是 (4.6) 、(4.7) 的特解。

(ii) 當 $\alpha = e^{i\theta}$ 是特徵方程式 $\alpha^2 + C_1\alpha + C_2 = 0$ 的單根時, (4.8) 的特解設爲

$$a_n^* = dn(e^{i\theta})^{n+2}$$

代入 (4.8) 得

$$d = \frac{-c}{C_1(e^{i\theta}) + 2C_2} = c_1 + ic_2$$

其中

$$c_1 = R\Big(\frac{-c}{C_1e^{i\theta} + 2C_2}\Big), \quad c_2 = I\Big(\frac{-c}{C_1e^{i\theta} + 2C_2}\Big)$$

所以

$$\begin{aligned} a_n^* &= n(c_1 + ic_2)(e^{i\theta})^{n+2} \\ &= n[c_1\cos(n+2)\theta - c_2\sin(n+2)\theta] + in[c_1\sin(n+2)\theta + c_2\cos(n+2)\theta] \\ &= u_n + iv_n \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} u_n &= n[c_1\cos(n+2)\theta - c_2\sin(n+2)\theta] \\ v_n &= n[c_1\sin(n+2)\theta + c_2\cos(n+2)\theta] \end{aligned}$$

u_n, v_n 分別是 (4.6) 、(4.7) 的特解。 □

由於 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, 所以 $\alpha = e^{i\theta}$ 不可能是特徵方程式的重根。
因此, 對於 $f(n) = c\cos n\theta$ 或 $f(n) = c\sin n\theta$ 時, (4.8) 的特解爲:

(i) 若 $\alpha = e^{i\theta}$ 不是特徵方程式的根, 則

$$a_n^* = c_1\cos(n+2)\theta - c_2\sin(n+2)\theta \quad 或$$
$$a_n^* = c_1\sin(n+2)\theta + c_2\cos(n+2)\theta$$

(ii) 若 $\alpha = e^{i\theta}$是特徵方程式的根, 則

$$a_n^* = n[c_1\cos(n+2)\theta - c_2\sin(n+2)\theta] \quad 或$$
$$a_n^* = n[c_1\sin(n+2)\theta + c_2\cos(n+2)\theta]$$

□

例 4.16: 設 $a_{n+2} - a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, 求 a_n 的解。

解: 特徵方程式爲 $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0$, 得 $\alpha = 1, -1$, 所以 $a_n^{(h)} = c_0 \cdot 1^n + c_1(-1)^n = c_0 + c_1(-1)^n$。

令 $a_n^{(p)} = d_0\sin(\frac{n\pi}{2}) + d_1\cos(\frac{n\pi}{2})$, 代入原式得 $d_0\sin(\frac{(n+2)\pi}{2}) + d_1\cos(\frac{(n+2)\pi}{2}) - d_0\sin(\frac{n\pi}{2}) - d_1\cos(\frac{n\pi}{2}) = \sin(\frac{n\pi}{2})$。整理後得 $-d_0\sin(\frac{n\pi}{2}) - d_1\cos(\frac{n\pi}{2}) - d_0\sin(\frac{n\pi}{2}) - d_1\cos(\frac{n\pi}{2}) = \sin(\frac{n\pi}{2})$, 即 $-2d_0\sin(\frac{n\pi}{2}) - 2d_1\cos(\frac{n\pi}{2}) = \sin(\frac{n\pi}{2})$, 所以 $d_0 = -\frac{1}{2}$, $d_1 = 0$, 因此 $a_n^{(p)} = -\frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{2})$, 所以 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_0 + c_1(-1)^n - \frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{2})$。代入邊界條件得

$$\begin{cases} a_0 = c_0 + c_1 = 1 \\ a_1 = c_0 - c_1 - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

由聯立方程式可得 $c_0 = \frac{5}{4}$, $c_1 = -\frac{1}{4}$。所以 $a_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{2})$, $n \geq 0$。 □

根據上面三個情形的分析可得到下面表 (3) 的結果。

表3. 非齊次特解型式

$f(n)$ 型式	特解型式
$\sum_{i=0}^{k} c_i n^i$	$a_n^{(p)} = n^r(d_0 + d_1 n + \cdots + d_k n^k)$
$c\lambda^n$	$a_n^{(p)} = (d_0 + d_1 n + \cdots + d_r n^r)\lambda^n$
$\rho^n\cos n\theta$或$\rho^n\sin n\theta$	$a_n^{(p)} = \rho^n(B_1\cos n\theta + B_2\sin n\theta)$

上述的解法可以推廣到當 $f(n)$ 爲此三種型式的線性組合。綜合以上求解非齊次遞迴關係式可分爲下列的五個步驟:

步驟一 決定 $a_n^{(h)}$ 的型式

步驟二 決定 $a_n^{(p)}$ 的型式

步驟三 以 $a_n^{(p)}$ 代入原遞迴關係式求 $a_n^{(p)}$ 的未定係數 (未必可以全部求出)

步驟四 以 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ 代入邊界條件求出所有未定係數

步驟五 寫出 a_n 所求的答案

註: 若 $a_n^{(p)}$ 爲非齊次常係數線性遞迴關係式 $C_0a_n+C_1a_{n-1}+\cdots+C_ka_{n-k} = f(n)$ 的一個特解, 則 $C_0(a_n-a_n^{(p)})+C_1(a_{n-1}-a_{n-1}^{(p)})+\cdots+C_k(a_{n-k}-a_{n-k}^{(p)}) = 0$, 設 $b_n = a_n-a_n^{(p)}$, 則上式可改寫成一常係數線性遞迴關係式

$$C_0b_n + C_1b_{n-1} + \cdots + C_kb_{n-k} = 0$$

習題 4

下列是一些不錯的題目, 也許讀者有興趣試試, 爲了方便讀者, 我們也將答案列入。

1. 設 $a_n - 10a_{n-1} + 21a_{n-2} = 0$, $n \geq 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 93$, 求 a_n 的解。
(答案: $-6\cdot 3^n + 3\cdot 7^n$)

2. 設 $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$, $n \geq 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, 求 a_n 的解。 (答案: $(2-n)3^n$)

3. 設 $a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$, $n \geq 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, 求 a_n 的解。
(答案: $(\sqrt{2})^n[-\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{4}]$)

4. 求以下遞迴關係式的解 $a_n - 6a_{n-1} + 12a_{n-2} - 8a_{n-3} = 0$, $n \geq 4$, 其邊界條件爲 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_3 = -160$。 (答案: $(1+2n-3n^2)2^n$, $n \geq 0$)

5. 求下列 n 階行列式之值

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(答案: $-2^{n+1} + 3^{n+1}$, $n \geq 1$)

6. 求下列行列式之值

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

(答案: $(1+n)3^n$, $n \geq 1$)

7. 求解遞迴關係式 $a_n = 2a_{n-1}+3$, $n \geq 2$, $a_1 = 3$。 (答案: $3\cdot 2^n - 3$, $n \geq 1$)

8. 求解遞迴關係式 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4n$, $n \geq 2$, $a_0 = 9$, $a_1 = 14$。
(答案: $2^n + 3^n + 2n + 7$, $n \geq 0$)

9. 求遞迴關係式 $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 6\cdot 3^n + 10\cdot 5^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 10$ 的解。
(答案: $(1-n)3^n + (1+n)5^n, n \geq 0$)

10. 求遞迴關係式 $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n = \beta_1 \cdot 2^n$, $n \geq 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 的解。
(答案: $(1-\frac{5}{64}\beta_1)2^n + (\frac{-\beta_1}{192})(-6)^n + \frac{\beta_1}{16}n2^n$)

11. 求遞迴關係式 $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 12a_n = 3n-1$, $n \geq 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 的解。
(答案: $(\frac{21}{16})2^n - (\frac{11}{2352})(-6)^n - \frac{11}{49} - \frac{3}{7}n$)

12. 已知數列 $\{a_n\}$ 的第一項 $a_1 = \frac{3}{5}$, 第二項 $a_2 = \frac{31}{100}$, 並且數列 $(a_2 - \frac{1}{10}a_1), (a_3 - \frac{1}{10}a_2), \ldots, (a_{n+1} - \frac{1}{10}a_n), \ldots$ 是公比爲 $\frac{1}{2}$ 的等比數列,
   (a) 求數列 $\{a_n\}$ 的一般解公式。
   (b) 證明數列 $\log_{10}(a_2 - \frac{1}{2}a_1), \log_{10}(a_3 - \frac{1}{2}a_2), \ldots, \log_{10}(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n), \ldots$ 是公差爲 -1 的等差數列。

(答案: (a)$-\frac{1}{4}(\frac{1}{10})^n + \frac{5}{4}(\frac{1}{2})^n$)

13. 有一個樓梯共有 10階。某人上樓一步一階或一步二階, 則上樓方法共有幾種? (答案: 89)

14. 在一個大小尺寸爲 2×31 的棋盤上, 用 31個 2×1 尺寸的矩形覆蓋, 問有多少種覆蓋法?
(答案: 2178309)

15. (方程式根的問題) 設 α, β 爲實係數二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根, 若 $a \neq 0$, 則 $\alpha+\beta=-b/a$ (兩根之和), $\alpha\beta=c/a$ (兩根之積), 根據這些性質及乘法公式, 我們可以推得

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-b/a)^2-2(c/a)=(b^2-2ac)/a^2\\
&\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-b/a)^3-3(c/a)(-b/a)=(-b^3+3abc)/a^3\\
&\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)-2(\alpha\beta)^2=(b^4-4b^2ac+2a^2c^2)/a^4
\end{aligned}$$

但是欲求 $\alpha^n+\beta^n$ 之值, 其乘法公式之困難度亦增加很多, 故今想利用遞迴方法來得尋求解題之道。 (答案: $T_{n+2}=\left(-\frac{b}{a}\right)T_{n+1}+\left(-\frac{c}{a}\right)T_n$)

16. (錯排問題) 當聖誕節來臨時, 有一天大華正在寫一堆卡片, 突然想到一個有趣的數學問題。假設卡片與信封已分別寫上了名字, 試問在裝入時, 全部裝錯 (即卡片與信封上名字不符) 的裝法共有幾種呢? (答案: $a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2}), n>2$)

17. 甲固定在 9 PM 到 9 AM 灌溉一片草地。假設他每次在這期間可以灌 q 的水量, 但是 9 AM 到 9 PM 這些水量的一半會被蒸發或吸收。若此片草地在 9 PM 原本的水量有 I, 若 a_n 表示經過 n 個 12小時的週期後所剩的水量, 求 a_n 的遞迴關係式。 (答案: $\frac{I-q}{2}(\sqrt{2})^{-n}\{\sqrt{2}[1-(-1)^n]+[1+(-1)^n]\}+\frac{q}{2}[3-(-1)^n], n\geq 0$)

18. 設 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 共 m 個人玩傳接球遊戲 (不可自己傳給自己), 由 P_1 開始請問傳 n 次回到 P_1 的方法數有幾種? (答案: $\frac{m-1}{m}\left[(-1)^n+(m-1)^{n-1}\right]$)

19. 將一硬幣連續投擲 n 次, 在投擲中連續出現兩次正面的機率爲多少? (答案: $1-\frac{(1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{2n+2}\sqrt{5}}$)

A. 附錄: Mathematica: `RSolve`

Mathematica 5.0 (Wolfram 2003) 是一個強大的數值、符號運算、繪圖整合系統, 具有高階程式語言能力的數學軟體。它新增一個強大的內建命令 `RSolve`, 可以解遞迴方程。在 5.0 以前的版本中, `RSolve` 是置放於附加標準程式庫資料夾 `DiscreteMath` 中, 使用前必須將它先行載入, 載入格式: `<<DiscreteMath‘RSolve‘`。`RSolve` 的語法如下:

■ `RSolve[eqns, a[n], n]` 解遞迴方程式eqns的解a[n]

或

■ `RSolve[eqns,` a_n`, n]` 解遞迴方程式eqns的解a_n

其中 eqns 爲遞迴方程式及邊界條件, 可以使用函數 a[n], 或直接用 $\mathtt{a_n}$ 來表示數列 a_n。如果遞迴方程式及邊界條件總個數超過一個, 則將其全部置於一個陣列 (List) 中。例如解 $a_n - 2a_{n-1} = 3\hat{\ }n$, $a_1 = 2$, 則 eqns 的語法爲 {a[n]-2a[n-1] == 3^n, a[1] == 2}。因爲在 *Mathematica* 中 = 是用來設定變數的值, 因此方程式中的等號必須使用兩個。

RSolve 可以解任意階常係數線性遞迴方程。以下用兩個例子來說明它的使用方式。

例 A.1: (**二階線性齊次遞迴關係**) 設 $a_n + 4a_{n-1} - 21a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, 利用 Mathematica 的 RSolve 求解 a_n 的一般解。

解:

In[1]:= $\mathtt{RSolve[a[n] + 4a[n-1] - 21a[n-2] == 0,\ a[n],\ n]}$

Out[2]= $\mathtt{a[n] \to (-7)^n C[1] + 3^n C[2]}$

因爲沒有邊界條件, 所以在 Out[1] 中含有未定係數 C[1] 和 C[2], 因此 $a_n = c_1(-7)^n + c_2 3^n$。 □

RSolve 亦可以解帶參數及邊界條件的遞迴方程式, 如下面例子。

例 A.1: (**一階線性非齊次遞迴關係**) 設 $a[0] = 1$, $a_{n+1} = \alpha a[n] + \beta$, $n \geq 0$, 利用 Mathematica 的 RSolve 求解 a_n。

解:

In[1]:= $\mathtt{RSolve[\{a[n+1] == \alpha\ a[n] + \beta,\ a[0] == 0\},\ a[n],\ n]}$

Out[2]= $\mathtt{a[n] \to \frac{(-1+\alpha^n)\beta}{-1+\alpha}}$

因此 $a_n = \frac{(\alpha^n - 1)\beta}{\alpha - 1}$。 □

參考文獻

1. Brualdi, R. A., *Introductory Combinatorics*, 4th edition. Prentice Hall, New York, 2005.
2. D'Angelo, J. P. and West, D. B., *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs*, 2nd edition. Prentice Hall, New York, 1999.
3. Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O., *Concrete Mathematics*, 2nd edition. Addison Wesley, New York, 1994.
4. Grimaldi, R. P., Recurrence relations. In *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics* by Rosen, K. H. (Editor). Boca Raton, Florida: CRC, 1999.
5. Kelley, W. G. and Peterson, A. C., *Difference Equations: An Introduction with Applications*, 2nd edition. Academic Press, New York, 2000.
6. Loy, J., *Fibonacci Numbers*. 2007 Jun 20. Available from: http://www.jimloy.com/algebra/fibo.htm

7. Sedgewick, R. and Flajolet, P., *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, New York, 1996.
8. Sloane, N. J. A., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 2007 Jun 20. Available from: http://www.research.att.com/~njas/sequences/
9. Spiegel, M. R., *Schaum's Outline of Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. McGraw-Hill, New York, 1971.
10. Stanley, R. P., *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2. Cambridge University Press, New York, 1999.
11. Tucker, A., *Applied Combinatorics*, 4th edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.
12. Wolfram, S., *The Mathematica Book*, 5th edition. Champaign, IL: Wolfram Media, 2003.
13. 游森棚, 談談九十五學年度高中數學新課程大綱的 "遞迴"。2008 February 25。Available from: http://umath.nuk.edu.tw/~senpengeu/HighSchool/recurr.pdf

—本文作者張福春任教國立中山大學應用數學系, 莊淨惠爲國立中山大學應用數學系碩士班畢業生—